ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
50998 Quai des Grands-Augustins, 55

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR

G. DARBOUX

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

TOME II

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION

DE

N. E. NÖRLUND,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LUND (SUÈDE)

ET DE

Ernest LEBON,

PROFESSEUR HONORAIRE DU LYCÉE CHARLEMAGNE

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

PRÉFACE

Au lendemain de la mort prématurée d'Henri Poincaré, ses confrères, ses amis, ses admirateurs ont été unanimes à penser que notre pays devait rendre au géomètre qu'il venait de perdre le même hommage qu'il avait rendu aux plus grands : à Lagrange, à Laplace, à Fourier, à Cauchy. Le Ministère de l'Instruction publique a décidé de publier sans tarder les *Œuvres mathématiques* d'Henri Poincaré. Un traité a été conclu à cet effet avec l'éditeur M. Gauthier-Villars, que tant de travaux analogues, exécutés avec un désintéressement et une habileté universellement reconnus, désignaient pour cette tâche nouvelle. Le soin de surveiller et de diriger la publication m'a été confié. Je n'en verrai pas l'achèvement ; mais ce sera l'honneur de ma carrière d'en avoir provoqué et commencé l'exécution.

Le plan et le contenu des divers Volumes ont été complètement arrêtés. Dans le désir de provoquer des recherches, j'ai cru devoir commencer par le Tome II, parce qu'il contient les travaux les plus importants de la jeunesse de Poincaré, ceux qui concernent les fonctions fuchsiennes. L'hommage ainsi rendu à un savant illustre se doublera, je l'espère, d'un service rendu aux géomètres.

Dans la revision et la correction du texte, j'ai eu l'heureuse fortune d'être aidé et secondé par un jeune géomètre des plus distingués, M. Nörlund, professeur à l'Université de Lund. Il avait fait, depuis longtemps, l'étude la plus approfondie des travaux que Poincaré a publiés sur ce beau sujet. Les notes nombreuses qu'il a ajoutées en différents endroits et à la fin du Volume mettront en évidence toute la valeur de sa collaboration. M. Norlund unit à son beau talent mathématique une parfaite connaissance de la langue française.

Aux remerciements bien vifs et bien mérités que j'ai le plaisir et le devoir de lui offrir, je désire associer M. Ernest Lebon, professeur honoraire de l'Université, lauréat de deux de nos Académies, qui a revu avec le plus grand soin les épreuves et qui m'a déjà donné son concours si précieux pour la publication du *Bulletin des Sciences mathématiques* et pour celle de mes *Leçons*.

GASTON DARBOUX.

ÉLOGE HISTORIQUE

D'HENRI POINCARÉ

MEMBRE DE L'ACADÉMIE

LU DANS LA SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE DU 15 DÉCEMBRE 1913

PAR

M. GASTON DARBOUX,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

MESSIEURS,

Il y a un an à peine, le 17 juillet 1912, Henri Poincaré nous était brusquement enlevé. Sa mort si rapide, si inattendue, excita dans le monde entier une émotion universelle. En France, en Europe, en Amérique, des voix s'élevèrent aussitôt pour célébrer les mérites de celui dont le cerveau puissant avait manifesté tant d'aptitudes diverses; qui s'était montré à la fois mathématicien hors de pair, physicien pénétrant et profond philosophe. C'est un devoir pour nous, qui avons vécu à ses côtés, qui avons été ses contemporains ou ses anciens, d'apporter à notre tour notre témoignage, de rappeler les enseignements et les appréciations que, seuls, nous avons pu recueillir sur la belle et noble carrière qui s'est déroulée, presque toute entière, devant nos yeux.

I.

Henri Poincaré naquit à Nancy le 29 avril 1854. Ses parents étaient lorrains tous les deux. La famille Poincaré est originaire de Neufchâteau, dans les Vosges. Elle peut remonter jusqu'à Jean-Joseph Poincaré, conseiller au bailliage de Neufchâteau, qui mourut en 1750; l'un de ses petits-fils, Joseph-Gaspard Poincaré, fut maître de mathématiques au collège de Bourmont, près Neufchâteau.

C'est également de Jean-Joseph qu'est descendu le grand-père de notre confrère, Jules-Nicolas Poincaré, qui naquit à Neufchâteau en 1794. A peine âgé de 20 ans, il fut attaché à l'hôpital militaire de Saint-Quentin pendant la campagne de France, en 1814. En 1817, il vint s'établir à Nancy avec ses vieux parents et ses sœurs, et se fixa en 1820 dans une maison caractéristique du vieux Nancy, entre le palais ducal et la porte de la Craffe. Dans le discours qu'il prononça en recevant Henri Poincaré à l'Académie française, M. Frédéric Masson nous a dépeint de la manière la plus expressive cette maison « solide, massive et sans ornements, accostée d'un portail presque monumental dont les montants à bossages vermiculés supportent un fronton entrecoupé où brûle un pot de feu ». C'est là que sont nés les trois enfants de Jules-Nicolas, dont deux fils : en 1828, Léon Poincaré, qui devait embrasser la carrière médicale et fut le père de notre confrère; en 1829, Antoine Poincaré, qui devint inspecteur général des Ponts et Chaussées et eut deux fils : M. Raymond Poincaré, président de la République, et M. Lucien Poincaré, directeur de l'Enseignement secondaire au Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts. C'est également dans la vieille maison de la rue de Guise qu'est né notre confrère Henri Poincaré, et la ville de Nancy y a fait poser récemment une plaque commémorative, offerte par l'Association des anciens élèves des lycées de Nancy, Metz, Strasbourg et Colmar.

Dans le discours que je viens de rappeler, M. Frédéric Masson nous fait connaître encore les noms de deux autres membres de la famille Poincaré : un grand-oncle d'abord, le commandant Nicolas-Sigisbert

Poincaré, né à Nancy en 1751, qui se faisait appeler Pontcarré (1): il fit la guerre d'Espagne et disparut dans la retraite de Russie; et un autre soldat, Poincaré Amé-François, dont M. Henry Poulet nous parle longuement dans son Ouvrage sur les *Volontaires de la Meurthe;* il avait appartenu à l'armée régulière et rendit de grands services pendant les guerres de la Révolution. On l'appelait « le vieux Poincaré ».

Telle était, du côté paternel, la famille d'Henri Poincaré. Du côté maternel, il ne fut pas moins bien partagé. Sa mère, originaire d'une famille meusienne et dont les parents habitaient Arrancy, était une personne très bonne, très active et très intelligente. Elle consacrait tous ses soins à l'éducation de ses deux enfants, son fils et une fille, un peu plus jeune, qui devait devenir Mme Boutroux (2).

---

(1) Le nom de Poincaré n'agréait pas, semble-t-il, à notre Confrère. Il aurait préféré Pontcarré. On comprend à la grande rigueur qu'un pont soit carré, tandis que ces deux idées de point et de carré jurent de se voir ensemble accouplées. Je crois bien que c'est à M. Antoine Thomas que revient le mérite d'avoir indiqué la véritable étymologie d'un nom aujourd'hui illustre à tant de titres. Notre confrère de l'Académie des Inscriptions a découvert un « Petrus *Pugniquadrati* », étudiant à l'Université de Paris en 1403, et l'on a signalé depuis un Jehan Poingquarré, secrétaire de la reine Isabeau de Bavière et du duc de Bourgogne Jean sans Peur. « Le mot *poing*, ajoute M. Antoine Thomas, entre encore dans quelques locutions pittoresques où il se combine avec des participes passés; on dit : frapper à poings fermés, dormir à poings fermés, livrer pieds et poings liés. Mais on ne parle plus de poings carrés. Il en était jadis autrement, et c'est ce qui explique le nom de famille. »

Dans la chanson de geste de Gaydon, par exemple, le vieux trouvère nous montre un de ses héros qui

« Hausse le *poing* qu'il ot gros et *quarré*. »

Et ailleurs il nous décrit ainsi le duc Thibaud :

« Grant ot le cors, perereü et membré.
Larges espaules et le pis encharné.
La jambe droite et le pié bien torné;
Les bras ot lons et les *poins* bien *quarrez*. »

(2) C'est à Mme Boutroux et à un camarade d'Henri Poincaré, M. le général

Le milieu dans lequel le jeune Henri allait se développer était de ceux qui se rencontrent bien rarement. Le père, Léon Poincaré, qui exerça toute sa vie la médecine dans sa ville natale et y devint professeur à la Faculté de Médecine, était un esprit très original, dont notre Académie appréciait beaucoup et accueillait volontiers les travaux; on se souvient à Nancy, avec reconnaissance, du dévouement et du désintéressement avec lequel il exerçait sa profession. L'oncle, Antoni Poincaré, sorti dans un rang brillant de l'École Polytechnique, ne se contentait pas de remplir avec distinction sa tâche quotidienne; il a, lui aussi, adressé à notre Compagnie plusieurs Communications fort intéressantes, relatives aux problèmes les plus essentiels de la Météorologie. C'est dans cet entourage d'une élite de savants, d'universitaires, de polytechniciens, qu'allait s'écouler l'enfance d'Henri Poincaré.

Cette enfance fut exceptionnellement heureuse, grâce aux qualités naturelles dont il était doué, mais grâce aussi aux soins dont il fut entouré. Sa mère veillait sur lui avec une sollicitude pleine d'intelligence, qui a certainement favorisé son développement. Il fut extrêmement précoce et parla très tôt, mais d'abord assez mal, parce qu'il pensait plus vite qu'il ne pouvait parler. Il fut retardé à l'âge de 5 ans par une diphtérie, à la suite de laquelle il eut pendant neuf mois une paralysie du larynx. Cette maladie le tint longtemps faible et timide. Il n'osait pas descendre un escalier tout seul, et il fuyait les camarades de son âge dont il redoutait les brutalités. Dès qu'il sut lire, il devint un lecteur acharné, il ne lisait pas deux fois le même livre; mais il lisait de telle sorte que le livre était comme gravé dans sa mémoire. Il était toujours en mesure de dire à quelle page et à quelle ligne il avait vu telle ou telle chose. Il a conservé cette faculté toute sa vie, et même il replaçait dans le temps, avec une précision extraordinaire, les événements les plus insignifiants dont il avait été témoin.

Il se passionna d'abord pour l'histoire naturelle. *La Terre avant le*

Nardel, que je dois, sur l'enfance de notre Confrère, les renseignements dont je fais usage ici. J'ai fait aussi quelques emprunts à un article publié dans le journal *L'Enfant* par Mme Henri Beau, née de Loménie.

déluge, de Louis Figuier, qu'il avait lue à 6 ou 7 ans, avait été pour lui une révélation. On lui donna d'autres Ouvrages du même auteur. On le faisait travailler alors avec un inspecteur primaire ami de sa famille, M. Hinzelin, qui a publié des livres élémentaires estimés; M. Hinzelin ne lui donnait pas beaucoup de devoirs écrits, mais se laissait poser des questions et satisfaisait à toutes les curiosités de son élève. C'est ainsi que le jeune Henri apprit beaucoup de choses, sans que personne se rendît un compte précis de ce qu'il savait. Lorsqu'il entra au lycée en neuvième, au mois d'octobre 1862, sa mère se demandait s'il pourrait suivre les cours; mais elle fut vite rassurée, car son fils fut classé premier à la première composition et continua assez généralement à occuper ce rang dans toutes les branches.

J'ai eu sous les yeux un carnet qu'elle avait précieusement conservé et où se trouvent consignées toutes les notes et toutes les places que son fils avait eues pendant cette année de neuvième. Un simple coup d'œil, jeté sur ces notes, nous montre déjà en lui un enfant au-dessus de la moyenne; mais elles ne font pressentir en rien ses futures aptitudes mathématiques; tout au contraire. C'est surtout en histoire et géographie qu'il se distinguait alors. Le carnet se termine par une composition française où l'on reconnaît déjà, bien qu'elle soit encore mal formée, l'écriture anguleuse si caractéristique de notre Confrère. Cette composition, qui se recommande par des qualités de sentiment et de style bien rares chez un enfant de 9 ans, mérite le nom de « petit chef-d'œuvre » que lui avait appliqué le professeur.

Notre futur Confrère avait le travail si facile qu'on ne le voyait jamais faire de devoirs (1). Il s'amusait franchement, riait, plaisantait, se don-

(1) « Il n'était pas, nous dit le général Xardel, l'écolier modèle qui reste pendant des heures assis devant sa table, le nez sur ses livres et sur ses cahiers. Combien de fois, en allant après la classe, vers 5 ou 6 heures, lui demander quelques éclaircissements sur ses devoirs, obscurs pour moi, lumineux pour lui, combien de fois l'ai-je trouvé dans la chambre de sa mère, allant et venant, prenant part aux conversations et, en apparence, occupé de toute autre chose que de faire ses devoirs. Et puis, tout à coup, il s'approchait de la table, et, sans s'asseoir, posant

nait au jeu de tout son corps. Il ne réussissait guère dans les jeux de force et d'adresse, ni dans ceux qui exigent quelque patience; il préférait ceux où son esprit avait une part, ceux auxquels il pouvait se livrer en compagnie des sœurs des petits camarades dont sa mère l'entourait volontiers.

Au moment des vacances, il allait chez ses grands-parents, M. et M^{me} Lannois, à Arrancy, en pleine campagne, où on lui laissait une entière liberté dans les limites d'un grand jardin. C'est dans les allées de ce jardin qu'il se promenait, en marchant très vite, un bâton à la main. De temps en temps, du bout de ce bâton, il écrivait ou dessinait sur le sable; et l'on s'apercevait alors que, tandis qu'il était censé se reposer, sa tête travaillait malgré lui.

Il aimait les bêtes; la seule fois qu'il ait tenu un fusil, il a tiré au hasard dans un arbre et il en est tombé un oiseau blessé. Depuis ce temps, il n'a jamais voulu tirer un seul coup de fusil.

La tendresse qu'il avait pour les animaux ne l'empêchait pas d'aimer ses semblables. Il n'y a pas eu de fils ni de frère plus affectueux que lui. Il était, de même, doux et gentil avec ses camarades, toujours modeste et conciliant, sans chercher à faire valoir sa supériorité. Mais, quand il s'agissait de choses auxquelles il tenait pour de bonnes raisons, il opposait aux autres une résistance passive, qui était inébranlable.

Pendant les vacances de 1865, au sortir de la septième, nous dit le général Xardel, nos familles se réunirent pour aller passer quelques semaines à Gérardmer. Henri voulait tout voir, tout comprendre, et nous expliquait tout. Il y a à Gérardmer un écho célèbre, l'Écho de Ramberchamp, que nous faisions causer. Henri nous exposait la théorie de l'écho, il connaissait la vitesse du son et la distance exacte à laquelle il fallait se placer. Nous cherchions ensemble, au bord de la Jamagne, près du pont des Fées, la pierre de Charlemagne, où Henri retrouvait et montrait

---

un genou sur la chaise, il prenait sa plume de la main droite ou de la main gauche, au hasard, écrivait quelques mots ou quelques lignes, puis reprenait ses allées et venues, et la conversation interrompue. Après quelques pauses semblables, le devoir se trouvait fait tout de même, et bien fait. Il écrivait alors indifféremment de l'une ou de l'autre main, et également assez mal. »

l'empreinte laissée dans le granit par le cheval, qui, d'un bond, avait franchi le torrent. On venait de terminer et d'inaugurer la belle route du Col de la Schlucht que suivait une ligne télégraphique. Jusqu'alors, nous n'avions vu de télégraphe que le long du chemin de fer. Télégraphe et chemin de fer nous paraissaient inséparables. Un télégraphe sur une route, c'était extraordinaire. Henri trouvait cela très simple, il nous expliquait le télégraphe Brégnet, l'électricité et la transmission des dépêches.... Il avait la gaité et l'expansion d'un enfant, mais il raisonnait comme un homme.

En 1867, ayant visité l'Exposition universelle et acquis quelques notions sur la politique, il eut l'idée de fonder, dans le grand jardin d'Arrancy, où il passait ses vacances en compagnie de sa sœur et d'un cousin de son âge, un triple gouvernement, une sorte de fédération qu'il appela la *Trinasie*. Cela devait durer plusieurs années. C'est lui qui élabora la constitution de la *Trinasie*, qui distribua les ministères, qui inventa des langues particulières pour les trois royaumes et aussi leur langue commune, le *Trinasien*. Il se trouva que, sans en avoir l'air, il s'était attribué tout le pouvoir; mais il n'en abusa pas.

L'existence de la Trinasie fut le prétexte d'une foule d'entreprises et de réjouissances des plus variées. Quand il y avait des représentations de gala, c'était toujours notre futur Confrère qui avait composé les drames et les comédies. C'est ainsi qu'il fit à 13 ou 14 ans un drame en vers sur Jeanne d'Arc.

En dehors de ces semaines de liberté, où il jouissait de la solitude à deux ou trois, il y avait la grande semaine, celle où se réunissaient, tantôt ici et tantôt là, tous les parents de la région. Il s'amusait franchement à ces fêtes où il ne dirigeait plus. Il jouait un rôle actif dans les comédies et les charades [1]. Il aima aussi beaucoup la danse; il y était infatigable. Comme il avait le travail facile, il était toujours prêt à sortir, à se promener, à s'amuser, et ses études n'en souffraient pas.

---

[1] « Le répertoire, nous dit le général Xardel, c'était d'abord Labiche; plus tard, nous ne craignîmes pas d'aborder celui de la Comédie-Française avec *Mademoiselle de la Seiglière*. Henri faisait le Marquis, dont on disait : Il vivra cent ans et il mourra jeune. Hélas! il n'a réalisé que la fin de la prophétie. »

On a déjà remarqué plus d'une fois qu'il était distrait; il l'était sans doute, comme tous ceux qui se laissent absorber par leurs pensées; cela ne l'empêchait pas, lorsqu'il le voulait, de fixer son attention sur un sujet donné, aussi longtemps qu'il était nécessaire. Une de ses distractions habituelles consistait à ne pas savoir si, oui ou non, il avait déjeuné. Un jour, à l'âge de 7 à 8 ans, en marchant dans la rue du Ruisseau, qui longeait un ruisseau à découvert, coupé çà et là par de petits ponts, il oublia de traverser en même temps que sa mère et sa sœur; il continua son chemin sur l'autre rive; mais, dès qu'il s'en aperçut, il les rejoignit en ligne droite, en plongeant dans l'eau jusqu'à la ceinture.

C'est lorsqu'il était en quatrième que se dessina sa vocation pour les Mathématiques. A partir de ce moment, cette vocation ne fit que grandir et devint de plus en plus impérieuse et absorbante. Pourtant il poursuivit jusqu'au bout, avec le même succès, ses études classiques. Nous avons là-dessus le témoignage d'un de ses professeurs d'alors, M. de Roche du Teilloy, Secrétaire général de l'Association amicale des anciens élèves des lycées de Nancy, Metz, Strasbourg et Colmar.

Qu'il m'est doux, écrivait-il dans l'*Annuaire* de cette Association pour 1912, de louer Henri Poincaré, que j'ai si bien connu et tant aimé, qui devenait mon ami quand il était encore mon élève. Comme je comprenais l'admiration qu'inspirait à Voltaire finissant le jeune sage Vauvenargues.

Pendant la guerre de 1870, alors que, le professeur étant enfermé dans Paris, je fus, jusqu'à Pâques, chargé d'une partie de la Rhétorique aux élèves du lycée de Nancy, je fis enfin connaissance de Henri Poincaré. Quel élève supérieur et original! Un jour que je lui avais proposé comme sujet de composition préparatoire au baccalauréat ès lettres les différences entre l'homme et l'animal, après m'avoir lu son travail, jeté sur de petits morceaux de papier de tous formats, il me demanda quelle note probable il obtiendrait à l'examen : je lui répondis que je ne saurais le dire, très bonne ou médiocre, que c'était trop personnel, trop original, trop osé, trop fort même, pour un candidat au baccalauréat. Désirant conserver cette étude si curieuse, je lui fis promettre de me la copier; sa modestie ne lui permit pas de me tenir parole. D'ailleurs, au baccalauréat, il fit une dissertation très distinguée sur cette question : « Comment une nation peut se relever », dont M. de Margerie fut vivement frappé.

Poincaré fut en effet reçu, le 5 août 1871, avec la mention *bien*. Sa composition latine fut, si nous en croyons les notes, supérieure même à sa dissertation française; il fut bon, ou très bon, dans toutes les parties de l'examen.

Et pourtant, il avait eu, lui aussi, sa part des épreuves de l'année terrible.

Quand la guerre éclata, Henri Poincaré avait 16 ans, il était trop jeune et trop délicat pour s'engager; mais il était à Nancy, en plein cœur de l'invasion, il en vit toute l'horreur, d'abord dans les ambulances où il accompagnait son père, mais surtout pendant un voyage qu'il fit avec sa mère et sa sœur, à travers des difficultés inouïes, jusqu'à Arrancy, où la santé de ses grands-parents, ébranlée par les émotions de la guerre, appelait Mme Poincaré. Arrancy était près du champ de bataille de Saint-Privat; il fallut, pour y arriver, traverser, par un froid glacial, des villages incendiés, vides d'habitants. Quand on eut atteint le but du voyage, on trouva la maison familiale dévastée. Les Prussiens avaient tout emporté, les objets de valeur comme les objets sans valeur, l'argenterie, le linge, les provisions de toutes sortes. La cave, le fruitier, la basse-cour, tout avait été saccagé; et, le jour du départ des ennemis, M. et Mme Launois se seraient couchés sans dîner si une pauvre femme du village, que sa misère avait préservée du pillage, n'était venue, une soupière pleine à la main, leur offrir de partager son pauvre repas, heureuse de leur témoigner sa gratitude pour les bienfaits qu'elle avait reçus d'eux. Jamais Henri Poincaré ne devait oublier ce voyage, et c'est l'impression qu'il en garda, comme la douleur qu'il ressentit en voyant sa ville natale occupée si longtemps par les ennemis, qui firent de lui l'ardent patriote qu'il est resté toute sa vie. C'est pendant la guerre qu'il s'apprit à lui-même l'allemand, qu'il ne savait pas, pour pouvoir lire, dans les seuls journaux qu'il eût à sa disposition, les nouvelles qu'il avait le vif désir de connaître [1].

Voici ce que nous dit à ce sujet M. de Roche du Teilloy :

Quand je n'avais pas eu le temps de lire les journaux je priais Poincaré de me tenir au courant des nouvelles, d'apprécier les événements. Quelle netteté! Quelles impressions justes! C'étaient de bons premiers-Paris improvisés. Le sens des affaires politiques, du patriotisme, est inné dans la famille Poincaré.

Après avoir passé en août, comme nous l'avons vu, le baccalauréat

---

[1] Mme Henri-Beau dans le journal *L'Enfant*, décembre 1912.

ès lettres, Poincaré se présenta, trois mois après, en novembre 1871, au baccalauréat ès sciences. Il faillit, chose étrange, être refusé, et refusé pour la composition de Mathématiques. Il paraît qu'il était arrivé en retard et avait mal compris le sujet. Heureusement, il avait déjà sa petite réputation. « Tout autre élève que lui, dit le Président du Jury en proclamant le nom des admissibles, aurait été refusé pour sa composition de Mathématiques. » Il est inutile de dire qu'il se releva brillamment à l'examen oral ; il fut reçu avec la mention *assez bien*.

Cette composition de Mathématiques, qui faillit jouer un mauvais tour à notre Confrère, avait pour principal objet la démonstration de la formule qui fait connaître la somme des termes de la série la plus simple, une progression géométrique convergente. Il semble que les séries, dans le domaine desquelles il a fait plus tard de si brillantes incursions, voulaient se venger par avance des violations de domicile qu'il devait leur infliger.

II.

Muni de ses deux baccalauréats, Poincaré entra dans la classe de Mathématiques élémentaires, où il commença à donner des preuves de ses aptitudes extraordinaires. A la fin de cette année scolaire 1871-1872, il obtint le premier prix de Mathématiques élémentaires au Concours général, où il avait à se mesurer avec les élèves de tous les lycées de France, et se présenta, pour faire plaisir à son professeur, à l'École Forestière, où il fut reçu deuxième.

L'année suivante, il entra en Mathématiques spéciales, où il rencontra deux jeunes camarades qui devaient se faire un nom dans la Science, Paul Appell, qui siège aujourd'hui à notre Bureau, et Colson, qui professe à l'École Polytechnique et a été plusieurs fois notre lauréat.

Dès la première leçon, nous dit M. Colson, le nouvel élève, un peu voûté déjà, perché sur les gradins supérieurs comme il convient à un nouveau, sortit de sa poche un faire part d'enterrement en guise de cahier de notes. Nous crûmes à un oubli ; mais, les jours suivants, nous le vîmes avec stupéfaction griffonner quelques lignes sur la même feuille, facilement reconnaissable à sa bordure de deuil. Évidemment, le nouvel élève n'était pas sérieux. Il fallait s'en assurer. Car enfin, il avait eu le premier prix au Concours général, même sur les lycées de Paris. A la sortie d'un cours, on lui délégua un vieil élève de quatrième année pour lui demander une explication sur un point qui avait paru particulièrement obscur. Poincaré la donna immédiatement, sans réfléchir une minute, et partit en laissant son interlocuteur et les témoins dans un tel ébahissement que l'un d'eux se demanda : Comment fait-il?

De son côté, M. Appell nous fournit l'appréciation suivante :

Dès la rentrée, son intelligence se révéla immédiatement à son professeur Elliot, comme à nous ses condisciples; il avait le don génial d'apercevoir immédiatement, avec le détail particulier à chaque question, l'idée générale dont elle procède et la place qu'elle occupe dans l'ensemble. Il avait aussi cette simplicité, cette horreur de l'effet, ce bon sens lorrain, cette amitié sûre qu'il a conservés toute sa vie.

A la fin de cette année, Poincaré eut encore le premier prix au Concours général de Paris et des départements ([1]). Il fut reçu premier à l'École Polytechnique. Nous avons recueilli de diverses sources des renseignements sur la manière dont il passa ses examens.

Par pure curiosité, nous dit M. de Roche du Teilloy, j'assistai à son examen oral de Mathématiques; la salle, ordinairement presque vide, était comble, spectacle curieux. Il parlait lentement, s'arrêtant, fermant parfois les yeux, demandant la permission d'interrompre sa démonstration pour en essayer une autre dans un petit coin du tableau, puis s'écriant : « Non, décidément, j'en reviens à ma première démonstration, plus courte et plus élégante. » Venait-il de l'inventer? L'examinateur était émerveillé.

([1]) Ce succès surprit agréablement ses parents, car notre Confrère leur avait annoncé que, n'ayant écrit qu'une page, il n'aurait aucune nomination. C'est sans doute à cette composition que se rapporte le propos suivant tenu par M. Rollier :

« Un jour, nous dit M. de Roche du Teilloy, je dînais à Paris chez un commun ami avec M. Rollier, inspecteur général des sciences pour l'Enseignement secondaire. « Vous avez à Nancy, me dit-il, un élève de Mathématiques spéciales extra-
» ordinaire. C'est moi qui ai corrigé les compositions du Concours général de
» Mathématiques; eh bien! lors même que Poincaré eût fait des fautes de calcul,
» qu'il n'eût point achevé sa copie, je l'aurais encore placé premier hors ligne, au-
» dessus des élèves de Paris, rien que pour la façon dont il avait posé la question.
» Cet élève ira loin. »

De son côté, M. Colson nous a conservé le souvenir de l'examen que Poincaré passa avec M. Tissot, chargé d'interroger les candidats sur les Mathématiques élémentaires.

Avant d'interroger Poincaré, M. Tissot suspendit l'examen pendant trois quarts d'heure : le temps de préparer une question raffinée, pensions-nous. M. Tissot revint avec une question du deuxième Livre de Géométrie. Poincaré dessina un cercle informe, il marqua les lignes et les points indiqués par l'examinateur; puis, après s'être promené devant le tableau les yeux fixés à terre pendant assez longtemps, conclut à haute voix : Tout revient à démontrer l'égalité $AB = CD$. Elle est la conséquence de la théorie des polaires réciproques, appliquée aux deux droites.

« Fort bien, Monsieur, interrompit M. Tissot; mais je voudrais une solution plus élémentaire. » Poincaré se mit à repasser, non plus devant le tableau, mais devant la table de l'examinateur, face à lui, presque inconscient de ses actes, puis tout à coup développa une solution trigonométrique.

« Je désire que vous ne sortiez pas de la Géométrie élémentaire », objecta M. Tissot, et presque aussitôt satisfaction fut donnée à l'examinateur d'élémentaires, qui félicita chaleureusement l'examiné et lui annonça qu'il avait mérité la note maxima.

Il y a dans ces deux récits des détails dont la vérité sautera aux yeux de tous ceux qui ont connu Poincaré.

Comme son camarade Appell, il s'était présenté au concours de l'École Normale. C'est là que je fis sa connaissance, je venais d'être nommé maître de Conférences et j'étais pour la première fois membre du jury. Poincaré fut reçu cinquième seulement et Appell second. J'ai le souvenir bien précis de leurs examens et de l'impression que l'un et l'autre produisirent sur moi; mais comme tous mes collègues du jury, Briot, Bertin, Debray ne sont plus là, on comprendra très bien que je m'abstienne de tout détail.

Notre confrère Appell entra à l'École Normale; Poincaré, suivant sans doute l'exemple et les conseils de son oncle, choisit l'École Polytechnique, dont il devait devenir une des gloires les plus éclatantes.

Quelques-uns de ses camarades nous ont transmis des indications relatives à son séjour à cette École. Il continuait à ne pas prendre de notes aux Cours et, suivant une habitude que nous avons déjà remarquée, il travaillait fréquemment en se promenant dans les couloirs de l'École. Pendant la récréation, il se joignait volontiers à la bande compacte de ses camarades de Nancy, s'accrochant au bras droit de l'un, au bras gauche de l'autre, poursuivant ses pensées sans presque parler, ni sans s'émouvoir des discussions qui, à cette époque de crise, devenaient quelquefois fort vives.

Son inaptitude pour les exercices physiques, maniement d'armes, gymnastique, était grande. Elle était particulièrement marquée pour le dessin et avait failli empêcher son entrée à l'École (¹). A la fin de l'année, ses camarades, qui l'aimaient beaucoup et connaissaient son heureux caractère, eurent l'idée d'organiser une exposition de ses œuvres. Les jeunes gens sont sans pitié comme les enfants. Sous une étude de cheval, ils avaient mis τουτο ιππος et sous une Académie τουτο ανηρ. J'aime à croire que ces indications étaient inutiles (²).

Cette faiblesse en dessin détermina son échec à l'examen final de Géométrie et de Stéréotomie. L'impossibilité de construire par points des droites à peu près convergentes, peut-être aussi des démonstrations de voyant qui l'amenaient au but sans considération intermédiaire, indisposèrent l'examinateur, M. de la Gournerie, et valurent à l'élève une note franchement mauvaise, qui lui fit perdre le premier rang. Le premier sorti de l'École fut Bonnefoi, qui devait être tué quelques années plus tard dans un accident de mine.

Poincaré entra à l'École des Mines en 1875. D'après ce que nous

---

(¹) Le général Nardel nous rapporte, à ce sujet, ce propos que l'examinateur Abel Transon, ami de sa famille, avait tenu après l'examen de Poincaré à Nancy :

« Nancy, disait M. Transon, présente un candidat bien remarquable : c'est Poincaré. Mais nous sommes bien embarrassés. Il a un zéro pour le dessin et le zéro est éliminatoire. Pour le reste il est absolument hors de pair. S'il est reçu, il sera premier ; mais sera-t-il reçu ? »

(²) Toutefois, il finit par se perfectionner. J'ai vu des dessins de lui qui ne sont pas mal. Poincaré, qui devait être pour ses enfants l'éducateur le plus assidu, le plus éclairé, quittant tous ses travaux pour s'occuper de leur instruction, leur distribuait ces dessins à titre de récompense.

savons de lui, on peut assurer qu'il s'acquitta avec conscience de ses devoirs professionnels. Son camarade Lallemand, aujourd'hui notre Confrère, nous apprend que, lui ayant un jour demandé des détails à propos d'un voyage d'études qu'il devait faire en Hongrie, où Poincaré était allé l'année précédente, celui-ci lui dicta, séance tenante, le programme le plus détaillé de tous les points où il devait s'arrêter, des établissements qu'il devait visiter et même des trains qu'il aurait à prendre, des hôtels qu'il devait choisir, de ceux qu'il fallait éviter.

III.

Tout en se préparant à être un bon ingénieur, Poincaré se tournait vers la Science, pour laquelle il était si bien doué. Ce qu'il faut admirer surtout dans ses débuts, c'est la décision, je ne crains pas de dire l'audace, avec laquelle il s'adresse aux questions les plus élevées, les plus difficiles et les plus générales. Négligeant de faire l'essai de ses forces sur des problèmes particuliers, il est de ceux qui, pour leurs coups d'essai, veulent des coups de maître; il va droit aux problèmes les plus importants, les plus essentiels; il ne craint pas de s'attaquer à ceux même dont la solution paraîtrait réservée à un lointain avenir.

Après avoir enlevé haut la main, en 1876, la licence ès sciences mathématiques, il débuta par un *Mémoire sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles*, qui fut inséré en 1878 au *Journal de l'École Polytechnique*.

Notre grand géomètre Cauchy avait renouvelé les bases de l'Analyse infinitésimale par son immortelle théorie des fonctions d'une variable imaginaire; mais, entraîné par ses recherches, il avait laissé à d'autres le soin d'appliquer et de développer ses idées. Victor Puiseux montra le premier, dans un Mémoire classique, comment les principes de Cauchy pouvaient conduire aux propriétés essentielles des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Briot et Bouquet abordèrent ensuite l'application de ces mêmes principes à l'étude des différentes solutions des équations différentielles du premier ordre. Joseph Bertrand disait volontiers que le Mémoire dans lequel les deux savants collaborateurs avaient exposé leurs résultats constituait le plus grand progrès qui eût été réalisé, depuis Euler, dans cette branche de l'Analyse. C'est par l'étude et le perfectionnement de ce travail magistral que débutait Henri Poincaré.

Dans la thèse qu'il présenta en 1878 à la Faculté de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, il s'attaquait à une question encore plus difficile, celle de l'intégration des équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes. Le jury comprenait Ossian Bonnet, Bouquet et l'auteur de cette Notice. On me fit l'honneur de me confier l'examen du travail.

Dès le premier coup d'œil, il me parut clair qu'il sortait de l'ordinaire et méritait amplement d'être reçu. Il contenait certainement assez de résultats pour fournir matière à plusieurs bonnes thèses. Mais, il ne faut pas craindre de le dire, si l'on veut donner une idée précise de la manière dont travaillait Poincaré, bien des points demandaient des corrections ou des explications. Poincaré était un intuitif. Une fois au sommet, il ne revenait jamais sur ses pas. Il se contentait d'avoir brisé les difficultés, et laissait aux autres le soin de tracer les routes royales qui devaient conduire plus facilement au but [1]. Il fit bien volontiers le travail de correction et de déblaiement qui me paraissait nécessaire. Mais il m'a expliqué depuis qu'au moment où je le lui demandais, il avait en tête bien d'autres idées; il s'occupait déjà des grands problèmes dont il allait nous présenter la solution.

Quoi qu'il en soit, sa thèse se recommande par plusieurs notions nouvelles et importantes. J'en citerai deux seulement : celle des fonctions à espaces lacunaires, qui avait beaucoup frappé Hermite, et celle des fonctions algébroïdes, qui est appelée à jouer en Analyse un rôle des plus essentiels.

---

(1) Dans le bel éloge qu'il a consacré à Halphen, nous relevons à l'appui de ce que nous venons de dire la phrase suivante :

« Je n'ai jamais terminé un travail sans regretter la façon dont je l'avais rédigé ou le plan que j'avais adopté. »

Voir le Volume intitulé : *Savants et Écrivains*, p. 139.

Les deux Mémoires que je viens de rappeler décelaient un esprit original et profond et étaient le présage certain d'un bel avenir scientifique. Poincaré était tout désigné pour l'Enseignement supérieur. Aussi, quelques mois à peine après sa soutenance, le 1er décembre 1879, il était chargé du Cours d'Analyse à la Faculté des Sciences de Caen. Dans la période de six mois où il exerça les fonctions d'ingénieur des mines, et où il fut chargé en cette qualité du sous-arrondissement minéralogique de Vesoul, il se fit remarquer par son sang-froid et son amour du devoir. En dépit du danger qui le menaçait, il descendit dans un puits de mine, où une explosion de grisou avait fait 16 victimes et allumé l'incendie.

Quand je me reporte à cette année 1879, je songe aux espérances qu'elle nous donnait pour le développement des hautes études mathématiques dans notre pays. Deux géomètres, un peu plus jeunes que Poincaré, faisaient comme lui, et contre leur gré peut-être, l'ornement de nos Facultés de province. Pendant que Poincaré était à Caen, Paul Appell professait la Mécanique rationnelle à Dijon, Émile Picard enseignait l'Analyse infinitésimale à Toulouse. Berthelot, à qui ses fonctions d'inspecteur général donnaient autorité dans l'Enseignement supérieur, n'avait pas voulu que l'on pût reprocher à la Faculté de Paris de se recruter exclusivement en dehors des Facultés de province, et on lui avait donné satisfaction. Nos deux Confrères durent quitter Paris. Mais les règlements ne peuvent rien, le plus souvent, contre le mérite supérieur et la force des choses. Deux ans après, les trois jeunes gens nous revenaient pour rester définitivement attachés à la Faculté de Paris. Poincaré, en particulier, était nommé maître de Conférences d'Analyse au commencement de l'année scolaire 1881-1882. Quatre ans après, il était chargé du Cours de *Mécanique physique et expérimentale*; et enfin, en août 1886, il succédait à notre confrère Lippmann dans la Chaire de *Physique mathématique et Calcul des Probabilités*. Il devenait titulaire en même temps que nos deux confrères Boussinesq et Émile Picard.

IV.

Les travaux qu'il avait accomplis durant cette période justifiaient un avancement si rapide. Ils avaient pour objet la théorie des équations différentielles et aux différences partielles, la théorie générale des fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables, la Mécanique analytique et la Mécanique céleste, l'Algèbre et la Théorie des nombres. Tous contenaient des résultats entièrement neufs, des découvertes analytiques qui faisaient dire à un de nos maîtres : « Poincaré commence comme Cauchy. »

Nous citerons, en premier lieu, un travail tout à fait original sur les équations différentielles, présenté à l'Académie en 1880 et publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Poincaré s'y place à un point de vue tout différent de celui qu'il a adopté dans son premier Mémoire; il admet que les coefficients de l'équation différentielle sont réels, et il se propose de construire et de discuter la forme générale des courbes réelles qui représentent les diverses solutions de l'équation différentielle. Le problème ainsi étudié est analogue à celui qui se présente en Géométrie analytique lorsqu'on veut reconnaître la forme générale d'une courbe d'après son équation, mais il est incomparablement plus difficile. Poincaré l'a abordé en commençant par examiner le cas où l'équation différentielle est du premier degré, c'est-à-dire où le coefficient différentiel est le quotient de deux polynomes.

Il a reconnu tout d'abord que les courbes représentées par l'équation différentielle sont, soit des courbes fermées, soit des spirales. Elles peuvent contenir trois sortes de points singuliers :

1° Les *cols*, par lesquels passent deux courbes définies par l'équation, et deux seulement;

2° Les *nœuds*, où viennent se croiser une infinité de courbes définies par l'équation;

3° Les *foyers*, autour desquels tournent ces courbes, en s'en rapprochant sans cesse comme le ferait une spirale logarithmique;

4° Exceptionnellement enfin, et seulement dans des cas très particuliers, se présentent en outre des *centres*, qu'entourent les courbes en s'enveloppant mutuellement.

Nous devons renoncer à dire ici comment l'Auteur étudie la distribution de ces différents points; comment il démontre, entre le nombre des cols, des foyers et des centres, une relation analogue à celle qui a été établie par Euler entre le nombre des faces, des sommets et des arêtes d'un polyèdre, comment enfin il étend tous ces résultats à des systèmes plus généraux d'équations différentielles; nous devons au contraire insister sur une proposition énoncée en 1882 dans une Note des *Comptes rendus* et qui nous paraît un des plus beaux résultats obtenus en Analyse depuis Cauchy.

De toutes les découvertes que les Mathématiciens ont faites au cours du XIX[e] siècle, la plus féconde sans doute est celle que l'on doit à Cauchy relativement à la série de Taylor et aux conditions de sa convergence. On peut dire qu'elle a renouvelé toutes les branches de l'Analyse. En l'appliquant à un système quelconque d'équations différentielles, le grand géomètre avait établi que les solutions d'un tel système peuvent se développer en séries convergentes, ordonnées, par exemple, suivant les puissances de la différence entre la variable indépendante et sa valeur initiale; mais ces séries de Cauchy n'étaient convergentes, en général, que si le module de cette différence ne dépasse pas une certaine limite. Poincaré ne considère, il est vrai, que les solutions réelles d'un système quelconque d'équations différentielles algébriques à coefficients réels; mais il démontre que, dans ce cas, les solutions réelles peuvent se définir de la manière la plus complète par des séries *toujours* convergentes, ordonnées suivant les puissances d'une variable auxiliaire, que l'on peut même choisir d'une infinité de manières. Cette proposition, qu'il a appliquée lui-même au problème des trois corps, me paraît dominer toutes les recherches que l'on a entreprises depuis sur ce célèbre problème (¹).

(¹) Je ne sais si l'on a remarqué que, par une généralisation facile, on peut obtenir le théorème suivant :

Étant donné un système quelconque d'équations différentielles algébriques, à

V.

Nous sommes obligé de passer sous silence bien d'autres recherches publiées pendant cette période de jeunesse, pour aborder la partie la plus brillante des travaux d'Henri Poincaré, celle qui concerne les *fonctions fuchsiennes* et *kleinéennes*.

L'Académie avait mis au concours, pour le grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880, la question suivante :

Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.

Le prix échut à Georges Halphen qui allait devenir, pour bien peu de temps, hélas! notre confrère. Mais Poincaré avait présenté au concours un travail où il avait adopté la fière devise de sa ville natale : *Non inultus premor*.

Dans ce Mémoire, qui fut retenu par la Commission et obtint la mention la plus honorable, il faisait connaître le résultat de ses premières études sur un problème qu'il n'avait pas craint de se poser, malgré son extrême généralité :

Intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Il serait trop long d'indiquer par quelle suite de déductions il fut conduit, pour le résoudre, à introduire de nouvelles transcendantes, *les fonctions fuchsiennes et kleinéennes*, dont la découverte constitue, aujourd'hui encore, son titre de gloire le plus éclatant. Je me bornerai à donner une idée de ces nouvelles fonctions, autant qu'on peut le faire, sans recourir à aucun signe mathématique.

---

coefficients réels ou imaginaires, il est toujours possible d'obtenir pour toutes les inconnues des séries toujours convergentes ordonnées suivant les puissances d'une variable auxiliaire réelle si l'on suppose que l'une des variables est représentée par un point qui décrit une courbe algébrique, plus généralement si l'on établit une relation algébrique quelconque entre les parties réelles et les parties imaginaires de toutes les variables.

La théorie des fonctions elliptiques nous avait fait déjà connaître les propriétés de la plus simple des fonctions fuchsiennes, le module de la fonction elliptique envisagé comme fonction du rapport des périodes. Cette *fonction modulaire* avait été complètement étudiée par Hermite qui avait fait connaître, en particulier, la remarquable propriété qu'elle possède, de se reproduire par des substitutions fractionnaires à coefficients entiers et au déterminant *un*. C'est cette propriété de la fonction modulaire [1] que généralise Poincaré en considérant des substitutions de même forme, mais à coefficients quelconques. La question se dédouble alors : il faut d'abord trouver tous les groupes discontinus formés de telles substitutions; il faut ensuite former les fonctions qui demeurent invariables quand on applique ces substitutions à la variable indépendante. C'est ce double problème que Poincaré résout avec une simplicité inespérée, créant ainsi une théorie qui embrasse comme cas très particulier les fonctions trigonométriques et les fonctions elliptiques. Son analyse lui permet d'énoncer les mémorables propositions suivantes qui, comme l'a dit notre confrère G. Humbert, lui donnent les clefs du monde algébrique :

Deux fonctions fuchsiennes qui se reproduisent lorsqu'on effectue sur la variable indépendante les substitutions d'un même groupe sont liées par une équation algébrique.

Inversement, les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes et, par conséquent, par des fonctions uniformes d'un même paramètre.

Voici enfin les deux théorèmes qui le conduisent au but qu'il s'était proposé : l'intégration de toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

Toute fonction fuchsienne provient de l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques.

L'intégrale générale de l'équation linéaire à coefficients algébriques d'un ordre quelconque peut être obtenue par les fonctions *zétafuchsiennes*.

---

[1] Il convient de ne pas oublier ici les recherches de M. H.-A. Schwarz sur la série hypergéométrique.

Cette dernière proposition attend aujourd'hui encore ceux qui en montreront toute la fécondité.

VI.

Les recherches précédentes suffiraient à la gloire de plusieurs géomètres, et pourtant elles ne représentent qu'une faible partie de celles que Poincaré avait produites avant d'arriver à l'Institut. Si je voulais les rappeler ici avec quelque développement, cette séance et plusieurs autres ne sauraient y suffire. Je reviendrai plus loin sur les découvertes relatives à la Physique mathématique et à la Mécanique céleste. En Analyse, je me bornerai à signaler les travaux de Poincaré sur la théorie des nombres, qui lui valurent l'honneur d'être placé sur les listes de la Section de Géométrie, alors qu'il n'avait que 27 ans; ses recherches d'Algèbre pure sur les fonctions homogènes et la règle des signes de Descartes; la démonstration, faite en collaboration avec M. Émile Picard, du célèbre théorème de Riemann sur les fonctions uniformes de n variables à $2n$ périodes; ses études sur les déterminants d'ordre infini, où il s'est rencontré avec M. Appell, sur les fonctions Θ à plusieurs variables, sur les fonctions hyperfuchsiennes introduites par M. Émile Picard, sur la réduction des intégrales abéliennes, sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, etc.; je réserverai toutefois une mention spéciale à un Mémoire qu'Hermite préférait à tous les autres, celui où Poincaré démontre que toute fonction méromorphe de deux variables s'exprime par le quotient de deux fonctions entières. Même dans ce court résumé, il faut citer le travail où il démontre ce mémorable résultat :

> Si l'on a une fonction analytique quelconque d'une variable, on peut toujours exprimer la fonction et la variable indépendante par des fonctions uniformes d'une troisième variable.

et aussi le célèbre Mémoire où il étend aux intégrales multiples la théorie des intégrales d'une fonction d'une variable imaginaire telle que Cauchy l'avait créée. La généralisation de cette théorie, qui est le fondement de l'Analyse moderne, présentait de graves difficultés devant lesquelles tous les efforts des géomètres avaient jusque-là échoué. Poincaré fut le premier à les surmonter.

Toutes ces découvertes justifiaient l'appréciation qu'en fit M. Camille Jordan, lors de la dernière candidature du jeune géomètre.

Telle est, disait notre Confrère, dans ses traits essentiels l'œuvre accomplie par M. Poincaré. Elle est au-dessus des éloges ordinaires et nous rappelle invinciblement ce que Jacobi écrivait d'Abel, qu'il avait résolu des questions qu'avant lui personne n'aurait osé imaginer. Il faut en effet le reconnaître : nous assistons en ce moment à une révolution dans les Mathématiques de tous points comparable à celle qui s'est manifestée, il y a un demi-siècle, par l'avènement des fonctions elliptiques.

VII.

Poincaré ne pouvait pas ne pas avoir conscience de la haute valeur de ses écrits; d'autres auraient réclamé des récompenses, lui ne demandait rien. Nous le regardions tous comme le plus fort d'entre nous. Il n'a jamais cherché à nous devancer. Nul ne pouvait prévoir les vides nombreux que la mort allait faire dans la Section de Géométrie. Pour le faire arriver plus vite, pour lui ménager une place dans la Section d'Astronomie, on lui signalait les applications que les théories par lui découvertes pouvaient avoir en Mécanique céleste. Il suivait docilement ces indications, s'occupait du problème des trois corps, des figures des corps célestes, et trouvait tout naturel de laisser passer devant lui tous ses anciens.

Dès 1881, au moment du décès de Michel Chasles, la Section de Géométrie l'avait fait figurer sur ses listes de présentation. Il y avait été maintenu après le décès de Victor Puiseux, d'Alfred Serret, de Bouquet. La mort prématurée de Laguerre lui ménagea une place, et il fut élu, le 24 janvier 1887, par 31 suffrages sur 55 votants. Il entrait donc à l'Institut à l'âge de 32 ans.

Ce premier succès allait être suivi d'un autre non moins éclatant.

En 1885, le roi de Suède, S. M. Oscar II, préludant à la création de ces prix internationaux dont le nombre s'accroît chaque jour, avait résolu de décerner le 21 janvier 1889, soixantième anniversaire de sa naissance, un prix à une découverte importante dans le domaine de l'Analyse mathématique. Ce prix devait consister en une médaille d'or portant l'effigie du roi et en une somme de 2500 couronnes. Une Commission, composée de notre illustre Associé étranger K. Weierstrass, membre de l'Académie de Berlin, de notre maître Charles Hermite et du rédacteur en chef des *Acta mathematica*, M. Mittag-Leffler, professeur à l'Université de Stockholm, était chargée du soin de réaliser les intentions de Sa Majesté et de dresser un programme du prix proposé. Elle indiqua quatre sujets différents entre lesquels pourraient choisir les concurrents.

Le premier de ces sujets était ainsi conçu :

Étant donné un système d'un nombre quelconque de points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, on propose, sous la supposition qu'un choc de deux points n'ait jamais lieu, de représenter les coordonnées de chaque point sous forme de séries procédant suivant quelque fonction connue du temps et qui convergent uniformément pour toute valeur réelle de la variable.

Ce problème, dont la solution étendra considérablement nos connaissances par rapport au système du monde, paraît pouvoir être résolu à l'aide des moyens analytiques que nous avons à notre disposition; on peut le supposer du moins, car Lejeune-Dirichlet a communiqué, peu de temps avant sa mort, à un géomètre de ses amis, qu'il avait découvert une méthode pour l'intégration des équations différentielles de la Mécanique, et qu'en appliquant cette méthode, il était parvenu à démontrer d'une manière absolument rigoureuse la stabilité de notre système planétaire. Malheureusement, nous ne connaissons rien sur cette méthode, si ce n'est que la théorie des oscillations infiniment petites paraît avoir servi de point de départ pour sa découverte (1). On peut pourtant supposer, presque avec certitude, que cette méthode était basée, non point sur des calculs longs et compliqués, mais sur le développement d'une idée fondamentale et simple, qu'on peut, avec raison, espérer de retrouver par un travail persévérant et approfondi (2).

(1) KUMMER, *Gedächtnissrede auf Lejeune-Dirichlet* (*Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1860, p. 35).

(2) Nous devons dire, au sujet de la seconde partie de cet énoncé, que, dans une Note communiquée le 5 avril 1888 à l'Académie de Berlin, Kronecker a présenté quelques critiques au sujet de l'appréciation qui y est donnée sur les découvertes

Dans le cas pourtant où le problème proposé ne parviendrait pas à être résolu pour l'époque du concours, on pourrait décerner le prix pour un travail dans lequel quelque autre problème de Mécanique serait traité de la manière indiquée et résolu complètement.

Les trois autres sujets proposés par la Commission étaient tous de nature à intéresser Poincaré. Le troisième, par exemple, réclamait un développement des résultats fondamentaux que nous avons rappelés plus haut et que la théorie des équations différentielles devait à Briot et Bouquet, et nous avons déjà signalé tout ce que Poincaré avait déjà fait dans cette voie; quant au quatrième, c'était l'étude d'un point particulier de cette belle théorie des fonctions fuchsiennes qu'il avait lui-même introduite dans la Science. Ces deux derniers sujets avaient donc de quoi le tenter; il choisit le premier, le plus difficile sans doute, mais aussi, mais surtout, le plus séduisant. Usant toutefois de la latitude qui lui était donnée, il élargit et restreignit à la fois le problème proposé en introduisant dans son Mémoire une étude générale des équations de la Dynamique et se bornant à approfondir le plus souvent des cas particuliers du problème des trois corps : ceux, il est vrai, qui sont les plus importants pour la pratique astronomique.

Nous reviendrons plus loin sur le contenu de son Mémoire, pour le rapprocher des autres travaux qu'on lui doit sur la Mécanique céleste; mais, dès à présent, nous devons faire connaître l'appréciation que le juge le plus difficile et le plus compétent en cette matière portait sur la pièce envoyée au Concours, dans une lettre adressée à M. Mittag-Leffler, secrétaire de la Commission (¹).

Le Mémoire *sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*

---

inédites de Dirichlet. Cette Note de Kronecker a été publiée dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin pour 1888. On pourra consulter aussi, dans le Tome XXXV des *Acta mathematica*, l'Article de M. Mittag-Leffler intitulé : *Zur Biographie von Weierstrass*. Nous n'avons pas la prétention de trancher le débat; mais il nous semble que Weierstrass, à qui l'on doit évidemment la rédaction donnée dans le texte, avait été un peu trop précis.

(¹) *Voir* l'Article cité plus haut : *Zur Biographie von Weierstrass*.

avec la devise : *Nunquam praescriptos transibunt sidera fines*, écrivait Weierstrass, est sans contredit un travail de haute portée, bien qu'il ne contienne pas la solution du problème général auquel a trait la première des questions posées, mais qu'il traite seulement un cas particulier de ce problème.

Et plus loin :

D'après cela, je ne fais aucune difficulté de déclarer que le Mémoire en question est digne du prix. Vous pouvez dire à votre souverain que ce travail ne peut, à la vérité, être considéré comme fournissant la solution complète de la question proposée, mais qu'il est cependant d'une telle importance que *sa publication ouvrira une ère nouvelle dans l'histoire de la Mécanique céleste*. Le but que se proposait Sa Majesté en ouvrant le Concours peut donc être considéré comme atteint.

En communiquant ces résultats à notre secrétaire perpétuel, Joseph Bertrand, dans une lettre datée du 18 février 1889 et insérée au Tome 108 des *Comptes rendus*, M. Mittag-Leffler ajoutait :

Le Mémoire couronné comptera parmi les plus importantes productions mathématiques du siècle et sera un nouveau titre à l'estime de tous les géomètres que M. Poincaré s'est acquise par d'éclatantes découvertes.

Nous ne saurions clore l'histoire de ce mémorable Concours sans rappeler qu'une seconde récompense, consistant en une médaille d'or avec l'inscription : *In sui memoriam*, était accordée par le Roi au Mémoire de M. Appell, intitulé : *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques*.

Ce beau et savant travail, ajoutait M. Mittag-Leffler, est l'œuvre d'un géomètre de premier ordre et fera pareillement un grand honneur à la Science française.

Sur la proposition de l'Académie, le Gouvernement soulignait le succès de notre Patrie en nommant les deux lauréats chevaliers de la Légion d'honneur.

VIII.

A partir de ce moment, le nom d'Henri Poincaré pénétra dans le grand public, qui s'accoutuma à regarder notre Confrère, non plus comme un géomètre de haute espérance, mais comme un grand savant dont la France avait le droit d'être fière. Toujours modeste cependant, Poincaré ne cessait de travailler, abordant dans sa chaire de Physique mathématique des sujets sans cesse renouvelés. Les étudiants de nos Facultés s'attachent de préférence aux professeurs dont les travaux font autorité. Non contents d'écouter les leçons de Poincaré, ses élèves voulurent qu'elles fussent utiles à d'autres et résolurent de les imprimer. C'est ainsi que parurent successivement les Ouvrages suivants :

Potentiel et mécanique des fluides, Cours professé pendant l'année 1885-1886; la deuxième édition de cet Ouvrage a été rédigée par M. *A. Guillet*.

Théorie mathématique de la lumière, Tome I, comprenant les leçons professées à la Sorbonne pendant le premier semestre 1887-1888 et rédigées par M. *J. Blondin*.

Thermodynamique, leçons professées pendant le premier semestre 1888-1889, rédigées par M. *J. Blondin*.

Électricité et Optique, Tome I : *Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière*, leçons professées pendant le second semestre 1888-1889, rédigées par M. *J. Blondin*.

Tome II : *Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz*, leçons professées pendant le second semestre 1889-1890 et rédigées par M. *B. Brunhes*.

Capillarité, leçons professées pendant le second semestre 1888-1889, et rédigées par M. *J. Blondin*.

Leçons sur la théorie de l'élasticité, professées pendant le premier semestre 1890-1891, et rédigées par MM. *E. Borel* et *Jules Drach*.

Théorie mathématique de la lumière, Tome II : *Nouvelles études sur la diffraction. Théorie de la dispersion de Helmholtz*, leçons professées pendant le premier semestre 1891-1892, rédigées par MM. *Lamotte* et D. *Hurmuzescu*.

Théorie des tourbillons, leçons professées pendant le second semestre 1891-1892 et rédigées par M. *Lamotte*.

Les Oscillations électriques, leçons professées pendant le premier semestre 1892-1893, rédigées par M. *Ch. Maurain*.

Théorie analytique de la propagation de la chaleur, leçons professées pendant le premier semestre 1893-1894, rédigées par MM. *Rouyer* et *Baire*.

Calcul des Probabilités, leçons professées à la Sorbonne pendant le second semestre 1893-1894 et rédigées par M. *A. Quiquet*.

Théorie du potentiel newtonien, leçons professées pendant le premier semestre 1894-1895, rédigées par MM. *Édouard Le Roy* et *Georges Vincent*.

Électricité et Optique. *La lumière et les théories électrodynamiques*, leçons professées en 1899 et rédigées par MM. *J. Blondin* et *E. Néculcéa*.

Il n'était pas dans la nature de l'esprit de Poincaré de faire comme beaucoup de ses collègues de la Sorbonne, et de publier lui-même ses cours en les amenant au plus haut degré de perfection. On doit donc savoir beaucoup de gré à l'*Association amicale des élèves et des anciens élèves de la Faculté des Sciences* du soin qu'elle a pris de recueillir et de publier presque toutes les leçons de notre Confrère. Elle a ainsi rendu un service inappréciable aux hautes études scientifiques. Poincaré corrigeait, sans doute, les épreuves de ces publications. En tout cas, il ajoutait fréquemment des préfaces pleines de sens et d'esprit, qui mériteront d'être toujours lues.

L'une d'elles pourtant, celle qu'il plaça en tête des deux Volumes intitulés *Électricité et Optique*, lui valut de bien vives critiques de la part de notre maître commun, Joseph Bertrand. Poincaré, en parlant de l'œuvre géniale de Maxwell, y avait émis quelques appréciations qui se trouvaient en contradiction complète avec les idées les plus enracinées, si j'ose dire, de Bertrand. Abordant la grande question des explications mécaniques de l'Univers, il affirmait, en s'appuyant sur des considérations qui, je l'avoue, me paraissent bien fragiles, que, si un phénomène comporte une explication mécanique, il en admettra une infinité d'autres, rendant également bien compte de toutes les particularités relevées par l'expérience.

Entre toutes ces explications possibles, disait-il, comment faire un choix pour lequel le secours de l'expérience nous fait défaut? Un jour viendra peut-être où les physiciens se désintéresseront de ces questions, inaccessibles aux méthodes positives, et les abandonneront aux métaphysiciens. Ce jour n'est pas venu; l'homme ne se résigne pas si aisément à ignorer éternellement le fond des choses.

Bertrand était de ceux qui ne se résignent pas.

Puisque je viens de parler de Bertrand, je dois signaler un volume de Poincaré, qui a dû, par contre, lui faire grand plaisir. Ce sont les *Leçons sur le Calcul des probabilités*, dont une seconde édition a paru, il y a deux ans, revue et augmentée par l'Auteur. Ce Traité de Poincaré ne me paraît pas avoir été estimé à toute sa valeur. J'en suis assuré, il figurera dignement à côté des chefs-d'œuvre de Laplace et de Bertrand. J'y signalerai particulièrement une introduction très fine sur les lois et la définition du hasard, des Chapitres sur la probabilité du continu, où Poincaré éclaircit un paradoxe célèbre proposé par Bertrand; ceux aussi qu'il a consacrés à la théorie des erreurs et à la loi célèbre de Gauss. Bertrand s'était borné à critiquer et à démolir. Poincaré a commencé à reconstruire.

IX.

On se ferait une idée bien incomplète de l'activité de notre Confrère pendant cette période de sa vie si on la limitait aux cours précédents, auxquels il faut joindre ceux qu'il a professés à l'École Polytechnique, de 1904 à 1908, et ceux qu'il a donnés à l'École professionnelle des Postes et Télégraphes, de 1904 à 1910. Nous entendons fréquemment, avec quelque impatience, émettre des appréciations inexactes sur nos cours de la Sorbonne, et en général sur ceux de nos Universités. Dans les Universités, nous dit-on, on enseigne la science toute faite; c'est ailleurs, au Collège de France, au Muséum, que l'on enseigne la science qui se fait. En admettant que cette démarcation entre la science qui se fait et celle qui est faite n'ait pas quelque chose de puéril, rien n'est moins juste que cette opinion, surtout si on la prend dans son sens le plus littéral. Les cours de nos Universités embrassent toute la science, celle qui est faite et celle qui se fait. Poincaré, comme d'autres professeurs que je pourrais citer, ne négligeait certes pas les travaux déjà publiés qui se rapportaient au sujet de ses leçons. Mais ses cours étaient originaux et contenaient toujours une bonne part de ses découvertes personnelles. Et celles de ces découvertes qui ne pouvaient entrer dans son enseignement de Physique mathématique, il les a exposées dans des Mémoires originaux qui ne le cèdent en rien à ses plus beaux écrits de Mathématiques pures.

Pourquoi d'ailleurs insister sur cette distinction entre la Physique mathématique et les Mathématiques pures? Les plus grands succès des mathématiciens dans leur domaine propre ne sont-ils pas dus à leur étude des problèmes que leur propose l'expérience ? Il convient de rappeler ici les paroles de l'un de mes illustres prédécesseurs :

> L'étude approfondie de la nature, a dit Joseph Fourier, est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement, cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue; elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même et d'en découvrir les éléments qu'il importe le plus de connaître et que cette science doit toujours conserver. Ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.

Le développement de l'Analyse moderne a confirmé et mis dans tout leur jour ces idées pénétrantes de Fourier. Le plus illustre émule de Cauchy, Bernhard Riemann, lorsqu'il a voulu pénétrer la nature et les propriétés des fonctions algébriques, a emprunté à la Physique mathématique un postulat auquel on peut donner la forme suivante : *Étant donnée une plaque plane homogène, il est toujours possible de trouver pour elle un équilibre de température dans lequel chaque point du contour de la plaque prend une température donnée* a priori.

Pour établir cette proposition, qu'un physicien pourrait être tenté de vérifier par l'expérience, Riemann s'était contenté d'un raisonnement que Gauss avait employé autrefois, que Dirichlet avait admis; c'est pour cela que Riemann donne à son postulat le nom de *principe de Dirichlet*. Mais l'exactitude de sa démonstration, qui devait être complétée plus tard par M. Hilbert, fut contestée par plusieurs géomètres, au nombre desquels il faut compter Weierstrass. Les résultats obtenus par Riemann étaient d'une telle importance que l'on dut s'empresser de chercher une démonstration irréprochable du principe sur lequel il s'appuyait. Les recherches des géomètres n'ont pas été infructueuses, et l'on peut, aujourd'hui, faire le cours le plus intéressant en exposant seulement les diverses démonstrations qui ont été données du principe de Dirichlet. Dans le développement de cette belle question, les travaux de Poincaré tiendront une place des plus importantes. Non seulement, en inventant sa méthode *du balayage*, il a donné une démonstration tout à fait originale du principe de Dirichlet; mais encore il a fait une application des plus intéressantes de ce principe, convenablement élargi, en démontrant, comme nous l'avons rappelé plus haut, que si l'on a une fonction analytique quelconque, la fonction et la variable dont elle dépend peuvent être exprimées par des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire.

Je viens de parler du principe de Dirichlet; dans ses études d'intérêt fondamental, notre confrère Émile Picard a su l'étendre à des classes entières d'équations, qui apparaissent dans quelques-uns des problèmes les plus essentiels de l'Analyse et de la Physique mathématique. Ici encore, comme dans bien d'autres circonstances, ses travaux se sont trouvés en contact avec ceux d'Henri Poincaré. L'importance du sujet m'engage à entrer dans quelques détails.

Lorsque Lagrange, à l'âge de 18 ans, inventait le Calcul des Variations, il préparait aux géomètres une série de problèmes qui devaient, comme ceux de la Physique mathématique, contribuer puissamment au développement de l'Analyse elle-même. Les deux plus simples de ces problèmes, ceux qui se présentaient immédiatement à l'esprit, étaient la détermination du plus court chemin reliant deux points sur une surface et celle de la surface d'aire minima passant par un contour donné. Ces deux belles questions, je n'ai pas besoin de le rappeler, ont donné naissance à des recherches de la plus haute signification. Bornons-nous à la seconde, qui seule nous intéresse ici. On sait déterminer en bloc toutes les surfaces d'aire minima; mais, si l'on veut obtenir en particulier celle d'entre elles qui passe par un contour donné, on se heurte à des difficultés qui n'ont pu être levées jusqu'ici que dans des cas très spéciaux. Supposons pourtant que ces difficultés aient été surmontées et que l'on connaisse la surface minima passant par le contour donné. Pour résoudre le problème posé par Lagrange, il faudra rechercher si la surface obtenue a une aire réellement plus petite que toute autre surface infiniment voisine passant par le même contour. Pour les lignes géodésiques, le problème correspondant avait été résolu par Jacobi; mais, pour les surfaces minima, c'est M. H.-A. Schwarz qui, en 1885, dans un admirable Mémoire, digne hommage offert à Weierstrass à l'occasion de son 70e anniversaire, l'a, le premier, abordé et résolu.

Quand elles sont posées par la nature des choses, les questions les plus diverses en apparence se trouvent liées souvent par des rapports étroits. En même temps que le problème qu'il s'était proposé, M. Schwarz avait implicitement résolu le suivant : Une membrane, tendue sur une courbe plane, se met à vibrer : déterminer le son fondamental, c'est-à-dire celui qui se produit lorsque la membrane vibrante ne présente ni nœud, ni ligne nodale. M. Émile Picard, qui s'occupait depuis longtemps, nous l'avons déjà dit, de toutes les équations de la Physique mathématique, montra comment on pouvait déterminer le premier harmonique de la membrane, celui qui suit le son fondamental. Poincaré, dans des travaux qui eurent pour couronnement un grand Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique*, inséré en 1894 aux *Rendiconti* de Palerme, entra à son tour dans la lice et détermina, par une analyse de grande portée, tous les sons que peut rendre la membrane. Son Mémoire est, au jugement de tous, un des plus beaux qu'il ait écrits. Si on le rapproche de celui qu'il publia l'année suivante dans les *Acta mathematica* (*La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*), on doit reconnaître que ces beaux travaux ont préparé la mémorable découverte de M. Fredholm, relative aux équations intégrales, en démontrant l'avantage qu'il y a à introduire un paramètre λ par rapport auquel la solution peut s'exprimer par une fonction méromorphe, en mettant en évidence le rôle des fonctions dites *fondamentales*, en permettant pour la première fois le calcul complet de la hauteur des différents sons émis par une membrane. Notre Confrère a fait connaître aussi plusieurs solutions nouvelles du problème de Dirichlet; il a, le premier, montré la généralité et la véritable signification de la méthode de Neumann. J'ajoute que, dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, il a appliqué cette méthode de Neumann au problème de l'équilibre d'un corps élastique et indiqué comment on pourrait obtenir ainsi une solution complète de ce problème.

X.

Les travaux précédents, d'autres encore que je laisse de côté, appartiennent à cette partie de la Physique mathématique où le géomètre emprunte au physicien proprement dit des principes, considérés comme rigoureusement vrais, pour en faire les applications que lui suggère son imagination. Cette branche de la Physique mathématique n'est pas très en honneur auprès de certains physiciens de laboratoire.

Je me souviens qu'il y a bien longtemps, l'un d'eux m'interrogeant sur mes travaux, je lui répondis que j'étudiais la belle solution donnée par Lamé pour le problème de la distribution de la chaleur à l'intérieur d'un ellipsoïde. « Eh quoi! me dit-il, vous vous imaginez que, nous autres physiciens, s'il nous prend envie de vérifier les lois de la propagation de la chaleur, nous allons nous amuser à prendre un corps aussi compliqué que votre ellipsoïde. Nous nous en garderons bien. Une bonne plaque parallélépipédique fera bien mieux notre affaire, et nous permettra de nous passer de tous vos calculs. » Je gardai le silence; j'aurais pu toutefois lui répondre qu'il serait peut-être, à l'avenir, conduit à construire un appareil délicat de Physique dans lequel figurerait un ellipsoïde dont les diverses parties seraient à des températures différentes. J'aurais pu lui rappeler aussi l'argument classique tiré de la théorie des sections coniques, qui ont été étudiées pendant tant de siècles pour l'amour de l'art, avant d'intervenir dans les lois de Képler.

Le physicien, dont je viens de parler, était pourtant un excellent esprit qui, dans tous ses travaux, a fait l'usage le plus habile des méthodes géométriques. Il comprenait mieux que personne l'utilité qu'il y a pour l'expérimentateur à avoir auprès de lui un mathématicien, un conseiller discret, pour l'aider à interpréter ses expériences et à démêler les résultats, souvent très complexes, qu'elles fournissent.

Jamais ce rôle de conseiller et de critique n'a pu être plus utile qu'en ce moment où la Physique expérimentale traverse une crise profonde dans laquelle viennent sombrer les principes qui paraissaient le mieux établis. Nous sommes loin des atomes insécables d'Épicure et de Lucrèce: et nos théories modernes n'ont rien trouvé de mieux que de faire de l'atome un univers semblable à celui qui a été décrit par Newton (1). Dans cette période de transition, gardons-nous d'être trop exigeants. Sans aller peut-être aussi loin que Poincaré, qui considérait les hypothèses comme des outils et admettait volontiers des théories contradictoires, ne renouvelons pas l'erreur qu'ont commise quelques-uns de nos grands chimistes, en rejetant, sous prétexte qu'elle contenait des lacunes,

---

(1) Ces théories nous rappellent invinciblement le célèbre passage des *Pensées* de Pascal : Qu'est-ce qu'un homme dans l'infini ? Mais, pour lui présenter un autre prodige aussi étonnant, qu'il recherche dans ce qu'il connaît les choses les plus délicates. Qu'un ciron lui offre, dans la petitesse de son corps, des parties incomparablement plus petites, des jambes avec des jointures, des veines dans ces jambes, du sang dans ces veines, des humeurs dans ce sang, des gouttes dans ces humeurs, des vapeurs dans ces gouttes; que, divisant encore ces dernières choses, il épuise ses forces en ces conceptions, et que le dernier objet où il peut arriver soit maintenant celui de notre discours; il pensera peut-être que c'est là l'extrême petitesse de la nature. Je veux lui faire voir là-dedans un abîme nouveau. Je lui veux peindre, non seulement l'univers visible, mais l'immensité qu'on peut concevoir de la nature, dans l'enceinte de ce raccourci d'atome. Qu'il y voie une infinité d'univers, dont chacun a son firmament, ses planètes, sa terre, en la même proportion que le monde visible; dans cette terre, des animaux, et enfin des cirons, dans lesquels il retrouvera ce que les premiers ont donné; et trouvant encore dans les autres la même chose, sans fin et sans repos; qu'il se perde dans ces merveilles, aussi étonnantes dans leur petitesse que les autres par leur étendue; car qui n'admirera que notre corps, qui tantôt n'était pas perceptible dans l'univers, imperceptible lui-même dans le sein du tout, soit à présent un colosse, un monde, ou plutôt un tout, à l'égard du néant où l'on ne peut arriver.

cette théorie atomique qui a transformé la Chimie moderne. Voilà une faute que Poincaré n'aurait jamais commise; car nul, à ma connaissance, n'a eu plus d'ouverture d'esprit, plus de propension à accueillir et à discuter les idées nouvelles, plus de désir de mettre en évidence la part qu'elles contiennent de vérité, le rôle utile qu'elles peuvent jouer dans le développement de nos connaissances. C'est ce que va montrer d'ailleurs une revision rapide de ses principaux travaux.

Ses cours d'abord : *Électricité et Optique*, les *Oscillations électriques* et les autres Volumes, contiennent la discussion et la mise au point des théories de Maxwell, de Hertz, de Larmor, de Lorentz. Dans la *Thermodynamique*, il donne deux démonstrations différentes du théorème de Clausius, relatif aux cycles non réversibles, dont la généralité était alors contestée par Joseph Bertrand. On doit signaler aussi, dans la *Théorie de la propagation de la Chaleur*, plusieurs méthodes nouvelles pour les développements en séries de fonctions fondamentales.

Dans un de ses plus beaux Mémoires, inséré aux *Acta mathematica*, sur la polarisation par diffraction, Poincaré interprète certaines expériences de notre Confrère, M. Gouy. La théorie de Fresnel est, comme on sait, purement géométrique; je veux dire que, si elle était rigoureuse, la nature des parois et même l'épaisseur des écrans ne devraient exercer aucune influence sur les phénomènes. Les expériences de notre Confrère avaient montré qu'il n'en était pas toujours ainsi. Poincaré donne l'explication des faits observés par M. Gouy et montre combien, dans certains cas, la théorie de Fresnel devient insuffisante. M. Sommerfeld a repris depuis la méthode d'Henri Poincaré pour étudier tous les cas intermédiaires entre les deux extrêmes : celui de Fresnel, qui est le plus ordinaire, et celui de M. Gouy.

Il y a lieu de rappeler aussi les travaux sur les *Ondes hertziennes* que Poincaré a publiés dans les *Archives de Genève*. On avait d'abord comparé les ondes hertziennes aux ondes sonores ou lumineuses qui ne sont pas amorties. Les prévisions auxquelles on a été ainsi conduit n'ont pas été confirmées par l'expérience, et ces contradictions ont paru un moment fort embarrassantes. Signalons, par exemple, le phénomène de la résonance multiple, découvert par MM. Sarazin et de la Rive. Poincaré, le premier, a montré que ces contradictions s'expliquaient par l'amortissement des ondes. Le rôle de cet amortissement est d'ailleurs capital dans la théorie de la télégraphie sans fil.

Citons encore, à propos des ondes hertziennes, une Note des *Comptes rendus* où, l'un des premiers tout au moins, notre Confrère a introduit la notion du *potentiel retardé*.

Les Conférences qu'il a données à l'École de Télégraphie nous montrent également combien il se tenait près de l'expérience, et quels services il a rendus aux praticiens.

L'équation, dite *des télégraphistes*, nous fait connaître, comme on sait, les lois de la propagation d'une perturbation électrique dans un fil. Poincaré intègre cette équation par une méthode générale qui peut s'appliquer à un grand nombre de questions analogues. Le résultat varie suivant la nature du récepteur placé sur la ligne, ce qui se traduit mathématiquement par un changement dans les équations aux limites, mais la même méthode permet de traiter tous les cas.

Dans une seconde série de Conférences, Poincaré a étudié le récepteur téléphonique : un point qu'il a mis particulièrement en évidence, c'est le rôle des courants de Foucault dans la masse de l'aimant.

Enfin, dans une troisième série de Conférences, il a traité les diverses questions mathématiques relatives à la télégraphie sans fil : émission, champ en un point éloigné ou rapproché, diffraction, réception, résonance, ondes dirigées, ondes entretenues [1].

Le cours que notre Confrère avait fait en 1893 sur la théorie cinétique des gaz n'a pas été publié ; mais il a écrit, dans la *Revue générale des Sciences* du regretté Louis Olivier et dans le *Journal de Physique*, plusieurs Articles de haut intérêt sur ce sujet. Il y examine et y réfute certaines objections que Lord Kelvin avait faites au théorème de Boltzmann-Maxwell et cherche à concilier cette théorie avec l'irréversibilité des phénomènes, ce qui est la grande difficulté. Pour éclaircir la question, il examine ce qui se passe dans différentes hypothèses plus ou moins

---

[1] Ces Conférences ont été publiées dans la collection des cours de l'École et dans la revue *L'Éclairage électrique*.

éloignées du cas de la nature, telles que le serait un gaz à une dimension, ou un gaz très raréfié.

Dans un Mémoire *Sur la théorie de Lorentz et le principe de réaction* [1], Poincaré eut à examiner diverses conséquences de cette théorie; il a montré qu'elle est incompatible avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, et comment il conviendrait de modifier ce principe pour le mettre d'accord avec cette théorie. Ce résultat a servi de point de départ à M. Abraham pour le calcul par lequel il a démontré que la masse des électrons est d'origine électrodynamique et que leur masse transversale diffère de leur masse longitudinale.

Il a également publié, dans les *Rendiconti* de Palerme, un Mémoire *Sur la dynamique de l'électron*, où il a réussi à donner à la théorie de Lorentz une parfaite cohérence, en écartant les dernières difficultés.

Dans quelques Articles insérés à l'*Éclairage électrique*, notre Confrère a abordé diverses questions d'Électrotechnique; il a mis en évidence le rôle des contacts glissants dans les phénomènes dits « d'induction unipolaire », sur lesquels les techniciens discutaient à perte de vue; il a montré que la théorie ordinaire de la Commutation était inexacte; d'un autre côté, il a établi rigoureusement, et d'une manière générale, l'impossibilité d'une machine auto-excitatrice sans collecteur et sans condensateur.

J'arrête là cette énumération, quelque incomplète qu'elle puisse être; mais je ne saurais oublier que Poincaré, en même temps qu'il publiait les Mémoires originaux dont je viens de signaler les plus importants, les accompagnait de Conférences, d'Articles de vulgarisation destinés à faire connaître les conclusions de ses études. Je reviendrai plus loin sur les Conférences; mais je me reprocherais d'oublier un résultat auquel notre Confrère ajoutait quelque prix. Notre regretté Secrétaire perpétuel, Henri Becquerel, qui nous a été si prématurément enlevé, se plaisait à répéter que, s'il avait entrepris les travaux qui lui ont valu l'honneur d'être lauréat du prix Nobel, et qui ont ouvert aux physiciens tout un

---

[1] Ce Mémoire fait partie du *Recueil de Travaux offert à M. Lorentz à l'occasion du 25e anniversaire de son doctorat.*

ordre de recherches appelé à transformer complètement notre connaissance de la Nature, c'est à la suite de la lecture d'un Article de la *Revue générale des Sciences*, où Poincaré se demandait s'il n'y aurait pas un lien entre la phosphorescence et les rayons X et s'il ne conviendrait pas de faire des expériences sur les corps fluorescents (1).

XI.

Jusqu'à la fin de sa vie, notre Confrère a poursuivi, sans se lasser, ce rôle de directeur et de conseiller qu'il avait assumé en Physique théorique. Un de ses derniers Articles, daté de janvier 1912, est consacré à la théorie des *Quanta*, cette originale conception de M. Planck, qui nous éloigne si profondément de toutes celles auxquelles nous étions habitués. Et cependant, malgré leur nombre et leur étendue, ces recherches de Physique ne suffisaient pas à l'occuper tout entier. Elles lui laissaient des loisirs, paraît-il; car, entre temps, il publiait les travaux les plus variés sur les diverses branches de l'Analyse : par exemple, sur l'intégration algébrique des équations différentielles, sur les nombres complexes, sur la distribution des nombres premiers. Il n'a pas consacré moins de six Mémoires à ce qu'il appelait l'*Analysis situs* ou *Géométrie de situation*. C'est une branche très difficile de la science mathématique, où l'on étudie les relations qui subsistent dans une figure lorsqu'on la déforme d'une manière quelconque sans lui imposer ni déchirure ni duplicature. On sait le magnifique usage que Riemann a fait de l'*Analysis situs* dans ses travaux sur les fonctions algébriques. Poincaré, qui y avait été conduit par ses études sur l'intégration qualitative des équations différentielles,

(1) Cet Article est du 30 janvier 1896. Voici le passage auquel on fait allusion :

« Ainsi c'est le verre qui émet les rayons Rontgen et il les émet en devenant fluorescent. Ne peut-on alors se demander si tous les corps dont la fluorescence est suffisamment intense n'émettent pas, outre les rayons lumineux, des rayons X de Rontgen, *quelle que soit la cause de leur fluorescence?* Les phénomènes ne seraient plus liés à une cause électrique. Cela n'est pas probable, mais cela est possible, et sans doute assez facile à vérifier. »

lui portait, si j'ose dire, une affection particulière; elle joue d'ailleurs un grand rôle dans ses études philosophiques, comme dans un grand nombre de ses travaux mathématiques.

A ces recherches déjà si nombreuses, notre Confrère trouvait moyen d'en ajouter d'autres encore; à partir de 1890, il s'attacha aussi à reprendre et à développer les découvertes de Mécanique céleste qui lui avaient valu de si éclatants succès. C'est ainsi qu'il publia, en 1892 et 1893, les deux premiers Volumes de son grand Ouvrage : *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Lorsque la mort prématurée de notre ami commun, Félix Tisserand, laissa vacante en 1896 la Chaire d'*Astronomie mathématique* à la Sorbonne, j'avais l'honneur d'être doyen de la Faculté des Sciences. Au nom de tous mes collègues, je demandai à Poincaré de laisser sa Chaire de Physique mathématique à notre Confrère Boussinesq, qui devait l'occuper avec éclat, et de prendre celle de Tisserand, pour laquelle nous n'avions personne qui pût lui être comparé. Il consentit sans se faire prier. Je l'ai dit ailleurs, et je suis heureux de le redire ici, avec lui, on n'avait jamais de difficulté. Je n'ai jamais reçu de lui ni plainte, ni réclamation d'aucune sorte; s'il s'agissait de rendre service à un collègue, il était toujours prêt. Dans sa nouvelle Chaire, il acheva son grand Ouvrage sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, dont il publia le troisième Volume en 1899. Mais il en avait déjà commencé un autre, plus pratique : les *Leçons de Mécanique céleste*, en trois Volumes, qui parurent de 1905 à 1910. Enfin, il laissa publier par ses élèves deux Cours de haut intérêt : l'un, *Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide*; l'autre, *Sur les hypothèses cosmogoniques*. Il faut que nous disions quelques mots de chacun de ces Volumes.

Les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* sont le développement du Mémoire couronné de 1889. Suivant le jugement que nous avons déjà rapporté de Weierstrass, cet Ouvrage ouvre une ère nouvelle dans la Mécanique céleste. Il mérite d'être placé à côté de la *Précession des Équinoxes* de d'Alembert, de la *Mécanique céleste* de Laplace. On ne pourrait en faire l'analyse détaillée que devant des hommes du métier. Je vais pourtant essayer d'indiquer quelles armes nouvelles Poincaré a forgées pour les géomètres.

Jacobi, suivant la voie ouverte en Mécanique analytique par Lagrange, dont on ne louera jamais assez les immortels travaux, avait constitué une théorie qui paraissait un des Chapitres les plus achevés de la Dynamique. Pendant 50 ans, nous avons vécu sur les théorèmes de l'illustre géomètre allemand, en les appliquant et les étudiant sous toutes leurs faces, mais sans rien leur ajouter d'essentiel. C'est Poincaré qui, le premier, a brisé ces cadres rigides dans lesquels la théorie paraissait enfermée et lui a ménagé des échappées de vue, de nouvelles fenêtres sur le monde extérieur. Il introduit ou utilise, dans l'étude des problèmes de Dynamique, différentes notions : l'une, qui avait été donnée antérieurement et qui, d'ailleurs, ne s'applique pas seulement à la Mécanique, celle des *équations aux variations*, c'est-à-dire des équations différentielles linéaires qui déterminent les solutions du problème infiniment voisines d'une solution donnée; l'autre, celle des *invariants intégraux*, qui lui appartient entièrement et joue dans ces recherches un rôle capital [1]. A ces notions fondamentales viennent s'en ajouter d'autres, notamment celles qui concernent les solutions, dites « périodiques », pour lesquelles les corps dont on étudie le mouvement reprennent, au bout d'un certain temps, leurs positions et leurs vitesses relatives.

> Ce qui nous rend ces solutions si précieuses, nous dit Poincaré, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

Lagrange nous avait déjà fait connaître, pour le problème des trois corps, une solution de ce genre, dans laquelle le triangle formé par les trois corps demeure toujours semblable à lui-même, et cette solution avait été étudiée par Laplace au Livre X de la *Mécanique céleste*. Un astronome américain de grande valeur, M. Hill, en avait signalé une autre qui a une plus grande importance pratique, puisqu'elle s'applique au système formé par le Soleil, la Terre et la Lune [2]. Poincaré démontre

---

(1) Liouville et Boltzmann avaient déjà reconnu l'existence d'un invariant intégral particulier, mais sans s'élever à aucune théorie générale.

(2) *American Journal of Mathematics*, t. I.

l'existence de trois sortes différentes de solutions périodiques qui lui servent, en quelque sorte, de levier pour l'étude approfondie du problème. Il y a là quelque chose d'analogue à la célèbre méthode de variation des constantes. Seulement ici, au lieu d'opérer sur des constantes, ce sont des solutions particulières que l'on prend comme point de départ.

Parmi les propositions obtenues par Poincaré, il convient d'en signaler une qui mettra fin à des tentatives sans cesse répétées : *il n'existe pour le problème des trois corps aucune autre intégrale analytique que celles, au nombre de* 10, *qui, dès le début, ont été obtenues par les géomètres.*

XII.

Dans l'Introduction de l'Ouvrage que nous venons d'analyser, Poincaré avait admirablement défini le but qu'il voulait atteindre :

Le véritable but de la Mécanique céleste, nous dit-il, n'est pas de calculer les éphémérides, car on pourrait alors se contenter d'une prévision à brève échéance, mais de reconnaître si la loi de Newton est suffisante pour expliquer tous les phénomènes.

Dans son second Ouvrage, les *Leçons de Mécanique céleste*, il se rapproche du point de vue qui convient à l'astronome praticien. Ces *Leçons* ne sont autre chose que le développement, rédigé par lui-même pour les deux premiers Volumes, de ses cours de la Sorbonne. On y remarquera surtout un exposé magistral de la théorie des perturbations et des recherches les plus modernes relatives au mouvement, si difficile à discipliner, de notre satellite. J'insisterai plus particulièrement sur le Tome III, qui a été rédigé par M. E. Fichot, ingénieur hydrographe de la Marine, et qui est consacré tout entier à la théorie si difficile des marées. Poincaré la reprend par des méthodes nouvelles; il compare ses résultats aux observations et termine par un Chapitre très original où il étudie, après G. Darwin, l'influence des marées sur le sens et la durée de rotation des corps célestes. Cette discussion est de grande conséquence, notamment dans l'examen de certaines parties de la célèbre hypothèse cosmogonique de Laplace. On a aussi à tenir compte des indications qu'elle fournit, si l'on veut étudier l'importante question de la stabilité du système solaire. Lagrange, Laplace, Poisson avaient envisagé ce problème en purs mathématiciens : ils supposaient que les astres fussent réduits à des points, se déplaçant dans un milieu vide de toute matière. Poincaré, qui comprenait mieux que personne l'intérêt philosophique de cette belle recherche, s'en est occupé toute sa vie; mais il a reconnu que, pour résoudre le problème de la stabilité, tel que l'Univers nous le présente, il faut se placer au point de vue du physicien et tenir compte de bien des éléments qu'avaient négligés les géomètres. Dans cette discussion, Delaunay l'a montré le premier, l'influence des marées produites par les actions mutuelles des corps célestes joue un rôle prépondérant. On pourra lire là-dessus une Notice des plus intéressantes, insérée en 1898 par notre Confrère dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

Ce travail sur les marées me suggère une remarque singulière, qui mettra toutefois en évidence l'universalité des aptitudes de notre Confrère. Notre division mathématique comprend, comme vous le savez, cinq sections : Géométrie, Mécanique, Astronomie, Physique, Géographie et Navigation. Il avait auparavant tous les titres pour figurer dans les quatre premières. Son travail sur les marées venait lui donner des droits à entrer dans la cinquième.

XIII.

Les leçons sur *les figures d'équilibre d'une masse fluide*, que Poincaré a professées en 1900 et qui ont été rédigées par M. L. Dreyfus, contiennent l'exposé des recherches qu'il avait commencées quinze ans auparavant sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe, et dont les molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. Parmi toutes les découvertes de Poincaré, celles qui se rapportent à cette belle question sont peut-être les plus populaires. Elles l'ont conduit, en effet, à des résultats précis, définitifs, bien propres à exciter l'admiration de tous ceux, et ils sont nombreux, qui s'intéressent à l'Astronomie.

Le problème était posé depuis Newton. On est conduit à en chercher la solution lorsqu'on veut déterminer la forme des planètes, en admettant, comme on peut le supposer, qu'elles aient été fluides primitivement. Maclaurin avait montré, comme on sait, qu'une masse fluide homogène peut rester en équilibre si sa forme est celle d'un ellipsoïde de révolution; et ce résultat avait été complété par Clairaut, puis par d'Alembert et Laplace, qui montrèrent qu'à toute vitesse de rotation, pourvu qu'elle ne dépasse pas une certaine limite, correspondent deux ellipsoïdes de cette nature, et deux seulement. Lagrange, dans sa *Mécanique analytique*, commence cette recherche en supposant que la forme d'équilibre soit celle d'un ellipsoïde à trois axes inégaux ; mais au cours de son analyse, un raisonnement, dont il a dû lui-même reconnaître l'insuffisance, le conduit à se restreindre au cas où l'ellipsoïde est de révolution.

Un de ses continuateurs, M. de Pontécoulant, en reprenant, dans son *Exposition du Système du monde*, l'analyse de Lagrange, avait précisé beaucoup trop et déclaré nettement que l'ellipsoïde doit être *nécessairement* de révolution. Cette affirmation trop tranchante éveilla l'attention de l'illustre Jacobi. Celui-ci, qui était animé de l'esprit de contradiction si utile aux chercheurs, voulut étudier l'hypothèse écartée et constata, à son grand étonnement, que l'ellipsoïde à trois axes inégaux pouvait donner une solution du problème étudié.

Pendant longtemps, nos connaissances sur ce sujet se bornèrent à celle des deux figures ellipsoïdales dont nous venons de parler, sans qu'on sût rien d'ailleurs sur les conditions de stabilité de ces ellipsoïdes. On ignorait s'il y avait d'autres formes possibles, lorsque M. Mathiessen en 1859 et, plus tard, MM. Thomson et Tait, dans la deuxième édition de leur *Traité de Philosophie naturelle*, indiquèrent qu'aux figures déjà connues on pouvait en ajouter de nouvelles, d'une forme analogue à celle d'un tore.

Tel était l'état de la question lorsque Poincaré s'en occupa en 1885 pour lui faire faire un progrès décisif. Sa méthode et ses résultats sont d'une extrême élégance. Voici comment il les a résumés lui-même [1] :

---

[1] La citation qui suit est empruntée à l'Ouvrage posthume qui a été publié cette année même par les soins de notre savant Correspondant, M. Mittag-Leffler, et qui

On reconnaît d'abord que les diverses figures d'équilibre d'une masse fluide forment des séries linéaires; dans une même série, ces figures dépendent d'un paramètre variable. Telles sont la série des ellipsoïdes de révolution et celle des ellipsoïdes de Jacobi. Mais il peut arriver qu'une même figure appartienne à la fois à deux séries différentes. C'est alors une *figure d'équilibre de bifurcation*.

A chaque figure est attachée une suite infinie de coefficients que j'appelle *coefficients de stabilité*, parce que la condition de la stabilité, c'est qu'ils soient tous positifs. Quand un de ces coefficients s'annule, c'est que la figure correspondante est de bifurcation.

Ainsi, si, en suivant une série de figures d'équilibre, on voit s'annuler un des coefficients de stabilité, on saura qu'il existe une autre série de formes d'équilibre à laquelle appartient la figure de bifurcation.

Un autre résultat, c'est que les deux séries linéaires, dont cette figure fait partie, échangent leur stabilité. Si, en suivant l'une des séries, on ne rencontre que des équilibres stables jusqu'à la figure de bifurcation, on n'y trouvera plus ensuite que des

---

est intitulé : Henri Poincaré, *Analyse de ses travaux scientifiques*. Voici quelques renseignements sur la genèse de cet Ouvrage.

La Notice que Poincaré a consacrée à Halphen, une des plus belles et des plus touchantes qu'il ait écrites, se termine par les lignes suivantes :

« Les Notices scientifiques que publient les candidats à l'Académie ne sont d'ordinaire que de sèches nomenclatures, et les Académiciens ne les lisent que par devoir. Celle d'Halphen, je ne crains pas de le dire, est écrite avec autant d'esprit que de logique, et sa lecture a été un plaisir, même pour les savants adonnés à des études très différentes. »

Ces éloges que Poincaré donne ici à Halphen sont certes bien mérités. Mais c'est à lui-même qu'il aurait dû aussi les adresser. Car c'est lui, mes souvenirs sur ce point sont bien précis, qui a pris, dès 1884, l'initiative de faire précéder la liste de ses travaux d'aperçus généraux sur leur classification et sur le but même qu'il avait voulu atteindre. L'exemple qu'il avait donné a été suivi par Halphen, et par d'autres encore.

Il y a une dizaine d'années, M. Mittag-Leffler avait eu l'idée de demander à quelques savants des Notices écrites par eux-mêmes sur leurs travaux et sur les idées générales qui les avaient guidés dans leurs recherches. Poincaré répondit à l'appel qui lui était ainsi adressé en remaniant son ancienne Notice de candidature, et c'est son manuscrit qu'a publié M. Mittag-Leffler. Ce sera un précieux document pour l'Histoire des Sciences.

figures instables. Les figures stables appartiendront à l'autre série. Ces principes, appliqués à divers problèmes traités par Laplace, m'ont permis d'en compléter la solution.

. . . .

Je ne puis mieux résumer tous ces résultats qu'en faisant l'hypothèse suivante :

Imaginons une masse fluide se contractant par refroidissement, mais assez lentement pour rester homogène et pour que la rotation soit la même dans toutes ses parties.

D'abord très voisine d'une sphère, la figure de cette masse deviendra un ellipsoïde de révolution qui s'aplatira de plus en plus, puis, à un certain moment, se transformera en un ellipsoïde à trois axes inégaux. Plus tard, la figure cessera d'être ellipsoïdale et deviendra piriforme jusqu'à ce qu'enfin la masse, se creusant de plus en plus dans sa partie médiane, se scinde en deux corps distincts et inégaux [1].

L'hypothèse précédente ne peut certainement s'appliquer au système solaire. Quelques astronomes ont pensé qu'elle pourrait être vraie pour certaines étoiles doubles et que des étoiles doubles du type de β de la Lyre présenteraient des formes de transition analogues à celles dont nous venons de parler.

Dans un de mes Mémoires, j'ai montré qu'aucune forme d'équilibre stable n'est possible si la vitesse de rotation dépasse une certaine limite.

On peut faire de ce principe une application aux anneaux de Saturne. Clerk Maxwell a démontré que ces anneaux ne peuvent être solides, et que, s'ils sont fluides, leur densité ne peut dépasser $\frac{3}{100}$ de celle de la planète. D'autre part, je démontre que, si les anneaux sont fluides, ils ne peuvent être stables que si leur densité est supérieure au $\frac{1}{16}$ de celle de Saturne. L'analyse semble donc confirmer l'hypothèse de M. Trouvelot, qui considère les anneaux comme formés d'une multitude de satellites extrêmement petits et ne croit pas pouvoir expliquer autrement certaines apparences observées.

XIV.

Pour terminer cette analyse des travaux astronomiques de Poincaré, je dois encore parler de ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* faites à la Sorbonne en 1910, recueillies par M. H. Vergne et parvenues déjà à leur seconde édition. De tout temps, l'homme s'est préoccupé de ses origines et de celles du monde où il est placé. Son besoin de savoir

[1] L'un d'eux se rapproche de plus en plus d'une sphère, l'autre s'allonge en forme de pointe.

est impérieux, et lorsqu'il ne peut parvenir à une connaissance certaine par la méthode scientifique, il s'élance en quelque sorte vers la vérité, il essaye de la deviner, il imagine des hypothèses plus ou moins plausibles pour pénétrer dans le domaine qu'il ne peut conquérir par des procédés réguliers. C'est ce qui explique le succès qu'ont toujours obtenu auprès de la foule les conjectures sur la manière dont l'Univers a été formé. Le rôle du savant, quand il aborde ce genre de considérations, consiste à examiner les théories, proposées souvent par des rêveurs ; à rechercher jusqu'à quel point elles sont d'accord avec les lois de la Mécanique générale ; à essayer, s'il se peut, de les modifier de manière à établir cet accord. Tel est le point de vue auquel se place Poincaré.

Parmi les hypothèses sans nombre qui ont été successivement présentées, il faut placer au premier rang celle que Laplace a fait connaître, dès 1796, dans l'*Exposition du Système du Monde*. Poincaré en discute tous les points avec une pénétration et une précision admirables, en s'aidant des résultats qu'il a obtenus dans la théorie des figures d'équilibre et dans celle des marées. Malgré quelques difficultés, l'hypothèse de Laplace demeure victorieuse ; elle s'imposerait même, dans ses grandes lignes tout au moins, si notre système solaire constituait à lui seul tout l'Univers. Mais depuis Laplace, nos connaissances astronomiques se sont prodigieusement agrandies. De son temps, une étoile dans le ciel n'était qu'un point sur la sphère céleste ; ses deux coordonnées, et sa parallaxe quand on pouvait la déterminer, c'est-à-dire trois constantes au plus pour chaque astre, voilà tout ce que nous donnait l'observation. C'était l'époque de l'Astronomie mathématique, qui a permis tout de même de belles découvertes et qui a pu nous renseigner notamment sur le déplacement propre de notre système solaire. Mais aujourd'hui, grâce à l'Analyse spectrale, ce ne sont plus deux ou trois constantes, c'est toute une fonction définissant le spectre de l'étoile, que nous permet d'atteindre l'observation. A côté de l'Astronomie de position est venue se placer l'Astronomie physique, qui nous donne les renseignements les plus précieux sur la constitution chimique, la composition minéralogique des étoiles et des nébuleuses ; sur les étoiles multiples, colorées et variables ; sur leur déplacement dans le ciel, sur leurs mouvements en profondeur.

Nous sommes au début seulement de ces études si attrayantes, et déjà les résultats obtenus ont suscité des hypothèses cosmogoniques, présentées par une foule de savants : Helmholtz, Lord Kelvin, Sir Norman Lockyer, Schuster, Arrhenius, Kapteyn, Sée, Schiaparelli. Toute conclusion serait prématurée, et Poincaré n'en donne aucune; mais il fallait un savant tel que lui pour suivre, avec autant de pénétration, ces discussions qui exigent la réunion des connaissances du géomètre, du physicien et même du géologue.

XV.

J'arrêterai là, mes chers Confrères, l'analyse bien sommaire que j'ai pu vous faire des travaux que Poincaré a publiés en Mathématiques pures, en Physique, en Astronomie. Ces travaux présentent une telle variété que, lorsque l'on consulte les tables de nos *Comptes rendus* pendant les trente dernières années, on est tenté de lui attribuer ceux même que son père, son oncle et son cousin présentaient en même temps que lui. Si je voulais être complet, il me resterait, après avoir essayé de vous faire connaître le savant, à vous présenter le philosophe. Mais je ne dois pas oublier que notre Confrère appartenait aussi à la première de nos Académies, que l'étendue de son œuvre mérite plus d'un commentateur, et je me suis promis de me limiter à ce qui ne peut être dit que devant notre Compagnie. Sans manquer à ce dessein, je vais vous indiquer comment il fut conduit à sa Métaphysique par les études qu'il entreprit sur la Géométrie non euclidienne, lorsqu'il eut à créer sa magistrale théorie des fonctions fuchsiennes.

Ce monument qu'on appelle les « Éléments d'Euclide », et qui a résisté au travail de tant de siècles, ne ressemblait pas à ces édifices où une simple couche de stuc recouvre et dissimule des matériaux inférieurs. Il était si bien, et je dirai si loyalement construit, que chacun pouvait l'étudier dans toutes ses parties et formuler toutes les critiques que suggérait son examen. D'Alembert se plaisait à dire que la définition de la ligne droite donnée par Euclide était l'écueil et le scandale de la Géométrie. Les plus grands géomètres se sont attaqués surtout au célèbre postulatum d'Euclide relatif à la théorie des parallèles, pour essayer de le démontrer. On n'ignore pas les tentatives infructueuses de Legendre : on connaît moins celles de Lagrange, mais Biot nous donne à leur égard le renseignement suivant (¹) :

Lagrange, dit-il, tira un jour de sa poche un papier qu'il lut à l'Académie et qui contenait une démonstration du fameux postulatum d'Euclide relatif à la théorie des parallèles. Cette démonstration reposait sur un paralogisme évident, qui parut tel à tout le monde, et probablement Lagrange le reconnut pendant sa lecture; car, lorsqu'il eut fini, il mit le papier dans sa poche et n'en parla plus. Un instant de silence universel suivit, et l'on passa à d'autres sujets.

Ce passage de Biot, un autre de Laplace dans l'*Exposition du Système du Monde*, nous montrent qu'au commencement du siècle dernier les géomètres français croyaient à la possibilité d'une démonstration du fameux postulatum d'Euclide. Il n'y avait à cette époque en Europe que l'illustre Gauss, qui fût en possession de la vérité. Ses méditations l'avaient conduit à cette conclusion qu'en supprimant le postulatum d'Euclide et conservant les autres axiomes, on est conduit à une géométrie qui peut se développer indéfiniment sans présenter de contradiction. Gauss n'a rien publié de ses idées; mais elles devaient être retrouvées d'une manière indépendante, et presque simultanément, vers 1830, par deux géomètres d'origine bien différente, le Russe Lobatschefsky et le Hongrois Bolyai. Riemann devait venir plus tard créer une géométrie nouvelle, à côté de celle d'Euclide et de Gauss. Il a eu de nombreux imitateurs, et nous comptons aujourd'hui une foule de géométries différentes, tout aussi cohérentes les unes que les autres. Ces découvertes des géomètres ont beaucoup contribué à former, je n'ose dire, à rectifier les théories des philosophes relatives à l'origine et à la formation de nos connaissances. Mais au temps de ma jeunesse, elles étaient encore combattues et contestées. Un savant modeste, Jules Hoüel, dont l'amitié m'honora et dont je conserve précieusement le souvenir, a beaucoup contribué à les faire connaître et à les répandre dans notre

(¹) BIOT, *Mélanges scientifiques et littéraires*, t. II, p. 263.

pays. D'autre part, Beltrami, qui les introduisit en Italie, où elles avaient trouvé un précurseur dans la personne de Saccheri qui vivait au XVIIIe siècle, mais où elles rencontraient beaucoup de contradicteurs, essaya de répondre aux objections en montrant une surface, la *pseudosphère*, où la Géométrie non euclidienne se trouve en quelque sorte réalisée par les propriétés des géodésiques. La réponse n'était pas topique: car la surface de Beltrami a des limites et, en Géométrie non euclidienne, le plan et la ligne droite n'en ont pas.

C'est M. Félix Klein qui fit disparaître ces objections en montrant, dans un beau Mémoire, qu'une géométrie inventée par l'illustre Cayley, et dans laquelle c'est une conique, appelée *l'absolu*, qui fournit les éléments de toutes les mesures et permet, en particulier, de définir la distance de deux points, donne la représentation la plus parfaite, la plus adéquate, de la Géométrie non euclidienne.

D'autre part, une transformation des plus simples, connue depuis 1864, permet de transformer la Géométrie de Cayley en une autre dans laquelle les lignes droites sont remplacées par des cercles normaux à une sphère fixe (1). C'est cette Géométrie qu'adopta Poincaré dans ses études philosophiques et dans ses travaux sur les fonctions fuchsiennes. Il sut lui donner la forme la plus saisissante, qu'on nous saura gré de reproduire.

Supposons, dit-il, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes :

La température n'y est pas uniforme; elle est maxima au centre et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.

Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.

---

(1) *Voir* la traduction allemande du premier Ouvrage philosophique de Poincaré : WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE. *Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von* F. *und* L. LINDEMANN. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner, 1906, p. 258 et suiv.

Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient le même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.

Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre dont la température est différente se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.

Rien, dans ces hypothèses, n'est contradictoire ou inimaginable. Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite.

Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.

Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits; de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphere limite.

Je ferai encore une autre hypothèse, je supposerai que la lumière traverse des milieux diversement réfringents, et de telle sorte que l'indice de réfraction soit inversement proportionnel à $R^2 - r^2$. Il est aisé de voir que, dans ces conditions, les rayons lumineux ne seraient pas rectilignes, mais circulaires.

Dans le milieu ainsi imaginé par Poincaré, les êtres fictifs dont il nous parle, s'ils faisaient de la géométrie, adopteraient la Géométrie non euclidienne. Les lignes droites, les rayons lumineux de la Géométrie ordinaire, seraient remplacés par des cercles orthogonaux à la sphère limite, les plans par des sphères orthogonales à cette même sphère.

Ces constatations conduisirent Poincaré à réfléchir sur les bases de la Géométrie et sur les axiomes qu'elle emploie. Pour lui, les axiomes ne sont pas autre chose que des conventions, je préférerais dire des définitions plus ou moins complètes, des éléments idéaux que notre imagination construit en s'appuyant sur l'expérience.

Les démonstrations que nous venons de rappeler montraient avec la dernière évidence qu'on peut ramener, l'une à l'autre, les deux Géométries euclidienne et non euclidienne, et qu'il ne peut se révéler dans le développement de l'une d'elles aucune contradiction qui n'existe aussi dans l'autre. Mais alors surgissait nécessairement une autre question. Puisque nous employons en géométrie des éléments qui, bien que suggérés par l'expérience, sont des créations de notre esprit, qui pourra nous assurer que nous ne sommes pas égarés et que le développement logique de nos conceptions ne finira pas par nous conduire à des résultats contradictoires. Toute difficulté à cet égard me paraît levée par le mémorable travail que M. Hilbert a consacré à l'ensemble de nos axiomes géométriques [1].

XVI.

Mes chers Confrères, l'analyse précédente, à la fois si longue et si incomplète, vous aura pourtant, je l'espère, donné une idée de l'étendue et de l'importance des travaux d'Henri Poincaré.

On peut se demander comment, dans une vie relativement si courte, il a pu écrire plus de 30 Volumes et près de 500 Mémoires, répandus dans les Recueils du monde entier. Je ne connais que Berthelot dont la production soit comparable à la sienne. J'ai vécu à côté et dans l'intimité de ces deux grands hommes. Ce qui m'a le plus frappé, c'est la prodigieuse activité de leur esprit, la rapidité de leurs conceptions. J'ai vu Poincaré à la Sorbonne, au Bureau des Longitudes, à l'Académie. Partout, quand on lui demandait de résoudre une difficulté, sa réponse partait avec la rapidité de la flèche. Lorsqu'il écrivait un Mémoire, il le rédigeait tout d'un trait, se bornant à quelques ratures, sans revenir sur ce qu'il avait écrit. Au reste, il nous a donné des renseignements, d'une valeur inappréciable pour le philosophe et le biologiste, sur la manière dont il travaillait [2]. Vous avez dû remarquer que j'ai pris plaisir à m'effacer devant lui et à multiplier les citations. Permettez-m'en une

---

(1) Poincaré fut amené en 1904 à faire un rapport sur les études de M. Hilbert, qui ont valu à ce géomètre pénétrant la médaille Lobatschefsky, décernée par la Société physico-mathématique de Kazan.

(2) M. le Dr Toulouse, qui a examiné par les méthodes de la Psychologie physiologique plusieurs hommes célèbres, Zola, Berthelot, Dalou, Rodin, Puvis de Chavannes, Saint-Saëns, Alphonse Daudet, Jules Lemaître, Pierre Loti, etc., a consacré tout un Volume en 1910 à Poincaré. *Voir* HENRI POINCARÉ, par le Dr Toulouse, Paris, E. Flammarion.

nouvelle; elle aura l'avantage de vous éclairer sur la genèse de sa plus belle découverte.

Depuis quinze jours, nous dit-il, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les *fonctions fuchsiennes*; j'étais alors fort ignorant. Tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux : j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude; je ne pus m'endormir, les idées surgissaient en foule; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique. Je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui me prit quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées *thétafuchsiennes*.

A ce moment, je quittai Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la Géométrie non euclidienne. Je ne fis pas la vérification, je n'en aurais pas eu le temps, puisque à peine dans l'omnibus je repris la conversation commencée; mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes études antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer et je pensai à autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec le même caractère de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la Géométrie non euclidienne.

Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat et j'en tirai les conséquences;

l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique, je vis que je pourrais leur appliquer la théorie des fonctions thétafuchsiennes, et que, par conséquent, il existait des fonctions thétafuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions. J'en fis un siège systématique et j'enlevai, l'un après l'autre, tous les ouvrages avancés; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire. J'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine (1).

XVII.

Comme il est naturel, tant de publications éclatantes sur tant de sujets divers avaient répandu dans le monde entier la renommée de notre Confrère. Il appartenait à divers titres à une quarantaine d'Académies ou de Sociétés savantes, françaises ou étrangères. A l'occasion de divers anniversaires, il avait reçu des diplômes de docteur des Universités de Cambridge, Christiania, Kolozsvar, Oxford, Glascow, Bruxelles, Stockholm, Berlin. La Société royale astronomique lui décerna en 1900 sa médaille d'or, qui lui fut remise en séance solennelle par le regretté Sir George Darwin, à qui ses recherches personnelles permettaient

(1) Les savants directeurs de l'*Enseignement mathématique*, MM. Laisant et Fehr, avaient eu l'idée d'ouvrir une enquête sur les habitudes d'esprit et les méthodes de travail des Mathématiciens. Poincaré répondit à leur demande en faisant, sous les auspices de l'*Institut général psychologique*, une Conférence sur l'*Invention en mathématiques*. Cette Conférence, riche d'idées fines et ingénieuses, forme le Chapitre III de l'Ouvrage qu'il a publié sous le titre : *Science et Méthode*. C'est à elle que nous avons emprunté la citation qui figure dans le texte.

d'admirer avec le plus de compétence les découvertes astronomiques de notre compatriote. Un an après, la Société royale de Londres lui décernait la médaille Sylvester. En 1904, il recevait la médaille d'or Lobatschefsky de la Société physico-mathématique de Kazan. En 1905, sur la proposition d'une Commission internationale où j'avais l'honneur de représenter notre pays, l'Académie hongroise des Sciences lui décernait le grand prix Bolyai, qu'elle avait fondé en l'honneur des deux illustres savants de ce nom, le père et le fils, et qu'elle avait à attribuer pour la première fois. La France ne restait pas en arrière. Si le peu de temps qui s'écoula entre ses débuts et son élection ne permit pas à notre Académie de lui faire parcourir toute la gamme des prix dont elle dispose, elle lui décerna cependant en 1885 le prix Poncelet et en 1896, alors qu'il nous appartenait, le prix Jean Reynaud, sur le désir exprimé par la fondatrice de ce dernier prix. Il fut nommé en 1893 membre du Bureau des Longitudes, au titre de l'Académie des Sciences. Enfin en 1908, peu après la mort de Berthelot, l'Académie française lui décerna le suprême honneur, en l'appelant à occuper le fauteuil du grand poète Sully Prudhomme. Vous vous souvenez encore des mémorables Discours qui furent prononcés ici même, le 28 janvier 1909, dans la séance où il fut reçu par M. Frédéric Masson.

XVIII.

Tous ces succès étaient des témoignages de l'admiration et de l'estime que ses confrères et ses pairs avaient pour lui; mais les Ouvrages de Philosophie qu'il publia à partir de 1902, *La Science et l'Hypothèse*, *Science et Méthode*, la *Valeur de la Science*, lui valurent une popularité que n'avaient connue ni Cauchy, ni Hermite, ni Joseph Bertrand. Tirés à un nombre prodigieux d'exemplaires, ils ont été traduits en allemand, en anglais, en espagnol, en hongrois, en suédois, en japonais. Je n'oserais affirmer qu'ils ont été pleinement compris de tous; pour saisir la pensée de leur Auteur, une forte culture scientifique est nécessaire, qui manque à plus d'un; mais l'autorité joue encore quelque rôle dans ce monde, et c'est avec un sentiment de déférence bien naturel qu'on discutait les idées et qu'on accueillait les théories d'un si grand savant.

Devenu populaire, il connut les avantages et quelques-uns des inconvénients de la popularité. La *Revue bleue*, ayant ouvert en 1904 une enquête sur la participation des savants à la politique, lui demanda son opinion sur cette question. Poincaré lui répondit par une lettre très spirituelle dont je vous demande la permission de citer la fin :

Vous me demandez si les savants politiques doivent combattre ou appuyer le bloc ministériel ? Ah ! pour le coup, je me récuse; chacun devra voter suivant sa conscience; je suppose que tous ne penseront pas sur ce point de la même manière, et vraiment je ne saurais m'en plaindre. S'il y a des savants dans la politique, il faut qu'il y en ait dans tous les partis; et, en effet, il est indispensable qu'il y en ait du côté du manche. La Science a besoin d'argent, et il ne faut pas que les gens au pouvoir puissent se dire : la Science, c'est l'ennemi ([1]).

En 1911, ce fut le journal *l'Opinion* qui sollicita son avis *sur la prépondérance politique du Midi*. Un de ses rédacteurs avait conclu que « la France est gouvernée par le Midi et qu'elle l'est de plus en plus ». Poincaré donna son opinion, le 25 mars 1911. Elle n'était pas précisément favorable aux hommes du Midi. Mais ceux-ci peuvent s'en consoler. Le Midi est si grand que chacun peut bien supposer qu'il est d'une région à laquelle ne s'appliquent pas les appréciations de notre Confrère.

Il a été appelé aussi à publier son opinion sur la *Représentation proportionnelle;* il a même écrit la préface de l'Ouvrage de M. G. Lachapelle intitulé : *La Représentation proportionnelle en France et en Belgique*. Les auteurs des Traités sur le calcul des probabilités, Bertrand entre autres, se sont beaucoup préoccupés de la question électorale, et les résultats auxquels ils sont parvenus mériteraient d'être pris en considération. Mais ce n'est pas ici qu'il convient de les discuter.

Cette popularité, cette autorité qu'il s'était si légitimement acquises, le faisaient rechercher de tous côtés. En 1903, appelé à présider le XIX^{e} banquet de l'Association générale des Étudiants, il prononça une

([1]) *Revue bleue*, 1904, p. 708.

belle Allocution sur la vérité scientifique et la vérité morale, engageant ses auditeurs à les unir dans un même culte. L'œuvre de *Foi et Vie* ne fit pas en vain appel à son concours; Poincaré lui donna en 1910 une Conférence sur les bases de la morale, intitulée : *La Morale et la Science* et, en mars 1912, une autre sur un sujet moins troublant : *Les conceptions nouvelles de la matière*.

En 1911, notre confrère Richepin eut l'idée de fonder une *Ligue pour la Culture française*. Parmi les adhésions qu'il reçut dans notre Académie, il faut signaler celle de Poincaré; notre Confrère ne se contenta pas de faire partie de la Ligue, il écrivit aussi un petit Traité populaire pour défendre la culture littéraire et l'éducation classique (¹).

XIX.

Tous ces concours auxquels il ne se refusait pas ne l'empêchaient pas de poursuivre ce qu'il considérait comme sa tâche essentielle et de répandre ses idées et ses découvertes relatives à ses études de prédilection. En 1900, à l'Exposition universelle, il fit trois Conférences dans l'espace d'une quinzaine : l'une, le 11 août 1900, *Sur le rôle de l'intuition et de la logique en Mathématiques*, devant le Congrès international des Mathématiciens, dont il avait été élu président; l'autre, *Sur les principes de la Mécanique*, au Congrès international de Philosophie; la troisième enfin, *Sur les rapports de la Physique expérimentale et de la Physique mathématique*, au Congrès international de Physique, qui se tenait à la même époque.

Mais, de tous les appels que recevait Poincaré, les plus agréables sans aucun doute étaient ceux qui lui venaient de l'étranger. En 1903, Newcomb, notre illustre Associé étranger, se rendit à Paris pour inviter, au nom du Gouvernement américain, les Savants français à participer au Congrès international d'Art et de Science, organisé sur le modèle de l'Institut de France; ce Congrès devait se tenir à Saint-Louis, l'année

(¹) H. POINCARÉ, *Les Sciences et les Humanités*, Paris, A. Fayard, 1911.

suivante, pendant la durée de l'Exposition universelle destinée à célébrer le centenaire de la réunion de la Louisiane aux États-Unis. Plusieurs d'entre nous acceptèrent l'invitation qui leur était faite d'une manière si gracieuse. Poincaré fut du nombre et profita de l'occasion qui lui était offerte pour visiter les différentes régions des États-Unis. La Conférence qu'il lut, le 24 septembre 1904, devant le Congrès, avait pour titre : *L'État actuel et l'avenir de la Physique mathématique*.

En 1909, sur l'invitation de la Commission qui régit la fondation Wolfskehl de la Société royale des Sciences de Gœttingue, il allait donner six Conférences devant les professeurs et les étudiants de la glorieuse Université de cette ville. Les cinq premières ont été faites en allemand sur des sujets techniques. Quant à la sixième, elle avait pour objet : *La nouvelle Mécanique*, je veux dire celle de Lorentz, et non celle des *Quanta*. Pour mieux exprimer sa pensée, il préféra la faire en français.

Dans cette même année 1909, il fut délégué par l'Université de Paris aux fêtes organisées par l'Université libre de Bruxelles pour le 75e anniversaire de sa fondation. L'accueil qu'il y reçut fut particulièrement chaleureux. On lui demanda de faire une Conférence; il choisit comme sujet : *Le libre Examen en matière scientifique* (1).

Il fut de même, en octobre 1910, le délégué de l'Université de Paris aux fêtes du Centenaire de l'Université de Berlin, qui saisit cette occasion de le nommer docteur *honoris causâ* en Médecine et Chirurgie. Il y lut, à la *Réunion mathématique* de l'Université, une Conférence sur *la théorie des ondes hertziennes*.

La dernière année de sa vie fut particulièrement chargée sous ce rapport. En mai 1912, il allait faire à la jeune Université de Londres plusieurs Conférences sur *la théorie du rayonnement*, qui l'a intéressé jusqu'à son dernier jour, sur *la logique de l'infini*, sur *l'espace et le temps*. Quelques jours après, il se rendait à Vienne, en Autriche, pour y défendre la cause des Humanités devant la réunion des *Amis du*

---

(1) Cette Conférence, lue le 21 novembre 1909, a été publiée dans le numéro de décembre 1910 de la *Revue de l'Université de Bruxelles*.

Gymnase. La même année aussi, il était allé à Bruxelles pour prendre part à un Congrès d'un genre tout particulier. Un grand industriel, M. E. Solvay, doublé d'un Mécène, auquel notre Académie décerne aujourd'hui même la médaille Lavoisier, avait réuni les physiciens les plus qualifiés du monde entier, en leur demandant de discuter à fond les idées nouvelles sur la Mécanique. Poincaré a pris part à ces discussions qui viennent d'être publiées (¹).

XX.

Ces excursions que notre Confrère devait faire ainsi à l'étranger étaient fort loin de lui déplaire. Dès son enfance, il avait pris le goût des voyages, et l'on peut dire qu'il était de ceux qui connaissent le mieux notre planète. Pour ma part, je l'ai rencontré en bien des endroits différents : à Londres, à Rome, à Vienne, à Budapest, à Copenhague, à Saint-Louis d'Amérique, à Philadelphie, à New-York, à Boston. Sa valise n'était pas toujours dans un ordre parfait, et l'on rappelait quelquefois dans sa famille qu'un jour, par mégarde, en Autriche, il avait emporté un drap de lit de l'hôtel; mais il savait voyager, et j'ai pu constater plus d'une fois, par moi-même, qu'on pouvait s'en rapporter à lui. D'ailleurs, dans les conversations que nous avions ensemble, je ne me lassais pas d'admirer son grand bon sens, sa perspicacité, le merveilleux équilibre de son esprit. S'il a été hors de pair en Mathématiques, on peut affirmer qu'il aurait admirablement réussi dans toutes les carrières qu'il aurait pu choisir. J'ai parlé plus haut de son insuffisance en dessin. Cela ne l'empêchait pas d'apprécier la peinture et la sculpture, de juger avec beaucoup de pénétration et de goût les œuvres d'art de toute nature. Il aimait beaucoup la musique, surtout la musique symphonique qui puise ses inspirations aux sources les plus pures et les plus cachées.

Ces qualités trouvèrent leur application dans les tâches diverses qui

---

(¹) *La théorie du rayonnement et des quanta*. Rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles sous les auspices de M. Solvay. Publiés par MM. P. Langevin et M. de Broglie. Paris, Gauthier-Villars, 1913 lui furent confiées. Quand l'Académie des Sciences obtint du Gouvernement qu'une mission composée d'officiers du Service géographique de l'Armée irait reprendre à l'Équateur l'œuvre géodésique qui avait fait la gloire de notre Compagnie au XVIII^e siècle, en procédant à une mesure nouvelle, réclamée par les progrès de la Science, de l'arc méridien de Quito, Poincaré fut l'âme, il n'y a pas d'autre expression, de la Commission de contrôle des opérations nommée par l'Académie. Ce fut à lui que le Gouvernement confia la présidence de la Commission interministérielle chargée de coordonner les applications de la Télégraphie sans fil. Enfin, quand une initiative heureuse détermina la création d'un Conseil des Observatoires des départements, ce fut encore Poincaré qui fut appelé à diriger ses travaux. Il ne refusait pas son concours, mais il le donnait sans enthousiasme, et il avait le talent, qui peut être des plus précieux à l'occasion, de savoir écourter les séances des Commissions.

Il n'était pas né pour être administrateur. Il préférait, et il avait bien raison, poursuivre les travaux de haute envergure qui ne cessaient de le préoccuper.

> La recherche de la vérité, a-t-il écrit au début de l'introduction de son Ouvrage : *La valeur de la Science*, doit être le but de notre activité; c'est la seule fin qui soit digne d'elle.

Sa vie entière est une réponse à ceux qui pensent que la Science a été créée uniquement en vue de l'action.

De temps en temps, les devoirs des présidences qui lui étaient confiées lui donnaient l'occasion de rappeler les mérites des Confrères que nous perdions. Avec quel talent d'écrivain, avec quelle finesse, quelle bienveillance pour les personnes il s'acquittait de ce soin, seuls le savent ceux qui l'ont entendu, ceux qui ont lu le beau Volume : *Savants et Écrivains*, où il a réuni tous les Éloges qu'il avait prononcés.

Il nous parle successivement de Sully Prudhomme, de Gréard, de Curie, de Brouardel, de Laguerre, de Cornu, d'Hermite, d'Halphen, de Tisserand, de Joseph Bertrand, de Berthelot, de Faye, de Potier, de

Weierstrass, de Lord Kelvin, de Lœwy, des Polytechniciens du XIX^e siècle. Son style laisse transparaître les idées avec une netteté parfaite, rien n'y sent l'emphase, ni la littérature d'imitation. C'est à la réflexion seulement qu'on reconnaît la parfaite concordance de la forme avec le fond, qui seul préoccupe l'écrivain. On y rencontre pourtant, presque à chaque page, de ces phrases lapidaires que leur forme grave pour toujours dans l'esprit. Souvent, il arrive aussi que quelque boutade spirituelle, quelque vérité énoncée sous une forme paradoxale, vient surprendre le lecteur et fait d'autant plus d'effet qu'elle était moins attendue.

Poincaré, d'ailleurs, se dépeint souvent lui-même, et nous apprend à le mieux connaître, dans les appréciations qu'il mêle à son récit.

> Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, nous dit-il, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi ; je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici, je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver (1).

XXI.

Ainsi s'écoulait la vie d'Henri Poincaré, au milieu de ses amis, au sein d'une charmante famille qui s'ingéniait à lui épargner toute préoccupation et tout souci.

M^{me} Poincaré appartient, par ses origines du côté maternel, à notre monde scientifique. Elle est la petite-fille d'Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire, l'arrière-petite-fille d'Étienne Geoffroy-Saint-Hilaire qui fut l'antagoniste de Cuvier. Sa mère, M^{me} Poulain d'Andecy, qui a longtemps vécu au Muséum, y a laissé, comme d'ailleurs toute la famille Geoffroy-Saint-Hilaire, des souvenirs de haute tenue morale, de bienfaisance et de charité, qui sont encore vivants aujourd'hui. Alors même qu'elle ne

(1) *Notice sur Halphen* (*Journal de l'École Polytechnique*, 60^e cahier).

l'aurait pas trouvée dans son affection et sa haute intelligence. M^{me} Poincaré avait donc reçu de sa famille la notion de la vie qu'il convenait de faire à un savant tel que son mari. Ses trois filles et son fils se joignaient à elle pour entourer leur père de toute leur affection, et lui donnaient toutes les satisfactions qu'il pouvait désirer; son beau-frère et sa sœur, M. et M^{me} Émile Boutroux, son neveu Pierre Boutroux, ses cousins germains, M. Raymond Poincaré, M. Lucien Poincaré, entretenaient avec lui les plus affectueuses et les plus étroites relations. Ses Confrères, heureux de posséder un homme de son génie, lui témoignaient une confiance et une déférence auxquelles il était très sensible. Bien qu'il ne fît rien pour les imposer, ses avis, ses opinions avaient à nos yeux une haute autorité. Partout, dans le monde entier, il trouvait les égards bien dus à celui dont la vie, exempte de toute préoccupation étroite, avait été uniquement consacrée aux recherches les plus hautes et les plus désintéressées. La puissance de son esprit était intacte; il semblait que la vieillesse allait venir pour lui, heureuse, accompagnée de tous les honneurs; qu'il contribuerait, longtemps encore, à accroître le patrimoine moral de notre patrie par l'exemple d'une vie consacrée sans relâche aux plus nobles travaux. La destinée jalouse en a ordonné autrement.

XXII.

Au Congrès international des Mathématiciens, qui se tint à Rome en 1908, un premier accident inquiéta ses amis et l'empêcha de lire lui-même la belle Conférence qu'il avait préparée sur l'*Avenir des Mathématiques*. Cet accident, qui décelait une hypertrophie de la prostate, fut heureusement conjuré grâce à l'habileté et aux soins des chirurgiens italiens. M^{me} Poincaré accourut nous retrouver à Rome et ramena son cher malade en France, à petites journées. De retour ici, notre Confrère reprit ses habitudes et ses travaux; l'activité qu'il ne cessait de montrer nous permit d'espérer que tout danger était, pour longtemps, écarté. Il s'occupait toujours du problème des trois corps. Le 9 décembre 1911, il écrivait la lettre suivante à M. Guccia, directeur fondateur du *Circolo* *matematico* de Palerme, qui avait publié dans son Recueil, nous l'avons vu, quelques-uns de ses plus beaux Mémoires :

MON CHER AMI,

Je vous ai parlé lors de votre dernière visite d'un travail qui me retient depuis deux ans. Je ne suis pas plus avancé, et je me décide à l'abandonner provisoirement pour lui donner le temps de mûrir. Cela irait bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre; à mon âge, je ne puis en répondre, et les résultats obtenus, susceptibles de mettre les chercheurs sur une voie nouvelle et inexplorée, me paraissent trop pleins de promesses, malgré les déceptions qu'ils m'ont causées, pour que je me résigne à les sacrifier. Dans ces conditions, trouveriez-vous convenable de publier un Mémoire inachevé, où j'exposerais le but que j'ai poursuivi, le problème que je me suis proposé, et le résultat des efforts que j'ai faits pour le résoudre ? Cela serait un peu insolite; mais cela serait peut-être utile. Ce qui m'embarrasse, c'est que je serai obligé de mettre beaucoup de figures, justement parce que je n'ai pu arriver à une règle générale, mais que j'ai seulement accumulé les solutions particulières. Dites-moi, je vous prie, ce que vous pensez de cette question et ce que vous me conseillez.

Votre ami dévoué,

POINCARÉ.

Il y a, dans cette lettre, une phrase sur laquelle on s'est appuyé pour dire que, depuis quelque temps, il avait les plus tristes pressentiments. Je ne saurais partager cette opinion ou, du moins, je la crois fort exagérée. Il est naturel que tout homme, atteint d'une maladie chronique, songe plus souvent qu'un autre à la fin inévitable. Mais aucun de nous n'a remarqué que notre Confrère fût réellement affecté.

Quoi qu'il en soit, et comme on peut bien le penser, M. Guccia s'empressa de réclamer le Mémoire qui lui était proposé. Un travail qui avait paru, à un géomètre tel que Poincaré, mériter des efforts prolongés pendant plus de deux ans! C'était une bonne fortune qu'on devait se garder de refuser. Le Mémoire a donc paru peu de temps avant la mort de son illustre Auteur [1].

Il a pour titre : *Sur un théorème de Géométrie.* La démonstration

---

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXIII, séance du 10 mars 1912.

complète de ce théorème, si Poincaré avait pu l'obtenir, lui aurait permis notamment d'établir l'existence d'un nombre illimité de solutions périodiques dans un cas du problème des trois corps plus général que tous ceux qu'il avait envisagés jusque-là [1].

L'année 1912, qui vit la publication de ce Mémoire, est celle peut-être où notre Confrère déploya le plus d'activité. Nous avons déjà signalé les voyages qu'il fit à Londres, à Vienne, à Bruxelles. A Paris même, il accepta de faire partie de la *Ligue française d'éducation morale* et prononça à la première assemblée de cette Ligue un éloquent Discours sur la nécessité de l'union morale. C'était le 26 juin 1912; trois semaines à peine le séparaient de la mort. Les accidents qui avaient inquiété ses amis s'étaient malheureusement reproduits et aggravés. Les médecins estimèrent qu'il y avait lieu d'envisager une opération.

Cette opération devait se faire un mardi; je vis notre Confrère le jeudi qui la précéda. Il présida d'une manière un peu nerveuse le Conseil des Observatoires. Après la séance, il vint me mettre au courant. Il était rempli de confiance et me parlait de son intention de se rendre à Hambourg, pour le cinquantenaire de l'Association géodésique internationale, auprès de laquelle il était délégué par le Gouvernement français. Le samedi suivant, il vint à une séance de la Faculté où, à propos d'une

---

[1] Chose étrange! Ce théorème de Géométrie, qui avait défié pendant si longtemps les efforts de Poincaré, a été démontré en très peu de temps par un géomètre américain, M. Birkhoff, et aussi, si je suis bien informé, par un géomètre suédois, M. Phragmén, qui avait assisté autrefois Poincaré dans la publication de son Mémoire couronné.

A cette occasion, je ne puis m'empêcher de remarquer que, dans cette séance même, l'Académie couronne un beau travail de M. Sundman sur le problème des trois corps. L'Auteur y développe une solution de ce problème plus générale que celle qui était réclamée par Weierstrass, lors du concours institué par le roi de Suède, puisque M. Sundman n'exclut pas le cas, explicitement écarté par le programme reproduit plus haut (p. XXIX), où les corps pourraient se choquer.

Ces recherches de M. Sundman ont leur point de départ dans un théorème relatif au problème des trois corps énoncé par notre Confrère M. Painlevé dans les Leçons qu'il a été appelé à faire à Stockholm, en 1895.

candidature, il nous exposa les idées qui lui étaient chères sur la théorie des groupes de substitutions.

L'opération, faite le mardi 9 juillet, parut avoir réussi. J'étais alors au Conseil supérieur de l'Instruction publique, où le cousin germain de notre Confrère, M. Lucien Poincaré, alors directeur de l'Enseignement secondaire, me donnait chaque jour les nouvelles les plus satisfaisantes. Notre Confrère ne se levait pas encore, mais il s'alimentait quelque peu. Sans négliger aucune précaution, la famille commençait à perdre toute inquiétude. Un accident imprévu, une embolie sans doute, est venu, le 17 juillet, tromper toutes nos espérances. En un quart d'heure à peine, la mort a enlevé celui que nous regardions comme définitivement sauvé. Quand la funeste nouvelle nous fut annoncée, nous demeurâmes longtemps sans vouloir y ajouter foi. Vous vous rappelez, mes chers Confrères, l'émotion qu'excita partout cette mort prématurée. On peut répéter ici ce qu'il a dit lui-même, lors de la mort de Curie. Il n'était pas un Français, si ignorant qu'il fût, qui ne sentît plus ou moins confusément quelle force la Patrie et l'Humanité venaient de perdre.

Henri Poincaré, disait notre Confrère Paul Painlevé, était vraiment le cerveau vivant des Sciences rationnelles. Mathématiques, Astronomie, Physique, Cosmogonie, Géodésie, il a tout embrassé, tout pénétré, tout approfondi. Inventeur incomparable, il ne s'est pas borné à suivre ses aspirations, à ouvrir des voies inattendues, à découvrir dans l'univers abstrait des mathématiques mainte terre inconnue. Partout où la raison d'un homme a su se glisser, si subtils, si hérissés qu'aient été ses chemins, qu'il s'agît de télégraphie sans fil, de phénomènes radiologiques ou de la naissance de la Terre, Henri Poincaré s'est glissé près de lui pour aider et prolonger ses recherches, pour suivre le précieux filon.

Avec le grand mathématicien français disparaît donc le seul homme dont la pensée fût capable de faire tenir en elle toutes les autres pensées, de comprendre jusqu'au fond, et par une sorte de découverte renouvelée, tout ce que la pensée humaine peut aujourd'hui comprendre. Et c'est pourquoi cette disparition prématurée, en pleine force intellectuelle, est un désastre. Des découvertes seront retardées, des tâtonnements se prolongeront parce que le cerveau puissant et lumineux ne sera plus là pour rapprocher des recherches qui s'ignorent, ou pour jeter, dans un monde de faits obscurs brusquement révélés par l'expérience, le coup de sonde hardi d'une théorie nouvelle.

Aux obsèques, qui eurent lieu le 19 juillet, le Ministre de l'Instruction publique, M. Guist'hau, exprima en ces termes le sentiment commun :

La mort d'Henri Poincaré, si elle réunit dans une même pensée de regret l'élite intellectuelle de tous les pays, est pour nous un deuil public. En s'y associant, le Gouvernement est l'interprète de la nation tout entière, douloureusement atteinte. Car si les travaux du mathématicien ne sont accessibles qu'à un petit nombre, tous savaient qu'Henri Poincaré représentait ce que le génie de la France a de plus pur, de plus désintéressé, de meilleur.

M. Jules Claretie, au nom de l'Académie française, MM. Lippmann et Painlevé, au nom de l'Académie des Sciences, M. Paul Appell, au nom de la Faculté des Sciences, M. Bigourdan, au nom du Bureau des Longitudes et du Conseil des Observatoires, le général Cornille, au nom de l'École Polytechnique, apportèrent successivement au grand penseur l'hommage de leurs regrets et de leur admiration.

La Société Royale de Londres, qui avait reçu la funeste nouvelle au moment où elle célébrait le deux cent cinquantième anniversaire de sa fondation, s'était fait représenter par deux de ses membres les plus distingués, MM. Larmor et Dyson.

Quelques jours plus tard, M. Vito Volterra, notre éminent Correspondant, qui avait été invité, comme Poincaré lui-même, à assister à l'inauguration du nouvel Institut Rice, en Amérique, à Houston dans le Texas, consacra toute la Conférence qu'il fit à cette occasion, devant nos Confrères Américains, à une exposition magistrale de l'Œuvre mathématique d'Henri Poincaré.

Comme l'a dit M. Claretie, la postérité avait commencé pour notre Confrère bien longtemps avant sa mort. Sa ville natale, qu'il a tant honorée et tant aimée, saura, de bien des manières, lui témoigner sa reconnaissance et perpétuer son souvenir [1]. Pour nous, qui le regretterons toujours, qui le cherchons encore involontairement à la place où

[1] Déjà l'Association des anciens Élèves des lycées de Nancy, Metz, Strasbourg et Colmar a fait ériger un buste en bronze de notre Confrère dans le square du lycée de Nancy qui borde la rue Gambetta. Ce buste, exécuté par un statuaire

il avait coutume de s'asseoir, nous lui rendrons l'hommage auquel il aurait été le plus sensible, en veillant, avec le concours et l'assentiment de ses proches, à la publication de ses *Œuvres mathématiques*. Le monument que nous lui élèverons ainsi sera celui qu'il aurait le plus volontiers agréé; il prolongera son action et lui suscitera des élèves qu'il n'aura pas connus. Ceux de nos jeunes géomètres qui pourront ainsi y étudier ses immortels travaux y recueilleront une foule de suggestions fécondes; puissent-ils, en même temps, s'inspirer des vertus de leur auteur et, comme lui, concilier le culte de la Science avec celui de la Famille et de la Patrie.

---

distingué, M. Carlier, repose sur un socle de granit des Vosges qui porte cette simple inscription :

A HENRI POINCARÉ, *l'Association des anciens Élèves*, 1913.

D'autre part, M. le général Goetschy, qui présidait cette année la distribution des prix aux élèves du lycée de Nancy, a donné lecture à l'Assemblée d'un décret du 10 juillet 1913, en vertu duquel le lycée dont notre Confrère a été l'illustre élève, et auquel il témoignait tant d'affection, portera à l'avenir le nom de *Lycée Henri Poincaré*. Cette décision a été exécutée sans retard, et l'inscription du nouveau nom figure sur les portes principales du lycée.

Nous avons parlé plus haut de la plaque commémorative qui a été apposée, par les soins de l'Association des anciens Élèves, sur la maison natale de notre Confrère. Cette plaque porte l'inscription suivante :

Dans cette maison
est né le 29 avril 1854
Henri Poincaré,
Membre de l'Académie française
et de l'Académie des Sciences,
mort à Paris le 17 juillet 1912.

I^re SECTION

ANALYSE PURE

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 333-335 (14 février 1881).

Le but que je me propose, dans le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, est de rechercher s'il n'existe pas des fonctions analytiques analogues aux fonctions elliptiques et permettant d'intégrer diverses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Je suis arrivé à démontrer qu'il existe une classe très étendue de fonctions qui satisfont à ces conditions et auxquelles j'ai donné le nom de *fonctions fuchsiennes*, en l'honneur de M. Fuchs, dont les travaux m'ont servi très utilement dans ces recherches.

Voici les notations dont je ferai usage. Soit z une variable imaginaire représentée par un point dans un plan. Si j'appelle K_1 l'opération qui consiste à changer z en $f_1(z)$, K_2 celle qui consiste à changer z en $f_2(z)$, j'écrirai habituellement

$$zK_1 = f_1(z), \qquad zK_2 = f_2(z), \qquad zK_1K_2 = f_2[f_1(z)].$$

Quand z restera intérieur à une certaine région R, zK_1 restera intérieur à une certaine région S; j'écrirai

$$S = RK_1.$$

J'appelle *cercle fondamental* le cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité; *groupe hyperbolique*, le groupe des opérations qui consistent à changer z en $\dfrac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d étant des constantes), et qui n'altèrent pas le cercle fondamental; *groupe discontinu*, tout groupe qui ne contient pas d'opération infinitésimale, c'est-à-dire d'opération changeant z en une quantité infiniment voisine de z; *groupe fuchsien*, tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique.

J'appelle *fonction fuchsienne* toute fonction uniforme de z qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien.

Il fallait d'abord former tous les groupes fuchsiens; j'y suis arrivé à l'aide de la Géométrie non euclidienne, dont je ne parlerai pas ici. J'ai fait voir que la surface du cercle fondamental peut se décomposer (et cela d'une infinité de manières) en une infinité de régions $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots$ satisfaisant aux conditions suivantes :

I. Ces régions sont des polygones curvilignes dont les côtés sont des arcs de cercle appartenant à des circonférences qui coupent orthogonalement le cercle fondamental.

II. On a, quel que soit l'indice i,

$$R_i = R_0 K_i,$$

K_i étant une opération du groupe hyperbolique.

Il est clair que les différentes opérations K_i forment un groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique, c'est-à-dire un groupe fuchsien.

Problème I. — *Est-il possible d'effectuer cette décomposition de telle façon que la première de ces régions R_0 soit un polygone curviligne donné?*

Prenons un exemple particulier; envisageons deux triangles curvilignes ABC, BCD dont les côtés soient des arcs appartenant à des circonférences qui coupent orthogonalement le cercle fondamental. Supposons que les angles curvilignes de ces triangles soient égaux respectivement :

$$\text{BAC} \quad \text{et} \quad \text{BDC} \quad \text{à} \quad \frac{\pi}{\alpha},$$

$$\text{CBA} \quad \text{et} \quad \text{CBD} \quad \text{à} \quad \frac{\pi}{\beta},$$

$$\text{BCA} \quad \text{et} \quad \text{BCD} \quad \text{à} \quad \frac{\pi}{\gamma},$$

α, β, γ étant des nombres entiers positifs (finis ou infinis), et tels que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1.$$

On pourra décomposer la surface du cercle fondamental en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ satisfaisant aux conditions I et II et de telle sorte que R_0 soit précisément le quadrilatère ABCD. A ce mode de décomposition correspond un groupe fuchsien que j'appelle le groupe (α, β, γ).

Je résous ensuite le problème I dans le cas général et je montre comment on peut former tous les groupes fuchsiens et en donner une classification rationnelle à deux points de vue différents.

Parmi les groupes fuchsiens, il en est qui méritent d'attirer particulièrement notre attention :

1° Le groupe $(2, 3, \infty)$, qui est isomorphe au groupe des opérations qui changent z en $\dfrac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d étant des entiers tels que $ad-bc=1$.

2° Certains groupes qui sont isomorphes aux groupes des substitutions linéaires à coefficients entiers, qui reproduisent une forme quadratique ternaire indéfinie à coefficients entiers.

L'existence de ces groupes fait ressortir les liens intimes qui unissent la théorie des nombres à la question analytique qui nous occupe.

J'appelle *fonction thétafuchsienne* toute fonction $\Theta(z)$ uniforme en z, et telle que (K_i étant une opération quelconque d'un groupe fuchsien) on ait identiquement

$$\Theta(zK_i) = \Theta(z)\left(\frac{dzK_i}{dz}\right)^{-m},$$

m étant un nombre entier positif.

En d'autres termes, pour une infinité de valeurs de a, b, c, d, telles que

$$ad - bc = 1,$$

on aura identiquement

$$\Theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Theta(z)(cz+d)^{2m}.$$

Je démontre qu'il existe une infinité de fonctions thétafuchsiennes définies par la série convergente

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} H(zK_i)\left(\frac{dzK_i}{dz}\right)^m;$$

m est un nombre entier plus grand que 1; K_i est une opération quelconque d'un groupe fuchsien quelconque G; $H(z)$ est une fonction rationnelle de z.

Il peut se présenter deux cas : 1° Tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels de $\Theta(z)$; il y a alors en réalité deux fonctions distinctes : la première n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, la seconde à l'extérieur seulement, car on ne peut passer de l'une à l'autre par continuité; 2° $\Theta(z)$ a une infinité de points singuliers essentiels sur le cercle fondamental, mais ces points singuliers sont isolés, de sorte que la fonction existe dans tout le plan.

Cette fonction est toujours méromorphe, sauf sur le cercle fondamental; j'indique le moyen de calculer le nombre de ses zéros distincts et de ses infinis distincts.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 395-398 (21 février 1881).

Le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe fuchsien et à une même valeur du nombre entier m est une fonction $F(z)$ uniforme en z, et telle que

$$F(zK_i) = F(z).$$

C'est donc une fonction fuchsienne, d'après la définition donnée dans la Note précédente. En d'autres termes, on a identiquement, pour une infinité de valeurs des constantes a, b, c, d,

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = F(z).$$

Je démontre deux théorèmes :

1° *Entre deux fonctions fuchsiennes ayant même groupe et n'ayant d'autre point singulier essentiel que ceux qui sont une conséquence de leur définition, il y a une relation algébrique.*

2° *Toute fonction fuchsienne* $F(z)$ *permet d'intégrer une équation linéaire à coefficients algébriques de la manière suivante. Si l'on pose*

$$x = F(z), \qquad y_1 = \sqrt{\frac{dF}{dz}}, \qquad y_2 = z\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

y_1 *et* y_2 *satisfont à l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ *étant algébrique en* x.

Soit, en particulier, l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = y\left[\frac{\frac{1}{\alpha^2}-1}{4x^2} + \frac{\frac{1}{\beta^2}-1}{4(x-1)^2} + \frac{1+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}{4x(x-1)}\right],$$

où α, β, γ sont des nombres entiers positifs finis ou infinis, et tels que

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1.$$

Si z est le rapport des intégrales, on a

$$x = f(z),$$

$f(z)$ étant une fonction fuchsienne relative au groupe (α, β, γ).

Elle n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et peut être regardée comme le quotient des deux fonctions thêtafuchsiennes

$$\frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^m}{[f(z)]^p[f(z)-1]^q}, \quad \frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^m f(z)}{[f(z)]^p[f(z)-1]^q};$$

m, p et q sont des nombres entiers qui satisfont aux inégalités, toujours compatibles,

$$1-\frac{p}{m}<\frac{1}{\alpha}, \qquad 1-\frac{q}{m}<\frac{1}{\beta}, \qquad \frac{p+q-1}{m}-1<\frac{1}{\gamma}.$$

Ces deux fonctions, qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, sont holomorphes à l'intérieur de ce cercle.

Si $\alpha = \beta = \gamma = \infty$, l'équation (1) se ramène à l'équation qui détermine les périodes de $\sin \operatorname{am} x$ en fonction du carré du module.

Je ramène ensuite aux fonctions thêtafuchsiennes ces invariants arithmétiques que j'ai définis dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie en novembre 1879.

Soit $F(z)$ une fonction fuchsienne quelconque; posons $x = F(z)$.

J'appelle *système de fonctions zêtafuchsiennes* tout système de fonctions $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, ..., $\theta_n(z)$ uniformes en z, et telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{\alpha_1}\theta_1}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_1}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_1}{dx^{\alpha_n}} \\ \frac{d^{\alpha_1}\theta_2}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_2}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_2}{dx^{\alpha_n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{\alpha_1}\theta_n}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_n}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_n}{dx^{\alpha_n}} \end{vmatrix}$$

soit une fonction fuchsienne de z, quels que soient les entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Il est clair que $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ satisferont à une équation différentielle linéaire dont les coefficients seront algébriques en x.

Je démontre que l'on peut former une infinité de fonctions zétafuchsiennes dont je donne diverses expressions par des séries, et qui permettent d'intégrer une infinité d'équations différentielles, entre autres *toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qui ne présentent que deux points singuliers à distance finie et un à l'infini.*

Donnons une application particulière.

Soient K et K' les périodes d'une fonction elliptique, ω le carré de son module.

Soit φ un algorithme tel que

$$\omega = \varphi\left(\frac{K + \sqrt{-1}\,K'}{K - \sqrt{-1}\,K'}\right).$$

Soit une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels ayant pour points singuliers

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = \infty.$$

Posons $x = \varphi(z)$, et soient $\theta_1(z), \theta_2(z), \ldots, \theta_n(z)$ les intégrales de l'équation proposée :

$\varphi(z)$ sera une fonction fuchsienne, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des fonctions zétafuchsiennes.

Ces fonctions n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Elles seront holomorphes à l'intérieur de ce cercle et, par conséquent, pourront toujours être représentées par des séries entières dont les coefficients sont aisés à calculer.

En résumé, il existe une classe très étendue de fonctions dont les fonctions elliptiques ne sont qu'un cas particulier. Elles permettent d'intégrer un grand nombre d'équations différentielles. Différentes propriétés font ressortir leur analogie avec les transcendantes elliptiques et celle des fonctions thétafuchsiennes et zétafuchsiennes avec les fonctions Θ et Z.

SUR UNE NOUVELLE APPLICATION

ET

QUELQUES PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

DES

FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 859-861 (4 avril 1881).

Considérons un groupe fuchsien G quelconque et les différentes fonctions fuchsiennes qui correspondent à ce groupe. Je suppose que G soit tel que toutes ces fonctions fuchsiennes n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Toutes ces fonctions fuchsiennes seront liées par des équations algébriques et seront fonctions rationnelles de deux d'entre elles, que j'appellerai x et y, et entre lesquelles il y aura une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Si l'on pose

$$t_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}}, \qquad t_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

(z étant l'argument des fonctions fuchsiennes), t_1 et t_2 seront les intégrales d'une équation linéaire

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = \varphi(x, y)t, \tag{2}$$

φ étant rationnel en x et y.

Envisageons une intégrale abélienne de première espèce

$$u(x, y).$$

Remplaçons-y x et y par leurs valeurs en fonction de z; u deviendra holomorphe en z et pourra, par conséquent, être représenté à l'intérieur du cercle fondamental par une série ordonnée suivant les puissances de z. L'emploi des fonctions fuchsiennes nous donne donc l'intégrale u sous la forme suivante :

$$u = \theta_1(z), \qquad x = \frac{\theta_2(z)}{\theta_3(z)},$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de z et toujours convergentes.

Quand z subit une opération quelconque du groupe G, le point (x, y) décrit un cycle, et, par conséquent, u augmente d'une période. Considérons le groupe des opérations qui consistent à augmenter u d'une période. Ce groupe, d'après ce qui précède, *devra être isomorphe au groupe* G.

Si, par conséquent, le groupe G *est dérivé de moins de* $2p+2$ *opérations, l'intégrale* u *ne pourra avoir* $2p+2$ *périodes distinctes, et, par conséquent, la relation* (1) *sera au plus du genre* p.

Cette limite peut, le plus souvent, être abaissée, car, pour que l'isomorphisme dont j'ai parlé plus haut puisse avoir lieu, il faut, dans certains cas, qu'il y ait entre les périodes de u certaines relations linéaires, de sorte que ces périodes cessent d'être distinctes.

C'est ainsi que la relation (1) peut être du genre zéro, bien que le groupe G soit dérivé d'un nombre quelconque d'opérations.

Par conséquent, les fonctions fuchsiennes permettent d'intégrer une infinité d'équations telles que (2), où φ est rationnel en x, et non plus seulement en x et en y, bien que ces équations présentent un nombre quelconque de points singuliers.

Ainsi, si a, b, c et les coefficients sont convenablement choisis, si la différence des racines des équations déterminantes relatives à chacun des points singuliers

$$a, \quad b, \quad c, \quad \infty$$

est une partie aliquote de l'unité, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A}{(x-a)^2} + \frac{A'}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{B'}{x-b} + \frac{C}{(x-c)^2} + \frac{C'}{x-c}\right]$$

est intégrable à l'aide des fonctions fuchsiennes.

Je citerai aussi, parmi les équations intégrables à l'aide des fonctions fuchsiennes, certaines équations à coefficients doublement périodiques.

M. Picard a démontré que ces équations s'intégraient par les fonctions elliptiques toutes les fois qu'il n'y a d'autre point singulier que des pôles. Elles s'intégreront par les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes s'il n'y a que des pôles et un point critique algébrique. Elles s'intégreront aussi à certaines conditions quand même il y aurait plus d'un point critique algébrique.

Nous avons trouvé plus haut une limite supérieure du genre de la relation (1). D'autres considérations fournissent une limite inférieure. Dans tous les exemples que j'ai eu l'occasion d'étudier jusqu'ici, ces deux limites coïncident, de sorte que l'on connaît exactement le genre de la relation (1). Tout ce qui précède, je le répète, ne s'applique qu'à celles des fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 957 (18 avril 1881).

J'ai étudié en particulier les fonctions fuchsiennes $f(z)$ telles que, si l'on pose

$$x = f(z), \qquad y_1 = \sqrt{\frac{df}{dz}}, \qquad y_2 = z\sqrt{\frac{df}{dz}},$$

y_1 et y_2 satisfassent à une équation de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\varphi(x), \tag{1}$$

φ étant rationnel en x.

J'ai reconnu : 1° que les points singuliers de l'équation (1) qui sont les infinis de $\varphi(x)$ sont tous réels; 2° que l'on peut choisir $f(z)$ de telle façon que ces infinis de $\varphi(x)$ soient aussi nombreux que l'on veut, et aient telles valeurs réelles que l'on veut.

En introduisant les fonctions zétafuchsiennes qui correspondent à ces fonctions $f(z)$, on intègre *toutes les équations linéaires à coefficients rationnels dont tous les points singuliers sont réels*.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 1198-1200 (23 mai 1881).

Parmi les fonctions fuchsiennes, il en est qui jouissent de certaines propriétés spéciales sur lesquelles je désire attirer l'attention.

Soit un plan dont les différents points représentent la variable imaginaire z, et, dans ce plan, le *cercle fondamental* dont le centre est l'origine et le rayon l'unité.

On pourra tracer dans ce plan l'axe des quantités réelles Ox et une série de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, définis de la manière suivante :

1° Ils coupent tous le cercle fondamental orthogonalement.

2° Le cercle C_1 coupe Ox en α_1 et β_1 sous un angle $\frac{\lambda_1}{2}$.

3° Le cercle C_i coupe le cercle C_{i-1} en α_i et β_i sous un angle λ_i.

4° Le cercle C_n coupe Ox en α_{n+1} et β_{n+1} sous un angle $\frac{\lambda_{n+1}}{2}$.

Je suppose que chacun des angles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ est une partie aliquote de 2π et que

$$(1) \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \ldots + 2\lambda_n + \lambda_{n+1} < 2\pi(n-1).$$

Grâce à l'inégalité (1), il est toujours possible de tracer la figure que nous venons de définir.

Cela posé, définissons $n+1$ fonctions de z, z_1, z_2, ..., z_{n+1} par les équations suivantes :

$$\frac{z_1-\alpha_1}{z_1-\beta_1}=e^{i\lambda_1}\left(\frac{z-\alpha_1}{z-\beta_1}\right),$$

$$\frac{z_2-\alpha_2}{z_2-\beta_2}=e^{i\lambda_2}\left(\frac{z-\alpha_2}{z-\beta_2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{z_{n+1}-\alpha_{n+1}}{z_{n+1}-\beta_{n+1}}=e^{i\lambda_{n+1}}\left(\frac{z-\alpha_{n+1}}{z-\beta_{n+1}}\right).$$

D'après la théorie générale des fonctions fuchsiennes, exposée dans un Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie dans la séance du 14 février 1881, il existera une infinité de fonctions $F(z)$, uniformes en z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, méromorphes à l'intérieur de ce cercle et jouissant de la propriété suivante :

$$F(z)=F(z_1)=F(z_2)=\ldots=F(z_n)=F(z_{n+1}).$$

Entre deux quelconques de ces fonctions, dites *fonctions fuchsiennes*, il y a une relation algébrique. Si, de plus, on pose

$$x=F(z),\qquad y=\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

on aura

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=y\,\varphi(x),$$

φ étant algébrique en x, de sorte que la fonction $F(z)$ permettra d'intégrer l'équation (2).

Quel sera le genre de la relation algébrique qui existe entre deux fonctions fuchsiennes quelconques ?

Soient u et v deux de ces fonctions et

$$(3)\qquad f(u,v)=0$$

la relation qui les unit ; soit enfin

$$\int\theta(u,v)\,du=G(z)$$

une intégrale abélienne de première espèce dérivée de la relation (3). $G(z)$ n'existera qu'à l'intérieur du cercle fondamental et sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle. On démontre que toutes les périodes doivent être nulles ; la relation (3) est donc du genre 0 et toutes les fonctions fuchsiennes peuvent s'exprimer rationnellement par l'une d'entre elles. Nous achèverons de définir $F(z)$ par les conditions suivantes :

1° $F(z)$ sera l'une des fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement.

2° On aura

$$F(\alpha_1) = 0, \qquad F(\alpha_2) = 1, \qquad F(\alpha_3) = \infty.$$

Il en résultera que, dans l'équation (2), φ sera rationnel en x et que les points singuliers de l'équation (2) seront

$$F(\alpha_1), \quad F(\alpha_2), \quad \ldots, \quad F(\alpha_n), \quad F(\alpha_{n+1}).$$

De plus, la fonction $F(z)$ reste réelle tout le long des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, et, par conséquent, les points singuliers de l'équation (2) sont tous réels. Enfin on peut profiter des éléments qui restent indéterminés de telle sorte que $F(\alpha_1), F(\alpha_2), \ldots, F(\alpha_{n+1})$ deviennent respectivement égaux à $n+1$ nombres réels quelconques donnés.

Dans le cas particulier où $n = 2$, l'équation (2) se réduit à l'équation hypergéométrique de Gauss et $F(z)$ se réduit à cette fonction particulière sur laquelle j'ai appelé spécialement l'attention dans ma Note du 14 février et dont M. Halphen a fait ressortir les propriétés les plus importantes dans une Note insérée aux *Comptes rendus* le 4 avril 1881.

Si, de plus, on suppose

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

la fonction

$$F\left(\frac{z+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$$

se réduit à la fonction modulaire.

Ne supposons plus $n = 2$, mais supposons

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0;$$

les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ seront rejetés sur le cercle fondamental. La fonction $F(z)$ ne pourra prendre, à l'intérieur de ce cercle, aucune des valeurs

$$F(\alpha_1), \quad F(\alpha_2), \quad \ldots, \quad F(\alpha_{n+1}).$$

Supposons donc une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x et dont les points singuliers soient

$$x = F(\alpha_1), \qquad x = F(\alpha_2), \qquad \ldots, \qquad x = F(\alpha_{n+1}),$$

on y fera

$$x = F(z).$$

Les intégrales de l'équation proposée seront des fonctions zétafuchsiennes de z, qui n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental et seront holomorphes à l'intérieur de ce cercle.

Cette méthode permet d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels toutes les fois que tous les points singuliers sont réels.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 1274-1276 (30 mai 1881).

Dans la dernière Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, j'ai montré comment certaines classes de fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes permettent d'intégrer une équation linéaire à coefficients rationnels, si tous les points singuliers sont réels. Je veux, aujourd'hui, définir une classe plus étendue de fonctions fuchsiennes qui permet l'intégration dans des cas beaucoup plus généraux.

Supposons un polygone curviligne dont les côtés soient successivement A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n; je suppose que ces côtés sont des cercles coupant orthogonalement le cercle fondamental; j'appelle α_i et β_i les deux intersections des cercles A_i et B_i, λ_i l'angle correspondant du polygone curviligne et σ la somme de tous les angles de ce polygone; je suppose que λ_i et $\sigma-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)$ sont des parties aliquotes de 2π.

Je définis n fonctions de z par les équations

$$\frac{z_i-\alpha_i}{z_i-\beta_i}=e^{\lambda_i\sqrt{-1}}\,\frac{z-\alpha_i}{z-\beta_i}\qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

On verrait, comme dans la Note précédente, qu'il y a une infinité de fonctions uniformes de z satisfaisant aux conditions

$$F(z)=F(z_1)=F(z_2)=\ldots=F(z_n)$$

et que toutes s'expriment rationnellement en fonction de l'une d'entre elles.

En faisant tendre les λ et σ vers zéro, on obtient à la limite des fonctions remarquables sur lesquelles je veux attirer l'attention. Sur le cercle fondamental je marque $2n$ points $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$, et je suppose qu'on les rencontre dans l'ordre que je viens d'indiquer, en suivant le cercle dans le sens positif; ces points devront satisfaire à la condition suivante. Je joins le point β_1 à $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ par des cercles $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ normaux au cercle fondamental; je joins de même β_2 à β_3, β_3 à $\beta_4, \ldots, \beta_{n-1}$ à β_n par des cercles $\delta_3, \delta_4, \ldots, \delta_n$ normaux au cercle fondamental; par les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ je mène des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, coupant orthogonalement les cercles fondamental et normaux respectivement à $\gamma_2, \delta_3, \delta_4, \ldots, \delta_n, \gamma_n$; par l'intersection de C_1 et C_2 je mène un cercle D_3, normal au cercle fondamental et à γ_3; par l'intersection de C_3 et de D_3 je mène D_4, normal au cercle fondamental et à γ_4, etc.: D_n *devra passer par* α_n *et se réduire, par conséquent, à* C_n. Je définis n fonctions de z par les équations

$$\frac{1}{z_i-\alpha_i}=\frac{1}{z-\alpha_i}+\frac{1}{\beta_i-\alpha_i}-\frac{1}{\beta_{i-1}-\alpha_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Il existera une infinité de fonctions uniformes de z telles que

$$F(z)=F(z_1)=F(z_2)=\ldots=F(z_n),$$

d'où

$$F(\beta_1)=F(\beta_2)=\ldots=F(\beta_n).$$

Toutes s'expriment rationnellement par une d'entre elles que j'appelle $F(z)$ et que j'achève de définir par les conditions

$$F(\alpha_1)=0, \qquad F(\alpha_2)=1, \qquad F(\alpha_3)=\infty.$$

Cette fonction sera holomorphe à l'interieur du cercle fondamental; elle ne pourra, à l'intérieur de ce cercle, devenir égale à aucun des nombres

$$F(\alpha_1), \quad F(\alpha_2), \quad \ldots, \quad F(\alpha_n), \quad F(\beta_1). \tag{1}$$

Si donc, dans une équation linéaire à coefficients rationnels en x n'ayant d'autres points singuliers que les nombres (1), on substitue $F(z)$ à la place de x, l'intégrale sera une fonction zétafuchsienne de z.

$F(z)$ dépend de $2n-3$ paramètres, à savoir les rapports anharmoniques de $\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; à cause de la condition énoncée plus haut, il reste $2n-4$ paramètres indépendants. En exprimant que les parties réelles et imaginaires de

$$F(\alpha_4), \quad F(\alpha_5), \quad \ldots, \quad F(\alpha_n), \quad F(\beta_1)$$

ont des valeurs données, on a $2n-4$ équations qui déterminent ces $2n-4$ paramètres.

Si j'arrive à démontrer que ces équations ont toujours une solution réelle, j'aurai montré que toutes les équations linéaires à coefficients algébriques s'intègrent par les transcendantes fuchsiennes et zétafuchsiennes.

Je voudrais donner quelques éclaircissements sur ma précédente Communication. J'y parle de la fonction $F(z)$ quand tous les λ sont nuls : j'entends la limite de $F(z)$ quand tous les λ tendent vers zéro. J'ai dit que les quantités $F(\alpha_1)$, $F(\alpha_2)$, ..., $F(\alpha_{n+1})$ peuvent prendre des valeurs réelles quelconques : cela n'est vrai que quand tous les λ sont nuls.

Une dernière remarque : j'ai fait voir que les coordonnées d'un point d'une infinité de courbes algébriques s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'un même paramètre (de même que les coordonnées d'un point d'une courbe de genre 0 s'expriment par des fonctions rationnelles et celles d'un point d'une courbe de genre 1 par des fonctions elliptiques) : parmi les courbes qui jouissent de cette propriété, il y en a de tous les genres possibles ; mais je ne sais pas encore si cette propriété appartient à une courbe algébrique quelconque.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 1484-1487 (27 juin 1881).

I. Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je commence par donner une forme nouvelle à la règle que j'avais exposée dans mon premier travail pour la formation des groupes fuchsiens.

J'appelle X l'axe des quantités réelles.

Soient a, b deux quantités imaginaires, a', b' leurs conjuguées ; je pose

$$(a, b) = \frac{a-a'}{a-b'}\,\frac{b-b'}{b-a'}.$$

Envisageons deux arcs de cercles ab et cd ayant leurs centres sur X ; si l'on a

$$(a, b) = (c, d),$$

il y aura une substitution linéaire à coefficients réels qui changera ab en cd. Je l'appellerai la substitution

$$(a, b;\; c, d).$$

J'envisage maintenant un polygone curviligne situé tout entier au-dessus de X et dont les côtés sont de deux sortes : ceux de la première sorte sont des arcs de cercles ayant leurs centres sur X ; ceux de la seconde sont des segments de l'axe X lui-même.

Les côtés de la première sorte sont au nombre de $2n$; deux côtés consécutifs de la première sorte sont séparés :

1° Soit par un sommet situé au-dessus de X et que j'appellerai *sommet de la première catégorie ;*

2° Soit par un sommet situé sur X et que j'appellerai *sommet de la seconde catégorie;*

3° Soit par un côté de la seconde sorte que j'appellerai, pour uniformiser le langage, *sommet de la troisième catégorie.*

Grâce à cette convention, il est clair que l'on rencontrera, en suivant le périmètre du polygone, alternativement un côté de la première sorte et un sommet de l'une des trois catégories. Le côté qu'on rencontrera après un sommet donné sera le côté suivant; le sommet qu'on rencontrera ensuite sera le sommet suivant, et ainsi de suite.

Je suppose qu'on répartisse d'une façon *quelconque* les côtés de la première sorte en paires et qu'un côté soit dit conjugué de celui qui appartient à la même paire. Je suppose maintenant qu'on répartisse les sommets en cycles de la manière suivante. On partira d'un sommet quelconque; on envisagera le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on revienne au sommet primitif. Tous les sommets rencontrés de la sorte appartiendront à un même cycle.

Je suppose :

1° Que tous les sommets d'un même cycle sont de la même catégorie;

2° Que, si tous les sommets d'un cycle sont de la première catégorie, la somme des angles correspondants du polygone curviligne est une partie aliquote de 2π;

3° Que, si $a_i b_i$ et $a'_i b'_i$ sont deux côtés d'une même paire, on a

$$(a_i, b_i) = (a'_i, b'_i).$$

A ces conditions, le groupe dérivé des substitutions

$$(a_i b_i;\ a'_i, b'_i)$$

sera un groupe fuchsien, et l'on obtiendra de la sorte tous les groupes fuchsiens.

II. Je discute ensuite les $2n - 4$ équations dont j'ai parlé dans ma Note du 30 mai. Supposant $n = 3$, je montre qu'elles ont toujours une solution réelle. Je montre que les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes peuvent servir à intégrer une équation linéaire à coefficients rationnels, pourvu que tous les points singuliers soient sur un certain nombre de cercles se coupant en deux points a et b sous des angles commensurables avec 2π.

III. Dans une Lettre que M. Klein, de Leipzig, m'a fait l'honneur de m'adresser, je remarque le passage suivant :

Nehmen Sie ein beliebiges Polygon, begränzt von irgend welchen sich berührenden (deux à deux) *Kreisen; so wird die Vervielfältigung durch Symmetrie zu einer* groupe discontinu *führen.*

J'ajoute une condition que M. Klein n'a pas énoncée, mais qui ne lui a sans doute pas échappé : si l'on prolonge deux quelconques des arcs de cercles qui limitent le polygone, ils ne doivent pas se rencontrer. La remarque de M. Klein est aisée à vérifier, et l'on en déduit immédiatement le théorème suivant :

Soit une équation

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y\left[\frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a_n)^2} + \frac{B_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{B_n}{x-a_n}\right].$$

Je suppose :

1° *Que*

$$\Sigma B_i = \Sigma A_i + \Sigma B_i a_i = 2\Sigma A_i a_i + \Sigma B_i a_i^2 = 0,$$

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = -\frac{1}{4};$$

2° *Que les* B *et les* a *sont réels ;*

3° *Qu'ils satisfont à certaines inégalités ;*

x *sera alors fonction uniforme du rapport des intégrales.*

J'ai cherché à généraliser le résultat de M. Klein, et voici à quoi je suis arrivé :

Soient $2n$ cercles C_1, C_2, ..., C_n, C'_1, C'_2, ..., C'_n qui sont extérieurs l'un à l'autre ou se touchent extérieurement ; tout groupe dérivé de n substitutions linéaires dont la $i^{\text{ième}}$ change la partie du plan extérieure à C_i en la partie intérieure à C'_i sera discontinu. Cela arrivera en particulier si les $2n$ cercles se touchent deux à deux de manière à circonscrire un polygone curviligne limité par des arcs de cercles α_1, α_2, ..., α_n, α'_1, α'_2, ..., α'_n, appartenant respectivement aux cercles C_1, C_2, ..., C_n, C'_1, C'_2, ..., C'_n et si la $i^{\text{ième}}$ substitution change α_i en α'_i.

Il existe des fonctions qui ne sont pas altérées par les substitutions de ce groupe et que je propose d'appeler *fonctions kleinéennes*, puisque c'est à M. Klein qu'on en doit la découverte. Il y aura aussi des fonctions thétakleinéennes et zétakleinéennes analogues aux fonctions thétafuchsiennes et zétafuchsiennes.

Grâce à cette généralisation, je montre que *le théorème relatif à l'équation* (1), déduit de la remarque de M. Klein, *est encore vrai quand même la seconde condition n'est pas remplie*. Je montre aussi que les fonctions kleinéennes intègrent un grand nombre d'autres équations linéaires à coefficients algébriques, et entre autres des équations à intégrales irrégulières.

SUR

LES GROUPES KLEINÉENS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, p. 44-46 (11 juillet 1881).

Dans mes précédentes Communications, j'ai montré comment on pouvait former tous les groupes fuchsiens, c'est-à-dire tous les groupes discontinus formés de substitutions de la forme

$$\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) \tag{1}$$

(*ces substitutions étant assujetties à ne pas altérer un cercle fixe appelé* cercle fondamental). Une remarque de M. Klein, que j'ai citée dans ma dernière Note, m'a amené à rechercher tous les groupes discontinus formés par des substitutions de la forme (1) (sans condition relative à un cercle fondamental), groupes que je propose d'appeler *kleinéens*. Je vais montrer comment la pseudogéométrie de Lobatschewsky, qui m'a servi à trouver les groupes fuchsiens, peut me donner la solution du problème plus général que j'aborde aujourd'hui.

1. J'écrirai, pour abréger, *ps* et *pst* pour pseudogéométrique et pseudogéométriquement. J'appelle *plan ps* toute sphère ayant son centre dans le plan des xy, *droite ps* l'intersection de deux plans *ps*; l'angle *ps* de deux courbes est égal à leur angle géométrique. Si l'on considère deux points quelconques a et b, on pourra par ces deux points mener une droite *ps* qui coupera le plan des xy en deux points c et d; le demi-logarithme du rapport anharmonique de a et b par rapport à c et d sera alors leur distance *ps*. J'appelle *polygone ps* une portion de plan *ps* limitée par des droites *ps*, *polyèdre ps* une portion de

l'espace située tout entière au-dessus du plan des xy et limitée par des plans ps ou par le plan des xy. Deux figures sont pst égales quand on peut établir entre elles une correspondance point par point et de telle sorte que les distances ps soient conservées. Grâce à ces définitions, les théorèmes de Lobatschewsky trouvent leur application concrète (voir les travaux de M. Klein sur ce sujet dans les *Mathematische Annalen*).

2. Considérons une substitution de la forme (1). Soit

$$t = x + y\sqrt{-1},$$

et considérons x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan. La substitution (1) transformera tous les cercles en cercles. Prenons maintenant dans l'espace un point A; par ce point, je puis faire passer une infinité de plans ps qui viendront couper le plan des xy suivant différents cercles C. Ces cercles seront changés par la substitution (1) en d'autres cercles C'. Toutes les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles C' viendront se couper en un même point B. A la substitution (1) correspondra dans l'espace une transformation (A, B) qui changera toute figure de l'espace en une figure pst égale. A un groupe discontinu de substitutions (1) va donc correspondre un groupe discontinu de transformations (A, B).

3. Pour construire tous les groupes discontinus de transformations (A, B), il faut diviser l'espace en polyèdres ps, pst égaux entre eux. Envisageons un de ces polyèdres ps; je distinguerai parmi ses faces celles de la première sorte, qui sont formées de plans ps, et celles de la seconde sorte, formées de portions du plan xy; les faces de la première sorte pourront être distribuées en paires, comme cela a lieu pour les polygones curvilignes envisagés dans la théorie des groupes fuchsiens; deux faces appartenant à la même paire seront dites *conjuguées* et devront être pst égales entre elles. Les arêtes pourront être distribuées en cycles de la façon suivante. Partant d'une arête quelconque, on considère l'une des faces passant par cette arête, puis la face conjuguée, et dans cette face conjuguée l'arête homologue de celle qui a servi de point de départ, puis une autre face passant par cette arête, puis la face conjuguée, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on retombe sur l'arête qui a servi de point de départ. Cela posé, on trouve une condition nécessaire et suffisante pour que le polyèdre ps considéré donne naissance à un groupe discontinu. Il faut que la

somme des dièdres correspondant aux diverses arêtes d'un même cycle soit une partie aliquote de 2π.

4. Les considérations qui précèdent permettent d'obtenir tous les groupes discontinus de transformations (A, B). Pour que le polyèdre *ps* que nous venons d'envisager donne naissance à un groupe discontinu de substitutions (1), il faut, en outre, que l'une au moins des faces de ce polyèdre soit une portion du plan des xy.

5. Appliquons ces principes à un exemple simple. Je suppose un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs de cercles, et je me demande à quelle condition ce polygone engendrera un groupe discontinu par l'opération que M. Klein appelle la *Vervielfältigung durch Symmetrie*. Je prolonge les arcs de cercles de façon à former des cercles complets, puis j'envisage les sphères qui ont mêmes centres et mêmes rayons que ces cercles. Ces sphères limiteront un certain polyèdre *ps* dont tous les dièdres devront être des parties aliquotes de π. Les principes qui ont permis de déduire de l'existence des groupes fuchsiens celle des fonctions fuchsiennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes sont applicables aux nouveaux groupes kleinéens.

SUR UNE FONCTION ANALOGUE

AUX

FONCTIONS MODULAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, p. 138-140 (18 juillet 1881).

Soit l'équation linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = y\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{B_i}{x - a_i} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(x - a_i)^2}\right],$$

où je suppose

$$\Sigma B_i = \Sigma a_i B_i - \frac{n+1}{4} = \Sigma a_i^2 B_i - \frac{1}{2}\Sigma a_i = 0,$$

de telle façon que $x = \infty$ ne soit pas un point singulier. Je puis toujours supposer

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 2,$$

car, si cela n'était pas, un changement linéaire de variable amènerait a_0, a_1 et a_2 à être égaux à 0, 1 et 2.

Joignons maintenant le point $a_0 = 0$ aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par des arcs de courbe $C_1, C_2, \ldots, C_n$, de telle façon que ces arcs ne se coupent pas et se succèdent autour de a_0 dans l'ordre circulaire $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Faisons maintenant décrire à x le contour suivant : partant de a_0, cette variable suivra l'arc C_1 et reviendra à a_0 par ce même arc après avoir décrit un petit contour autour de a_1 ; elle décrira ensuite l'arc C_2, tournera autour de a_2 et reviendra à a_0 en suivant le même arc C_2 ; puis de même de chacun des arcs $C_3, C_4, \ldots, C_n$.

Elle occupera ainsi successivement les positions suivantes :

$$a_0 \ (1^{\text{re}} \text{ fois}), \quad a_1, \quad a_0 \ (2^{\text{e}} \text{ fois}), \quad a_2, \quad a_0 \ (3^{\text{e}} \text{ fois}), \quad a_3, \quad \ldots,$$
$$a_0 \ (n^{\text{ième}} \text{ fois}), \quad a_n, \quad a_0 \ [(n+1)^{\text{ième}} \text{ fois}].$$

Soient

$$\beta_1,\quad \alpha_1,\quad \beta_2,\quad \alpha_2,\quad \beta_3,\quad \alpha_3,\quad \ldots,\quad \beta_n,\quad \alpha_n,\quad \beta_1$$

les valeurs correspondantes d'une fonction z que je définis comme le rapport de deux intégrales de l'équation (1).

1° Si l'on regarde les a comme des constantes, de telle sorte que les α et les β soient fonctions des B seulement, les α et les β seront des fonctions holomorphes des B pour toutes les valeurs finies de ces quantités.

2° Ne considérons plus maintenant les a comme des constantes ; mais, au lieu de regarder les α et les β comme fonctions des a et des B, considérons au contraire les a et les B comme fonctions des α et des β :

$$a_i = \varphi_i(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n), \qquad B_i = \psi_i(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n).$$

Remarquons d'abord que les variables α et β ne sont pas indépendantes, mais qu'il y a entre elles la relation

$$(2)\quad (\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\ldots(\beta_n-\alpha_n) = (\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_3)\ldots(\alpha_{n-1}-\beta_n)(\alpha_n-\beta_1).$$

Les φ et les ψ seront des fonctions *toujours uniformes et méromorphes* des variables α et β liées par la relation (2). Ce système de fonctions uniformes me paraît jouer, par rapport aux intégrales de l'équation (1), le même rôle que les fonctions modulaires par rapport aux intégrales elliptiques.

3° Les fonctions φ et ψ ne changent pas quand on change les α et les β de telle façon que le rapport anharmonique de quatre de ces quantités demeure invariable.

4° Les fonctions φ et ψ ne changeront pas non plus quand on fera subir aux α et aux β des opérations convenables, et il résulte de là, pour ces fonctions, de remarquables propriétés d'invariance. Dans le cas général, l'énoncé de ces propriétés m'entraînerait trop loin. Supposons donc $n = 3$ pour fixer les idées.

Soient $\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2, \alpha'_3, \beta'_3$ des quantités définies par les équations

$$\alpha'_1 = \alpha_1, \qquad \alpha'_3 = \alpha_3, \qquad \beta'_2 = \beta_3,$$

$$\frac{1}{\beta'_1 - \alpha_1} = \frac{1}{\beta_3 - \alpha_1} + \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} - \frac{1}{\beta_2 - \alpha_1},$$

$$\frac{1}{\alpha''_2 - \alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} - \frac{1}{\beta_2 - \alpha_1},$$

$$\frac{1}{\alpha'_2 - \alpha_3} = \frac{1}{\alpha''_2 - \alpha_3} + \frac{1}{\beta_3 - \alpha_3} - \frac{1}{\beta_1 - \alpha_3},$$

$$\frac{1}{\beta'_3 - \alpha_3} = \frac{1}{\beta'_1 - \alpha_3} + \frac{1}{\beta_3 - \alpha_3} - \frac{1}{\beta_1 - \alpha_3};$$

on aura

$$\varphi(\alpha_1', \beta_1', \alpha_2, \beta_2', \alpha_3', \beta_3') = \varphi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3),$$
$$\psi(\alpha_1', \beta_1', \alpha_2, \beta_2', \alpha_3', \beta_3') = \psi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3).$$

De cette relation d'invariance on peut en déduire deux autres par des permutations circulaires d'indices. En combinant ensuite ces trois équations d'invariance, on en obtiendra une infinité d'autres.

5° Si les α et les β sont réels et de telle sorte que

$$(3) \qquad \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_3 < \ldots < \beta_n < \alpha_n,$$

x sera fonction fuchsienne de z.

Si les α et les β sont imaginaires, mais suffisamment voisins de quantités réelles satisfaisant aux inégalités (3), x sera encore fonction uniforme (kleinéenne) de z; si, au contraire, les α et les β s'éloignaient trop de valeurs réelles satisfaisant aux inégalités (3), x cesserait d'être fonction uniforme de z.

SUR
LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, p. 301-303 (8 août 1881).

Dans ma Communication du 30 mai dernier, j'ai montré que le problème de l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels se ramène au suivant :

Construire une fonction fuchsienne F(z) *ne pouvant prendre aucune des n valeurs données*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n. \tag{1}$$

Si l'on assujettit, de plus, F(z) à pouvoir prendre toutes les valeurs possibles à l'exception des valeurs (1), le nombre des paramètres dont on dispose est égal à celui des conditions que l'on s'impose. Si l'on ne s'assujettit pas à cette condition, le nombre des paramètres dont on dispose est infini.

Grâce à cette circonstance, il était extrêmement probable que le problème était toujours susceptible d'une infinité de solutions ; mais je ne l'avais encore démontré rigoureusement que dans des cas particuliers. Je vais faire voir que cela est encore vrai dans le cas général.

En effet, je répartis les valeurs (1) en deux classes :

1° Les valeurs réelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$;

2° Les valeurs imaginaires $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \alpha_n$, que j'écris

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_p \qquad (p = n - m).$$

Soient $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p$ les valeurs conjuguées de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$.

Je me propose de construire une fonction $F(z)$ ne pouvant prendre aucune des m valeurs réelles données $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, ni aucune des $2p$ valeurs imaginaires données (conjuguées deux à deux) $\beta_1, \ldots, \beta_p, \beta'_1, \ldots, \beta'_p$. Je vais faire voir que ce problème se ramène au suivant : *Construire une fonction* $F_1(z)$ *ne pouvant devenir égale ni à* $m+2q$ *valeurs réelles données, ni à* $2p-2q$ *valeurs imaginaires données conjuguées deux à deux.*

Soit, en effet,

$$\varphi(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_p)(x-\beta'_1)\ldots(x-\beta'_p);$$

$\varphi(x)$ sera un polynome de degré $2p$, à coefficients réels.

L'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

aura $2p-1$ racines

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_{2p-1},$$

dont $2r-1$ seront réelles, r étant au moins égal à 1 ; il restera $p-r$ couples de racines imaginaires.

Soient

$$\begin{array}{llll} \varphi(\alpha_1) = a_1, & \varphi(\alpha_2) = a_2, & \ldots, & \varphi(\alpha_m) = a_m, \\ \varphi(\gamma_1) = C_1, & \varphi(\gamma_2) = C_2, & \ldots, & \varphi(\gamma_{2p-1}) = C_{2p-1}. \end{array}$$

Les a seront réels ; parmi les C, $2q-1$ seront réels, q étant au moins égal à r et, par conséquent, au moins égal à 1 ; les $2p-2q$ autres C seront imaginaires et conjugués deux à deux.

Supposons que l'on ait construit une fonction $F_1(z)$ ne pouvant prendre aucune des $m+2p$ valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, C_1, C_2, \ldots, C_{2p-1}$, dont $2p-2q$ seulement sont imaginaires et sont d'ailleurs conjuguées deux à deux. Définissons une fonction $F(z)$ par l'équation

$$\varphi[F(z)] = F_1(z).$$

$F_1(z)$ ne pouvant prendre aucune des valeurs $C_1, C_2, \ldots, C_{2p-1}$, $F(z)$ sera fonction uniforme de z. $F_1(z)$ ne pouvant devenir nul, $F(z)$ ne pourra devenir égal à aucune des valeurs β. Enfin $F_1(z)$ ne pouvant être égalé à aucun des a, $F(z)$ ne pourra être égalé à aucun des α, c'est-à-dire que $F(z)$ satisfera aux conditions imposées.

En employant un nombre suffisant de fois le même artifice, on ramènera la construction de $F(z)$ à celle d'une fonction $F_h(z)$ ne pouvant prendre $m+2p$

valeurs réelles données. Or ce problème est toujours possible, ainsi que je l'ai montré dans ma Communication du 23 mai.

On en conclut :

1° Que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes ;

2° Que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, p. 581-582 (17 octobre 1881).

1. J'ai retrouvé par une autre voie un certain moyen d'exprimer les fonctions fuchsiennes par des séries, moyen dont j'avais déjà parlé dans un Mémoire antérieur, mais non dans les résumés insérés aux *Comptes rendus*.

J'envisage un groupe fuchsien G formé des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right),$$

i variant de o à l'infini, et je considère la série

$$\varphi(z, a) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}.$$

Si z était une constante et a la variable indépendante, cette série serait une fonction thétafuchsienne de a; mais je regarde au contraire z comme la variable et a comme une constante.

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

une des substitutions fondamentales du groupe G. On trouve aisément

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \varphi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) - \varphi(z)$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=2m-2} (\gamma z + \delta)^{\mu} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{\left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right) + \delta\right]^{\mu+1}} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}.$$

Le second membre est un polynome en z de degré $2m-2$ et dont les coefficients sont des constantes, fonctions thétafuchsiennes de a.

Cela posé, soit n le nombre des substitutions fondamentales de G, multiplié par $2m-1$. On pourra toujours, dans l'expression

$$\Phi(z) = A_0\varphi(z, a_0) + A_1\varphi(z, a_1) + \ldots + A_n\varphi(z, a_n),$$

choisir les constantes A et a de telle sorte que

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2}\Phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \Phi(z).$$

Le quotient de deux fonctions telles que $\Phi(z)$ sera alors une fonction fuchsienne.

2. Parmi les équations linéaires de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle de x, dont les intégrales sont régulières et dont les points singuliers sont donnés, ainsi que les racines des équations déterminantes correspondantes, il ne peut y en avoir qu'une telle que x soit fonction fuchsienne (de la première, deuxième ou sixième famille) du rapport des intégrales.

Il existe un théorème analogue pour le cas où $\varphi(x)$ est algébrique.

3. Dans une Note que j'ai eu précédemment l'honneur de présenter à l'Académie, j'ai parlé d'équations de la forme (1) dont les intégrales étaient irrégulières et où cependant x était fonction fuchsienne du rapport des intégrales. De pareilles fonctions fuchsiennes n'existent pas dans tout l'intérieur du cercle fondamental, mais seulement dans un espace limité par une infinité de cercles, tangents entre eux et orthogonaux au cercle fondamental.

4. Il existe une expression très simple du genre de la relation algébrique qui a lieu entre deux fonctions fuchsiennes de même groupe. Reprenons le polygone générateur du groupe, et soient $2n$ le nombre des côtés de la première sorte et p le nombre des cycles formés de sommets de la première ou de la

deuxième catégorie ; le genre sera

$$\frac{n+1-p}{2}$$

pour les fonctions de la première, de la deuxième ou de la sixième famille et

$$n-p$$

pour les fonctions des autres familles.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 163-166 (23 janvier 1882).

Dans la Note que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je me propose d'exposer une méthode nouvelle et rapide pour exprimer une fonction fuchsienne donnée à l'aide de séries thétafuchsiennes. Je suppose, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une fonction du genre o et de la première famille. J'envisage une équation du second ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2}; \tag{1}$$

je suppose que $\varphi(x)$ est un polynome de degré $2n-2$, et que, pour les différents points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$, les intégrales soient régulières, et que les différences des racines des équations déterminantes soient respectivement

$$\frac{1}{\mu_1}, \quad \frac{1}{\mu_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\mu_n}, \quad \frac{1}{\mu_{n+1}}.$$

Je suppose que l'on sache que x est fonction fuchsienne du rapport z des intégrales. On peut choisir z d'une infinité de manières. On pourra toujours le choisir de telle façon que, pour z très voisin de o, x soit très voisin de a_1, et se développe de la façon suivante :

$$x = a_1 + z^{\mu_1} + b_2 z^{2\mu_1} + b_3 z^{3\mu_1} + b_4 z^{4\mu_1} + \ldots. \tag{2}$$

En posant alors

$$x = f(z),$$

$f(z)$ est une fonction fuchsienne parfaitement déterminée ; il est aisé de calculer les coefficients $b_2, b_3, b_4, \ldots$ et ceux des substitutions du groupe fuchsien correspondant

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Cela posé, envisageons la fonction suivante :

$$\Lambda(z) = \frac{[f(z) - a_1]^{\lambda_1}[f(z) - a_2]^{\lambda_2}\ldots[f(z) - a_n]^{\lambda_n}}{[f'(z)]^m[f(z) - f(z_1)][f(z) - f(z_2)]\ldots[f(z) - f(z_p)]}.$$

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, m$ sont entiers positifs. Ils sont assujettis, ainsi que le nombre p des facteurs du dénominateur, aux inégalités suivantes :

$$\lambda_i > m\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right),$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n < m\left(1 + \frac{1}{\mu_{n+1}}\right) + p.$$

Les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont regardées provisoirement comme des constantes. Les infinis de la fonction $\Lambda(z)$ sont tous simples ; ils sont compris dans la formule

$$\frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i}, \quad \frac{\alpha_i z_2 + \beta_i}{\gamma_i z_2 + \delta_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_i z_p + \beta_i}{\gamma_i z_p + \delta_i}.$$

Quels sont les résidus correspondants ? Soit

$$\frac{1}{[f(z) - f(z_1)][f(z) - f(z_2)]\ldots[f(z) - f(z_p)]}$$
$$= \frac{A_1}{f(z) - f(z_1)} + \frac{A_2}{f(z) - f(z_2)} + \ldots + \frac{A_p}{f(z) - f(z_p)}.$$

On aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 + A_2 + \ldots + A_p &= 0,\\ A_1 f(z_1) + A_2 f(z_2) + \ldots + A_p f(z_p) &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ A_1 f(z_1)^{p-2} + A_2 f(z_2)^{p-2} + \ldots + A_p f(z_p)^{p-2} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Le résidu correspondant à l'infini

$$\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}$$

sera

$$\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}}(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(m+1)},$$

en posant, pour abréger,

$$F(z) = [f(z) - a_1]^{\lambda_1}[f(z) - a_2]^{\lambda_2}\ldots[f(z) - a_n]^{\lambda_n}.$$

Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental. La fonction $\varphi(z)\mathrm{A}(z)$ jouira de la propriété suivante : elle sera égale à une somme de termes de la forme $\sum \frac{\mathrm{A}}{z-a}$, comme on le démontre par des considérations très simples, mais qui cependant ne peuvent trouver place ici. On aura donc

$$\varphi(z)\mathrm{A}(z) = \sum_i \sum_k \frac{\mathrm{A}_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}} \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(m+1)}} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}.$$

Cette identité a lieu quel que soit $\varphi(z)$. Nous pouvons donc écrire

$$(4) \qquad \sum_k \frac{\mathrm{A}_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}} \Theta(z_k) = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\Theta(t) = \sum \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) - \varphi(z)}{z - \dfrac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}} (\gamma_i t + \delta_i)^{-2(m+1)}.$$

Cette fonction, si l'on y regarde z comme une constante, est une fonction thétafuchsienne de t. Si l'on rapproche l'identité (4) des équations (3), et si l'on remarque que, dans ces équations, $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ont des valeurs quelconques, on en déduira l'existence d'une relation de la forme

$$(5) \qquad \Theta(t) = \frac{[f'(t)]^{m+1}}{\mathrm{F}(t)} [\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1 f(t) + \mathrm{M}_2 f^2(t) + \ldots + \mathrm{M}_{p-2} f^{p-2}(t)],$$

où $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_{p-2}$ sont des constantes indépendantes de t. Les valeurs numériques de ces constantes peuvent être calculées aisément à l'aide de séries de même forme que Θ et des $p-2$ premiers coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_{p-2}$ de la série (2). Cette méthode nous donne donc l'expression d'une fonction rationnelle de $f'(z)$ et de $f(z)$ sous la forme d'une série thétafuchsienne. Connaissant trois pareilles expressions, nous pourrons exprimer rationnellement $f(z)$ par des séries thétafuchsiennes.

On peut, par ce procédé, écrire effectivement certaines relations linéaires entre les séries thétafuchsiennes, relations dont j'ai démontré *a priori* l'existence.

Les mêmes méthodes sont applicables, avec quelques changements, aux fonctions des autres genres et des autres familles.

SUR
LES GROUPES DISCONTINUS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 840-843 (27 mars 1882).

Le fondement de mes recherches sur les fonctions fuchsiennes est l'étude des groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à une variable, c'est-à-dire dans le groupe des substitutions

$$\left(x, \frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

Les uns, les groupes fuchsiens, sont tels que a, b, c, d sont réels ou, plus généralement, que leurs substitutions conservent un certain cercle, appelé *cercle fondamental*; les autres, que j'ai appelés *kleinéens*, ne jouissent pas de cette propriété. On peut généraliser cette notion et se demander s'il n'existe pas de groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à deux variables, c'est-dire dans le groupe des substitutions

$$(1) \qquad \left(x, y, \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \quad \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right).$$

Dans une Note extrêmement intéressante, M. Picard a récemment donné un exemple d'un pareil groupe. Mon but est de montrer que d'autres considérations, arithmétiques, algébriques ou géométriques, permettent d'obtenir une infinité d'autres groupes discontinus.

1. Je supposerai d'abord que les coefficients des substitutions (1) sont réels et que leur déterminant est égal à 1. J'aurai ainsi des groupes analogues aux

groupes fuchsiens à coefficients réels. Mais, parmi ceux-ci, il faut faire une distinction : les uns, comme ceux de la première famille, sont discontinus pour toutes les valeurs imaginaires de la variable, mais cessent de l'être pour les valeurs situées sur l'axe des quantités réelles, qui est une ligne singulière essentielle; les autres, comme ceux de la troisième famille, sont discontinus pour les valeurs réelles comme pour les valeurs imaginaires de x. Ce sont des groupes analogues à ces derniers que je vais d'abord chercher à former. Je vais chercher s'il existe des groupes de substitutions de la forme (1), à coefficients réels, qui soient discontinus pour les valeurs réelles de x et de y, ce qui entraînera également la discontinuité pour les valeurs imaginaires de ces variables, au moins dans une certaine étendue.

Pour former un pareil groupe, il y a d'abord un moyen qui s'offre de lui-même à l'esprit. Considérons une forme quadratique

$$(2) \qquad F(x, y, z)$$

à coefficients entiers ; elle admettra une infinité de substitutions semblables à coefficients entiers

$$(3) \qquad (x, y, z, ax + by + cz, a'x + b'y + c'z, a''x + b''y + c''z).$$

Les substitutions correspondantes

$$\left(x, y, \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right)$$

formeront un groupe discontinu. Si l'on suppose que les coefficients de la forme (2) et ceux des substitutions semblables (3), au lieu d'être des entiers ordinaires, sont des entiers complexes, on obtient encore de la sorte un groupe discontinu pour les valeurs complexes de x et de y.

2. Je veux maintenant montrer comment, de chaque groupe fuchsien, on peut déduire un groupe formé de substitutions de la forme (1), à coefficients réels, et qui est discontinu pour les valeurs réelles et, par conséquent aussi, pour les valeurs imaginaires de x et de y. Soit

$$(4) \qquad (x, y, z, ax + by + cz, a'x + b'y + c'z, a''x + b''y + c''z)$$

une substitution dont les coefficients sont réels, sans être nécessairement entiers, et qui reproduit la forme quadratique

$$z^2 - xy.$$

Considérons trois quantités réelles x, y, z, telles que $z^2 - xy$ soit négatif, et adjoignons-leur la quantité complexe t définie par l'équation

$$xt^2 + 2zt + y = 0.$$

A toute substitution linéaire

$$\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right), \tag{5}$$

dont les coefficients sont réels, correspondra une substitution de la forme (4) et, par conséquent aussi, une substitution

$$\left(x, y, \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right). \tag{6}$$

Si les substitutions (5) forment un groupe discontinu, c'est-à-dire un groupe fuchsien G, les substitutions (6) correspondantes formeront un groupe discontinu G', même pour les valeurs réelles de x et de y. Du reste, au lieu de la forme $z^2 - xy$, on pourrait en considérer une infinité d'autres. Au groupe G correspondait une subdivision de l'intérieur du cercle fondamental en une infinité de polynomes curvilignes R dont les côtés étaient des circonférences coupant orthogonalement ce cercle. De même, au groupe G' correspondra une subdivision d'une certaine conique (que l'on pourra toujours réduire à un cercle) en une infinité de polygones *rectilignes* R'. Voici comment on pourra passer de la première subdivision à la seconde : on construira la sphère qui admet le cercle fondamental comme grand cercle, et l'on projettera *stéréographiquement* sur cette sphère les polygones R. On les projettera ensuite de nouveau, mais *orthogonalement*, sur le plan de la subdivision primitive, et l'on aura les polygones R'.

La considération des groupes kleinéens m'aurait donné, par un procédé analogue, des groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à trois variables.

Enfin, les notions qui précèdent sont susceptibles d'une généralisation très étendue. Mais, pour l'exposer ici, j'ai besoin de faire appel à certaines considérations algébriques et arithmétiques, qui feront, si l'Académie veut bien le permettre, l'objet d'une prochaine Note.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 1038-1040 (10 avril 1882).

Je voudrais exposer ici quelques résultats nouveaux et les réunir à des théorèmes anciens, de façon à en faire un ensemble comprenant, comme cas particuliers, les résultats obtenus par M. Klein par d'autres considérations, et exposés par lui dans deux Notes récentes (*Math. Ann.*, Bd. XIX et XX).

Soit une équation différentielle linéaire quelconque

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \ldots + P_1\frac{dv}{dx} + P_0 v = 0. \tag{1}$$

Dans cette équation, $P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}$ sont des fonctions rationnelles en x et en y, et y est lié à x par une relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

D'ailleurs, une ou plusieurs des fonctions P deviendront infinies pour certaines positions du point analytique (x, y) : ce seront les points singuliers de notre équation différentielle ; à chacun d'eux correspondra une équation déterminante dont les racines pourront être imaginaires ou incommensurables, ou bien être toutes des multiples de $\frac{1}{n}$, n étant un entier positif. Dans ce dernier cas, nous dirons que le point singulier est de la première catégorie ; dans le cas contraire, qu'il est de la seconde catégorie. Je laisse de côté le cas où plusieurs des racines sont égales et qui correspond soit à un point de la seconde catégorie, soit à un point à apparence singulière.

Il existera, en général, deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$, jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

2° Si l'on fait $x = F(z)$, $y = F_1(z)$, la relation (2) est satisfaite.

3° Quand z reste inférieur au cercle fondamental, le point analytique (x, y) ne peut passer par aucun point singulier de la seconde catégorie.

4° Si (x, y) passe par un point singulier de la première catégorie, $F(z)$ et $F_1(z)$ ont leur $n-1$ premières dérivées nulles.

Alors les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions zétafuchsiennes de z.

Supposons, en particulier, qu'il n'y ait pas de points singuliers de la première ni de la seconde catégorie, et que la relation (2) soit de genre p ; le polygone R_0 correspondant à nos fonctions fuchsiennes pourra être amené à l'une des deux formes suivantes :

1° Ou bien un polygone de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués, et dont tous les sommets forment un seul cycle, de telle façon que la somme des angles soit égale à 2π ;

2° Ou bien un polygone de $4p$ côtés dont les côtés de rang $4q+1$ et $4q+3$ sont conjugués, ainsi que les côtés de rang $4q+2$ et $4q+4$ (q étant un entier). Ici encore tous les sommets ne forment qu'un cycle, et la somme des angles est égale à 2π. Cette forme de R_0 présente cet avantage que les différents côtés correspondent alors aux périodes *normales* des intégrales abéliennes de première espèce, et que la considération de ces fonctions fuchsiennes permet alors de présenter d'une façon simple la démonstration des relations entre ces périodes.

Le polygone R_0 peut encore prendre une infinité d'autres formes se ramenant les unes aux autres. Je citerai, entre autres, dans le cas $p = 3$, le polygone de 14 côtés considéré par M. Klein.

Si $p = 1$, nos fonctions F et F_1 se réduisent à des fonctions doublement périodiques, de sorte que l'on retrouve les résultats connus sur l'intégration des équations linéaires par ces sortes de fonctions, et en particulier ceux de M. Picard.

On peut retrouver de même les résultats connus relativement à l'intégration algébrique de ces équations. Si ces équations admettent, en effet, des intégrales algébriques, les séries thétazétas, par lesquelles s'expriment nos fonctions zétafuchsiennes, se réduisent d'elles-mêmes à des séries thétafuchsiennes ; par conséquent, les intégrales v se ramènent à des fonctions fuchsiennes de z liées à x par des relations algébriques, puisque nous savons qu'il y a toujours une telle relation entre deux fonctions fuchsiennes de même groupe.

Supposons maintenant que notre équation (1) admette des points singuliers; les sommets de R_0 se répartiront alors non plus en un, mais en plusieurs cycles, qui sont de la première ou de la seconde catégorie, selon que les points singuliers correspondants sont de la première ou de la seconde catégorie.

Est-ce là la seule manière d'exprimer x, y et v par des fonctions uniformes de z ? Non.

1° On peut remplacer $F(z)$ et $F_1(z)$ par deux fonctions $F'(z)$ et $F'_1(z)$, jouissant des mêmes propriétés, mais qui sont des fonctions kleinéennes, ou de ces fonctions fuchsiennes qui n'existent que dans une partie du cercle fondamental. Le passage de $F(z)$ à $F'(z)$ se fera par l' *Abbildung* du cercle fondamental sur un certain domaine.

2° On peut égaler z à une fonction uniforme de t, et alors x, y et v sont également uniformes en t; de plus, on pourra choisir d'une infinité de manières z en fonction de t, de telle sorte que

$$x = \mathcal{F}(t), \qquad y = \mathcal{F}_1(t), \qquad v = Z(t),$$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ étant des fonctions fuchsiennes et Z une fonction zétafuchsienne. Il est quelquefois plus facile de trouver la fonction $\mathcal{F}(t)$ que $F(z)$, comme j'en ai donné l'exemple dans ma Communication du 8 août 1881.

On peut enfin exprimer x et y par des fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ existant dans toute l'étendue du plan ; mais je ne puis entrer ici dans tous les détails que ce sujet comporte.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 1166-1167 (24 avril 1882).

Parmi les fonctions fuchsiennes existant dans toute l'étendue du plan, et dont j'ai parlé à la fin de ma dernière Communication, il en est un certain nombre sur lesquelles je voudrais attirer particulièrement l'attention. Considérons dans le plan des z l'axe des quantités réelles et $2n+1$ points A_1, A_2, ..., A_n, C, B_1, B_2, ..., B_n. Les points A_1 et B_1 sont situés sur l'axe des quantités réelles, les autres sont au-dessus de cet axe. Joignons les points

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nC,\ CB_n,\ B_nB_{n-1},\ \ldots,\ B_3B_2,\ B_2B_1$$

par des arcs de cercle ayant leurs centres sur l'axe des quantités réelles. On obtiendra ainsi un certain polygone curviligne

$$A_1A_2A_3A_4\ldots A_nCB_nB_nB_{n-1}\ldots B_2B_1,$$

dont tous les côtés seront des arcs de cercle ayant leurs centres sur l'axe des quantités réelles, excepté le côté A_1B_1, qui sera un segment de cet axe. Quant au sommet C, on peut, pour plus de symétrie dans les énoncés, le considérer comme appartenant soit à la série des points A avec la notation A_{n+1}, soit à la série des points B avec la notation B_{n+1}.

J'appelle D_i et D'_i les intersections de l'arc A_iA_{i+1} prolongé avec l'axe des quantités réelles; E_i, E'_i les intersections de cet axe avec l'arc B_iB_{i+1}.

Je suppose :

1° Que le rapport anharmonique des quatre points D_i, D'_i, A_i, A_{i+1} sur le cercle $D_iD'_iA_iA_{i+1}$ est égal à celui des quatre points E_i, E'_i, B_i, B_{i+1} sur le cercle $E_iE'_iB_iB_{i+1}$;

2° Que les angles curvilignes $A_i + B_i$ sont des parties aliquotes de 2π, ainsi que l'angle curviligne C.

Dans ce cas, il existe une substitution linéaire

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right),$$

dont les coefficients sont réels, et qui change A_iA_{i+1} en B_iB_{i+1}.

En combinant ces n substitutions, on obtient un groupe discontinu, et ce groupe donne naissance à une infinité de fonctions fuchsiennes qui jouissent des propriétés suivantes :

1° Elles sont toutes fonctions rationnelles de l'une d'entre elles, que j'appelle $F(z)$;

2° Elles existent dans toute l'étendue du plan ; leurs points singuliers essentiels sont isolés et en nombre infini, et ils sont tous situés sur l'axe des quantités réelles.

Ces points singuliers sont infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du deuxième ordre ; ceux-ci sont infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du troisième ordre, et ainsi de suite. D'ailleurs, les points singuliers de tous les ordres sont en nombre infini. Nous avons donc là un exemple de ces *fonctions du deuxième genre*, dont M. Mittag-Leffler a parlé dans sa Communication si intéressante du 3 avril.

Si nous posons

$$x = F(z), \qquad y = \sqrt{\frac{dF}{dx}},$$

on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x)y, \tag{1}$$

$\Phi(x)$ étant rationnel en x. La fonction rationnelle $\Phi(x)$ a ses coefficients *réels* ; et les points singuliers de l'équation (1) sont au nombre de $2n$ et sont imaginaires conjugués deux à deux. Pour chacun d'eux, les intégrales sont *régulières*, et la différence des racines de l'équation déterminante est une partie aliquote de l'unité.

Dans le cas particulier où l'un ou plusieurs des sommets du polygone envisage viennent sur l'axe des quantités réelles, les intégrales de l'équation (1) deviennent *logarithmiques* dans le voisinage des points singuliers correspondants.

On peut former des fonctions kleinéennes ayant la même génération que les fonctions fuchsiennes dont je viens de parler. Les propriétés sont les mêmes. Seulement, les points singuliers essentiels ne sont plus situés sur l'axe des quantités réelles; la fonction $\Phi(x)$ n'a plus ses coefficients réels, et les points singuliers de l'équation (1) ne sont plus imaginaires conjugués deux à deux.

SUR

UNE CLASSE D'INVARIANTS

RELATIFS AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 1402-1405 (22 mai 1882).

Considérons deux équations différentielles linéaires

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_1\frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P'_{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P'_1\frac{dy}{dx} + P'_0 y = 0.$$

Je suppose que les fonctions P et P' sont rationnelles en x et en z; z étant défini en fonction de x par une relation algébrique

$$f(x, z) = 0.$$

Je dirai que ces deux équations sont de même *famille*, si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme

$$A\left(Q_{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q_{m-2}\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + Q_1\frac{dy}{dx} + Q_0 y\right),$$

y étant l'intégrale générale de la première, les Q étant des fonctions rationnelles de x et de z, et A une fonction quelconque de ces variables. Supposons que les fonctions P et P' soient de degré déterminé, de façon que leurs coefficients soient en nombre limité. Il y aura certaines fonctions de ces coefficients qui auront la même valeur pour toutes les équations d'une même famille. Je les appellerai *invariants de famille*.

Pour montrer comment on peut déterminer et étudier les invariants de famille, je vais prendre l'exemple simple de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \theta y = 0, \tag{1}$$

θ étant une fonction rationnelle de x seulement. Je suppose que les intégrales de cette équation soient partout régulières et sans logarithmes. Parmi les infinis de θ, je distingue ceux pour lesquels la différence des racines de l'équation déterminante n'est pas un entier et qui sont les *points singuliers* proprement dits, et ceux pour lesquels cette différence est un entier et que j'appellerai points singuliers *apparents*. Je supposerai que le point ∞ est un point singulier, et qu'il y a, en outre, k points singuliers à distance finie. Je dirai que deux équations de la forme (1) appartiennent à la même classe si les points singuliers sont les mêmes et si, pour chacun d'eux, la différence des racines de l'équation déterminante est la même à un entier près. Je supposerai, pour éviter une discussion qui ne présente, d'ailleurs, aucune difficulté, que cette différence est la même dans nos deux équations pour chaque point singulier, et qu'elle est égale à 2 pour chaque point apparent. Cela posé, toute classe se divisera en deux sous-classes, selon que le nombre des points apparents sera pair ou impair.

Étant données deux équations de la même sous-classe, combien faudra-t-il de conditions pour qu'elles soient de la même famille? En d'autres termes, combien y aura-t-il d'invariants de famille en dehors de ceux qui déterminent la classe? Il y en aura $2k - 4$.

Soit h le nombre des points apparents; si, outre les k points singuliers, les h points apparents sont donnés, il restera, dans θ, des paramètres arbitraires au nombre de $k - 2$. Il résulte de là que, si $h \equiv k \pmod 2$, il y aura, dans chaque famille, une équation canonique qui n'aura que $k - 2$ points apparents, et si $h \equiv k + 1 \pmod 2$, il y en aura une infinité qui auront $k - 1$ points apparents.

Soit, par exemple, $k = 3$, $h \equiv 1 \pmod 2$; voyons comment on pourra passer de l'équation (1) à une équation de même famille n'ayant qu'un point apparent. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les points singuliers, $b_1, b_2, \ldots, b_h$ les points apparents. Posons

$$\psi = \frac{2(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_h)(x - d)}{(x - a_1)^2(x - a_2)^2(x - a_3)^2(x - c_1)^2(x - c_2)^2\ldots(x - c_m)^2}.$$

Je suppose $2m = h - 3$. On voit que ψ contient $m + 2$ paramètres arbitraires, c'est-à-dire α, d, c_1, c_2, ..., c_m. Considérons la fonction rationnelle $-\theta+\psi$. Elle sera de degré -2, et elle aura $3+m+h$ infinis doubles. Combien faut-il de conditions pour qu'une fonction R de degré -2 et ayant n infinis doubles puisse se mettre sous la forme $\varphi^2-\frac{d\varphi}{dx}$, φ étant rationnel? Il en faut $n-1$, et ces conditions, ainsi que les coefficients de φ, s'expriment très simplement en fonction des coefficients de R. Ici nous aurons donc $2+h+m$ conditions, et, comme h d'entre elles sont satisfaites d'elles-mêmes, nous satisferons aux autres à l'aide des $m+2$ paramètres arbitraires qui restent dans ψ. On résoudra donc l'équation

$$\varphi^2-\frac{d\varphi}{dx}=-\theta+\psi,$$

ce qui se ramène à un problème purement algébrique. Puis on formera l'équation dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\varphi y+\frac{dy}{dx}\right),$$

y étant l'intégrale générale de (1). Cette équation sera de même forme que (1), elle sera de même famille que (1), et elle n'admettra qu'un point apparent qui sera d. Les coefficients de cette équation seront les invariants de famille cherchés.

La question peut se traiter par la même analyse dans le cas le plus général. Un problème se présente maintenant: je suppose que les k points singuliers de (1) soient donnés; peut-on disposer des $2k-4$ invariants, de telle façon que le groupe de l'équation (1) soit quelconque? Cela n'est pas évident *a priori*, mais la considération des fonctions zétafuchsiennes permet de le démontrer.

SUR
LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 95, p. 626-628 (9 octobre 1882).

Dans l'étude des fonctions fuchsiennes, j'ai envisagé des séries de la forme suivante :

$$(1) \qquad \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \Theta(z),$$

où $H(z)$ est l'algorithme d'une fonction rationnelle, où $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ sont les différentes substitutions du groupe fuchsien envisagé, et où m est un entier plus grand que 1.

J'ai démontré que (pour une même valeur de m) le quotient de deux de ces séries est une fonction fuchsienne. Réciproquement, on peut se demander si toute fonction fuchsienne peut s'exprimer par un pareil quotient. Cette question se ramène à la suivante. J'ai dit déjà que toutes les fonctions fuchsiennes ayant même groupe peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, que j'appelle x et y, et entre lesquelles il y a une relation algébrique, de sorte que toute série de la forme (1) peut être égalée à une expression telle que

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y),$$

où $F(x, y)$ est l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Réciproquement, toute fonction telle que (2) peut-elle être mise sous la forme (1)? Pour fixer les idées, je supposerai qu'il s'agit d'une de ces familles de fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Nous trouvons d'abord aisément que, pour pouvoir être mise sous la forme (1), l'expression (2) doit s'annuler quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie du polygone R_0.

Supposons une fois pour toutes cette condition remplie.

Les fonctions telles que (2) peuvent ou bien admettre des infinis (nous dirons alors qu'elles sont de la première espèce), ou bien n'en pas admettre, auquel cas elles seront de la deuxième espèce. De même, les séries telles que (1) seront (sauf des cas exceptionnels que nous laisserons de côté) de la première espèce et auront des infinis si $H(z)$ a des pôles à l'intérieur du cercle fondamental. Dans le cas contraire, elle sera de la deuxième espèce et n'aura pas d'infini.

Je dis d'abord que toute expression de la forme (2) et de la deuxième espèce peut être égalée à une série de la forme (1) et de la deuxième espèce. En effet, on démontre que toutes les expressions de la forme (2) de la deuxième espèce peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de p d'entre elles, p étant un nombre entier facile à déterminer. Le théorème énoncé sera donc démontré si j'établis qu'il est possible de mettre sous la forme (1) p expressions telles que (2) *linéairement indépendantes entre elles*. Or, dire que cela est impossible, ce serait dire que toutes les séries (1) de la deuxième espèce peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $p-1$ d'entre elles. Mais je dis qu'il n'en est pas ainsi.

En effet, supposons que toutes les séries (1) de la deuxième espèce puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $p-1$ d'entre elles, que j'appellerai Θ_1, $\Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_p$ p points choisis *au hasard* à l'intérieur du cercle fondamental. On pourra toujours trouver p nombres $A_1, A_2, \ldots, A_p$ tels qu'on ait

$$\begin{aligned}
&A_1\Theta_1(z_1) + A_2\Theta_1(z_2) + \ldots + A_p\Theta_1(z_p) = 0,\\
&A_1\Theta_2(z_1) + A_2\Theta_2(z_2) + \ldots + A_p\Theta_2(z_p) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1\Theta_{p-1}(z_1) + A_2\Theta_{p-1}(z_2) + \ldots + A_p\Theta_{p-1}(z_p) = 0.
\end{aligned}$$

On aura alors

$$A_1\Theta(z_1) + A_2\Theta(z_2) + \ldots + A_p\Theta(z_p) = 0,$$

$\Theta(z)$ désignant une série quelconque de la forme (1) et de la deuxième espèce.

Cela posé, considérons la fonction suivante :

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{(\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}}{z - \dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}}.$$

Soit $\left(z, \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une quelconque des substitutions de notre groupe fuchsien, et posons

$$\mathrm{H}(a) = \frac{(\gamma z + \delta)^{2m-1} - (\gamma a + \delta)^{2m-1}}{(z - a)(\gamma z + \delta)^{2m-2}(\gamma a + \delta)^{2m-1}}.$$

On aura identiquement

$$\Phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right) - (\gamma z + \delta)^{2-2m}\,\Phi(z, a) = \sum_i \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right)(\gamma_i a + \delta_i)^{-2m} = \Theta(a),$$

$\Theta(a)$ désignant une série (1) de la deuxième espèce, où a est regardée comme la variable indépendante. Si donc on pose

$$\Lambda(z) = \mathrm{A}_1\,\Phi(z, z_1) + \mathrm{A}_2\,\Phi(z, z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p\,\Phi(z, z_p),$$

on aura

$$\Lambda\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = (\gamma z + \delta)^{2-2m}\,\Lambda(z);$$

on en conclut que $\Lambda(z)$ est de la forme

$$(3) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} \mathrm{F}(x, y),$$

F étant rationnel. D'ailleurs l'expression (3) s'annule comme l'expression (2) quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie. Il serait donc possible de construire une fonction telle que (3), admettant p infinis, $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *choisis arbitrairement* et n'en admettant pas d'autre. Or on démontre que cela ne se peut pas. Donc l'hypothèse faite au début est absurde. Donc toute expression (2) de la deuxième espèce peut se mettre sous la forme (1).

Je dis maintenant que toute expression (2) de la première espèce peut se mettre sous la forme (1) (en supposant toujours qu'elle s'annule quand z vient en un sommet de la deuxième catégorie). En effet, on pourra toujours construire une série (1) ayant les mêmes infinis que l'expression (2), donnée avec les mêmes résidus. La différence de l'expression (2) donnée et de la série (1) ainsi formée sera une expression (2) de la deuxième espèce qui pourra se mettre sous la forme (1). Il en sera donc de même de l'expression (2) donnée.

Il résulte de ce qui précède que toute fonction fuchsienne, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, peut s'exprimer d'une infinité de manières par le quotient de deux séries de la forme (1). Des principes analogues sont applicables aux fonctions fuchsiennes qui existent dans tout le plan.

SUR

LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 96, p. 691-694 (12 mars 1883).

La détermination complète du groupe d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels est l'un des problèmes les plus importants que l'on rencontre dans la théorie de ces équations. M. Fuchs a donné, dans le Tome 75 du *Journal de Crelle*, un moyen de calculer les coefficients de ce groupe avec une approximation indéfinie ; mais il y a beaucoup d'autres moyens d'arriver au même résultat.

1. Je considère en particulier l'équation suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\sum_{i=1}^{i=n}\frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum_{i=1}^{i=n}\frac{B_i}{x-a_i}\right], \tag{1}$$

en supposant

$$\Sigma B_i = 0.$$

Ce que je vais dire s'appliquerait d'ailleurs à une équation linéaire quelconque, et je n'ai envisagé l'équation (1) que pour fixer les idées.

Soient y_1 et y_2 deux intégrales de l'équation (1) définies par les conditions suivantes : pour $x = 0$, y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$ se réduisent respectivement à

$$1, \quad 0, \quad 0 \quad \text{et} \quad 1.$$

Si l'on considère un instant x et les a_i comme des constantes, les A_i et les B_i comme variables, il est aisé de voir que y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$ sont des fonctions *entières* des A_i et des B_i, et peuvent être développées suivant les puissances croissantes de ces quantités en séries *toujours* convergentes.

Supposons maintenant que l'on fasse décrire à x un contour fermé quelconque C en partant du point o et y revenant ; soient z_1, z_2, t_1 et t_2 les valeurs finales de y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$, elles seront des fonctions entières des A et des B. Quand on fera décrire à x le contour envisagé, y_1 et y_2 se changeront respectivement en

$$z_1 y_1 + t_1 y_2,$$
$$z_2 y_1 + t_2 y_2.$$

Soient S_1 et S_2 les racines de l'équation en S,

$$(z_1 - S)(t_2 - S) - z_2 t_1 = 0.$$

Si l'on connaissait, pour tous les contours possibles, les valeurs de S_1 et de S_2, le groupe cherché sera entièrement déterminé. Or on a constamment

$$S_1 S_2 = z_1 t_2 - z_2 t_1 = 1.$$

Il reste à déterminer

$$S_1 + S_2 = z_1 + t_2.$$

La valeur de $z_1 + t_2$ s'obtient immédiatement quand le contour C n'enveloppe qu'un point singulier ou les enveloppe tous. Il reste à étudier le cas où ce contour enveloppe plusieurs points singuliers sans les envelopper tous. Dans ce cas, $z_1 + t_2$ s'exprime par une série ordonnée suivant les puissances des A_i et des B_i, et les coefficients sont des sommes de termes que l'on peut former comme il suit :

Posons

$$\Lambda(x, \alpha_1) = \log\left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right),$$

$$\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2) = \int_0^x \frac{\Lambda(x, \alpha_1)}{x - \alpha_2} dx,$$

$$\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_0^x \frac{\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2)}{x - \alpha_3} dx,$$

. . . .

Soit enfin $\Lambda(C, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ l'intégrale

$$\int \frac{\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})}{x - \alpha_p} dx,$$

prise le long du contour C. Les coefficients de notre série seront des sommes de termes de la forme $A(C, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant, dans un certain ordre, les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, chacun de ces derniers pouvant être répété un certain nombre de fois dans la série des α. Ces coefficients peuvent donc être calculés par quadratures.

2. Voici un autre moyen de former le groupe de l'équation (1). Soient a_1 et a_2 deux points singuliers, C_1 et C_2 deux cercles ayant pour centres a_1 et a_2 ne contenant aucun autre point singulier et ayant une partie commune P. Soient λ_1 et μ_1, λ_2 et μ_2 les racines des équations déterminantes relatives à a_1 et à a_2. L'équation admettra quatre intégrales :

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1 = (x-a_1)^{\lambda_1}\varphi_1(x-a_1), & y_2 = (x-a_1)^{\mu_1}\psi_1(x-a_1), \\ y_3 = (x-a_2)^{\lambda_2}\varphi_2(x-a_2), & y_4 = (x-a_2)^{\mu_2}\psi_2(x-a_2), \end{cases}$$

où les φ et les ψ sont des séries ordonnées suivant les puissances de $x-a_1$ et de $x-a_2$, et convergentes toutes quatre à l'intérieur de P. On aura d'ailleurs

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = \alpha y_3 + \beta y_4, & \dfrac{dy_1}{dx} = \alpha\dfrac{dy_3}{dx} + \beta\dfrac{dy_4}{dx}, \\ y_2 = \gamma y_3 + \delta y_4; & \dfrac{dy_2}{dx} = \gamma\dfrac{dy_3}{dx} + \delta\dfrac{dy_4}{dx}. \end{cases}$$

Si l'on pouvait déterminer les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour toutes les combinaisons deux à deux des points singuliers, le groupe cherché serait complètement déterminé ; mais, avec les suppositions que nous avons faites sur les cercles C_1 et C_2, on peut substituer, dans les équations (3), les valeurs des y données par les équations (2), en donnant à x une valeur fixe x_0 située à l'intérieur de P. On a ainsi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sous forme de séries ordonnées suivant les puissances des A, des B, de $x_0 - a_1$ et de $x_0 - a_2$.

Dans une prochaine Note, je montrerai, si l'Académie veut bien le permettre, comment on peut toujours ramener le problème au cas où l'on peut tracer deux cercles C_1 et C_2 satisfaisant aux conditions énoncées plus haut. Je montrerai également comment les résultats précédents peuvent s'étendre au cas des intégrales irrégulières et le lien intime qu'il y a entre ce dernier cas et divers problèmes de Mécanique céleste.

SUR

LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 96, p. 1302-1304 (30 avril 1883).

3. Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 12 mars dernier, j'ai montré que, pour former le groupe d'une équation linéaire, il suffisait de connaître, pour toutes les combinaisons deux à deux des points singuliers, quatre coefficients α, β, γ, δ, et que ces quatre coefficients s'exprimaient aisément par des séries lorsque, envisageant deux points singuliers a_1 et a_2, on pouvait construire deux cercles C_1 et C_2, ayant pour centres a_1 et a_2, ne contenant aucun autre point singulier et ayant une partie commune.

Supposons maintenant que l'on trace deux figures F_1 et F_2, satisfaisant aux conditions suivantes : 1° elles auront une partie commune ; 2° la figure F_1 contiendra le seul point singulier a_1 et la figure F_2 le seul point singulier a_2 ; 3° la figure F_1 se composera de la partie commune à deux cercles qui se couperont aux points α_1 et β_1 sous un angle $\pi\gamma_1$; la figure F_2 sera de même limitée par deux circonférences se coupant en α_2 et β_2 sous un angle $\pi\gamma_2$; il est évidemment toujours possible de construire deux pareilles figures.

Les équations des quatre circonférences qui limitent les deux figures F_1 et F_2 seront

$$\arg\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1} = \delta_1, \qquad \arg\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1} = \delta_1 + \pi\gamma_1,$$

$$\arg\frac{x-\alpha_2}{x-\beta_2} = \delta_2, \qquad \arg\frac{x-\alpha_2}{x-\beta_2} = \delta_2 + \pi\gamma_2.$$

Posons

$$\zeta_1 = \left(e^{-i\delta_1}\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \qquad \zeta_2 = \left(e^{-i\delta_2}\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}},$$

$$h_1 = \left(e^{-i\delta_1}\frac{a_1-\alpha_1}{a_1-\beta_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \qquad h_2 = \left(e^{-i\delta_2}\frac{a_2-\alpha_2}{a_2-\beta_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}},$$

Soient h'_1 et h'_2 les quantités imaginaires conjuguées de h_1 et de h_2. Posons encore

$$z_1 = \frac{\zeta_1 - h_1}{\zeta_1 - h'_1}, \qquad z_2 = \frac{\zeta_2 - h_2}{\zeta_2 - h'_2}.$$

Si nous reprenons les notations de la Note citée, nous aurons

$$y_1 = z_1^{\lambda_1} \varphi_1(z_1), \qquad y_2 = z_1^{\mu_1} \psi_1(z_1) \qquad \text{à l'intérieur de } F_1$$

et

$$y_3 = z_2^{\lambda_2} \varphi_2(z_2), \qquad y_4 = z_2^{\mu_2} \psi_2(z_2) \qquad \text{à l'intérieur de } F_2.$$

Soient alors x_0 un point de la partie commune à F_1 et à F_2, z_1^0 et z_2^0 les valeurs correspondantes de z_1 et de z_2; il est clair que les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s'exprimeront en séries ordonnées suivant les puissances des A, des B, de z_1^0 et de z_2^0.

4. Supposons maintenant que l'on envisage une équation de la forme suivante :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha y \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme de x devenant infinie pour $x = 0$, de telle sorte que le point $x = 0$ soit un point singulier dans le voisinage duquel les intégrales soient irrégulières. On peut chercher les racines de l'équation déterminante qui correspond à une rotation du point x autour du point singulier $x = 0$. On voit alors, en appliquant les principes exposés plus haut, que ces racines sont des fonctions entières de α.

5. De même envisageons des équations de la forme suivante :

$$\frac{dx_k}{dt} = \alpha \sum_1^n \varphi_{ik} x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les φ_{ik} sont des fonctions périodiques de t développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de λt. Cherchons l'équation déterminante D de la substitution que subissent les intégrales quand t s'accroît d'une période. Nous verrions aisément que les racines de cette équation sont des fonctions entières de α.

6. Un problème analogue se présente en Mécanique céleste lorsqu'on étudie les variations séculaires des excentricités; seulement les fonctions φ_{ik} sont

développées suivant les cosinus et les sinus des arcs $(m\lambda + n\mu)t$, m et n étant des entiers et λ et μ des constantes données. On peut traiter directement ce problème comme le précédent, ou plutôt le ramener au précédent en supposant les moyens mouvements commensurables, ce qu'on peut faire avec une erreur aussi petite qu'on le veut. Les périodes des variations séculaires dépendent alors des racines de l'équation déterminante D définie plus haut, et sont développables suivant les puissances croissantes de α, quel que soit le module de α. Lorsqu'on calcule ces périodes comme on le fait d'ordinaire, c'est-à-dire en supprimant dans les fonctions φ_{ik} tous les termes non séculaires, on ne trouve que le premier terme de ces séries, le terme qui contient α à la première puissance. Le terme suivant, qui est de l'ordre de α^2, est d'ailleurs très petit, à cause de la petitesse de α.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 96, p. 1485-1487 (21 mai 1883).

1. Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, le 18 avril 1881, j'ai fait voir qu'on peut toujours construire une fonction fuchsienne $F(z)$ qui peut prendre toutes les valeurs possibles, excepté n valeurs données $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui sont toutes situées sur un même cercle (je supposerai, par exemple, que le module de ces n quantités soit égal à 1). Il est très important de déterminer effectivement cette fonction et de savoir calculer, avec une approximation indéfinie, les coefficients de son groupe G, puisque c'est là la première opération qu'on doit faire quand on veut intégrer une équation linéaire. Voici un moyen d'arriver à ce résultat. Supposons le problème résolu.

La fonction $F(z)$ donne la représentation conforme sur un cercle d'un certain polygone curviligne R_0, et l'intérieur du cercle fondamental se trouve divisé en une infinité de polygones $R_0, R_1, \ldots$, tous congruents ou symétriques à R_0. Réunissons un certain nombre de polygones $R_0, R_1, \ldots, R_p$ pour former un polygone total S. Il y aura une fonction fuchsienne $\varphi(z)$ qui donnera la représentation conforme de S sur un cercle ; son groupe sera contenu dans G, et nous aurons identiquement

$$F = H(\varphi),$$

H étant l'algorithme d'une fonction rationnelle. Il est d'ailleurs aisé de calculer les coefficients de H quand on connaît les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et la disposition relative des polygones R_0, R_1, ..., R_p. On peut donc calculer φ en fonction de F.

On peut prendre S assez grand pour que le cercle concentrique au cercle fondamental, et qui a pour rayon $1 - \alpha$, soit tout entier à l'intérieur de S. On a alors

$$\operatorname{mod} \frac{z}{1-\alpha} > \operatorname{mod} \varphi > \operatorname{mod} z,$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod} \varphi = \operatorname{mod} z \qquad (\text{pour } \alpha = 0).$$

Soient z_1, z_2, ..., z_q les transformées de o par diverses substitutions de G; nous pourrons calculer par ce procédé $\operatorname{mod} z_1$, $\operatorname{mod} z_2$, ..., $\operatorname{mod} z_q$, ce qui suffit pour déterminer G.

2. Soit y une intégrale d'une équation linéaire à coefficients rationnels en x. Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, le 8 août 1881, j'ai fait voir que l'on peut trouver une fonction fuchsienne F(z) telle qu'en substituant F(z) à la place de x, y devienne fonction uniforme de z. Mais il y a une infinité de manières d'obtenir le même résultat, ainsi que le prouvent les travaux ultérieurs de M. Klein et les miens. Ainsi l'on peut trouver une fonction fuchsienne $\varphi(t)$ plus simple que F(z), et telle qu'en substituant $\varphi(t)$ à la place de x, y devienne une fonction uniforme de t. On aura d'ailleurs

$$t = \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction uniforme de z, qui demeure inaltérée par un groupe g formé d'une infinité de substitutions linéaires

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Voici un moyen de former t en fonction de z et de démontrer, en même temps, au moins dans la grande majorité des cas, l'existence de la fonction $\varphi(t)$. Nous aurons

$$(1) \qquad \log \operatorname{mod} t = \sum_i \log \operatorname{mod} \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

et

$$(2) \qquad \log \operatorname{mod} t = \lim u_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} (u_n - u_{n-1}).$$

Voici ce que c'est que u_n. Supposons que C_1, C_2, ..., C_n soient des contours s'enveloppant mutuellement et intérieurs au cercle fondamental, u_n sera la partie réelle d'une fonction φ_n dont la partie réelle est nulle le long de C_n, et qui reste finie à l'intérieur de ce contour, excepté aux points où $\alpha_i z + \beta_i = 0$, et où la différence $\varphi_n - \log \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ reste finie.

Sauf dans certains cas exceptionnels, on peut démontrer la convergence des séries (1) et (2).

3. Les mêmes principes et le beau théorème de M. Schwarz (*Monatsberichte*, octobre 1870) permettent de démontrer la proposition suivante, qui peut présenter quelque intérêt à cause de sa généralité :

Soit $y = f(x)$ une fonction non uniforme de x, d'ailleurs quelconque. On peut toujours trouver une variable z, telle que l'on ait

$$y = \varphi(z), \qquad x = \psi(z),$$

φ et ψ étant deux fonctions uniformes de z, n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle.

SUR

LES GROUPES HYPERFUCHSIENS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 98, p. 503-504 (25 février 1884).

Les substitutions hyperfuchsiennes se subdivisent en substitutions elliptiques et hyperboliques, si on laisse de côté certains cas particuliers. Appelons *polaire* du point (α, β) la droite

$$\alpha_0 x + \beta_0 y = 1.$$

Dans les substitutions elliptiques, la polaire de chacun des trois points doubles passe par les deux autres. Dans les substitutions hyperboliques, deux des points doubles sont sur l'hypersphère

$$x x_0 + y y_0 = 1, \tag{1}$$

et le troisième est le pôle de la droite qui joint les deux autres. Soient (α, β) et (γ, δ) les deux premiers points doubles situés sur l'hypersphère.

Considérons l'hypersphère

$$(x - \alpha)(x_0 - \alpha_0) + (y - \beta)(y_0 - \beta_0) = \varepsilon^2, \tag{2}$$

où je supposerai que ε est très petit. On peut toujours supposer que le multiplicateur de la substitution hyperbolique est assez grand pour que les transformés de tous les points de l'hypersphère (2) qui sont intérieurs à l'hypersphère (1) soient aussi près qu'on veut du point (γ, δ). Cela ne serait plus vrai des points extérieurs à (1).

Cela posé, imaginons n substitutions hyperboliques $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Soient (α_i, β_i) et (γ_i, δ_i) les points doubles de S_i. Soient Σ_i une hypersphère

$$(x - \alpha_i)(x_0 - \alpha_{i0}) + (y - \beta_i)(y_0 - \beta_{i0}) = \varepsilon_i^2$$

et Σ'_i la transformée de cette sphère par S_i. On peut toujours supposer les ε assez petits et les multiplicateurs des substitutions assez grands pour que les Σ_i et les Σ'_i n'aient aucun point commun *à l'intérieur de l'hypersphère* (1).

Envisageons un domaine D limité par l'hypersphère (1) et par les surfaces Σ_i et Σ'_i. D pourra être regardé comme le domaine générateur du groupe des substitutions S. La considération de ce domaine montre que ce groupe est discontinu à l'intérieur de l'hypersphère (1). La discontinuité peut même s'étendre à un domaine plus vaste, mais non pas à toutes les valeurs des variables.

On est donc ainsi conduit à une classe de groupes hyperfuchsiens, tout à fait différente de la classe découverte par M. Picard et analogue à la troisième famille de groupes fuchsiens.

Pour pouvoir appliquer à la théorie des groupes hyperfuchsiens les méthodes qui m'ont réussi dans l'étude des groupes fuchsiens, il est nécessaire de généraliser la notion des invariants analogues à la longueur, à l'angle et à la surface. Posons

$$xx_0 + yy_0 = \rho^2,$$

$$x_0\,dx + y_0\,dy = \rho\,dt, \qquad x\,dx_0 + y\,dy_0 = \rho\,dt_0,$$

$$y\,dx - x\,dy = \rho\,du, \qquad y_0\,dx_0 - x_0\,dy_0 = \rho\,du_0.$$

L'intégrale

$$\int\sqrt{\frac{dt\,dt_0}{(1-\rho^2)^2} + \frac{du\,du_0}{1-\rho^2}}$$

est un invariant analogue à la longueur.

Il existe aussi un invariant qui doit être assimilé à l'angle. Soient M, N, P trois points dont les coordonnées soient (x, y), $(x + dx, y + dy)$, $(x + \delta x, y + \delta y)$; l'invariant φ, analogue à l'angle NMP, sera défini par l'équation

$$\cos^2\varphi = \frac{\left[\dfrac{du\,\delta u_0 + du_0\,\delta u}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{dt\,\delta t_0 + dt_0\,\delta t}{1-\rho^2}\right]^2}{4\left[\dfrac{du\,du_0}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{dt\,dt_0}{1-\rho^2}\right]\left[\dfrac{\delta u\,\delta u_0}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{\delta t\,\delta t_0}{1-\rho^2}\right]}.$$

Il existe également des invariants analogues à la surface ou au volume à trois ou à quatre dimensions.

Celui de ces invariants qui est analogue au volume à quatre dimensions a déjà été signalé par M. Picard.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

ET

LES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES INDÉFINIES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 102, p. 735-737 (29 mars 1886).

Une forme quadratique ternaire indéfinie peut toujours s'écrire (en changeant au besoin tous les signes) de la façon suivante :

$$F(x, y, z) = Y^2 - XZ,$$

où

$$X = ax + by + cz, \qquad Y = a'x + b'y + c'z, \qquad Z = a''x + b''y + c''z,$$

les a, les b et les c étant des nombres réels quelconques.

Soient maintenant α, β, γ, δ quatre nombres réels tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Posons

$$X' = \alpha^2 X + 2\alpha\gamma\, Y + \gamma^2 Z,$$
$$Y' = \alpha\beta X + (\alpha\delta + \beta\gamma) Y + \gamma\delta Z,$$
$$Z' = \beta^2 X + 2\beta\delta\, Y + \delta^2 Z,$$
$$X' = ax' + by' + cz', \qquad Y' = a'x' + b'y' + c'z', \qquad Z' = a''x' + b''y' + c''z'.$$

J'appelle S la substitution qui change x, y, z en x', y', z'. C'est une substitution linéaire et, comme on vérifie aisément l'identité

$$Y'^2 - X'Z' = Y^2 - XZ,$$

on voit que S n'altère pas la forme $F(x, y, z)$.

Si les coefficients de S sont entiers, on dit que S est une substitution semblable de la forme F; si ces coefficients, sans être entiers, sont rationnels, nous pourrons dire que S est une substitution semblable fractionnaire de F.

Si les coefficients de F sont entiers, les substitutions semblables forment un groupe discontinu G. A la substitution S faisons correspondre la substitution $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$. Au groupe G correspondra ainsi un groupe g qui sera un groupe fuchsien.

Nous sommes ainsi conduits à nous servir de ce que nous savons des groupes fuchsiens pour l'appliquer à l'étude du groupe G. Si nous envisageons, par exemple, les cycles formés par les sommets du polygone générateur, nous verrons d'abord que la somme des angles d'un cycle ne peut être égale qu'à 2π (s'il n'y en a qu'un), à π, à $\frac{2\pi}{3}$, à $\frac{\pi}{2}$, à $\frac{\pi}{3}$ ou à o.

Il y aura un cycle où cette somme sera π, si F peut être transformée par une substitution de déterminant 1 ou 2 en une forme telle que

$$a'' z^2 + a x^2 + 2b'' xy + a' y^2.$$

Il y en aura un où cette somme sera $\frac{\pi}{2}$ si F peut être transformée par une substitution de déterminant 1 ou 2 en une forme telle que

$$a'' z^2 + a x^2 + a y^2.$$

Il y en aura un où cette somme sera $\frac{\pi}{3}$ $\left(\text{ou bien } \frac{2\pi}{3}\right)$ si F peut être transformée par une substitution de déterminant 1 (ou bien 3) en une forme telle que

$$a' z^2 + 2b' (xy - x^2 - y^2).$$

Il y en aura un où cette somme sera o si F peut représenter o, c'est-à-dire si F satisfait aux conditions du paragraphe 299 des *Disq. arithm.* Dans ce cas, le groupe fuchsien sera de la deuxième ou de la sixième famille. Dans tous les autres cas, il sera de la première.

Il est un autre point sur lequel je désirerais attirer l'attention. On peut se demander s'il existe pour une fonction fuchsienne $f(z)$ un théorème analogue à ce qu'est le théorème d'addition pour les fonctions elliptiques, c'est-à-dire si l'on peut trouver une relation algébrique entre $f(z)$ et $f(z\mathrm{T})$, T désignant une substitution linéaire n'appartenant pas au groupe g de la fonction $f(z)$. Pour cela, il faut et il suffit que les substitutions communes aux deux groupes fuchsiens g et $\mathrm{T}^{-1} g \mathrm{T}$ forment encore un groupe fuchsien.

Il ne semble pas qu'il en soit ainsi en général; on sait pourtant que cela a lieu pour la fonction modulaire; car si $f(z)$ désigne cette fonction, et n un entier quelconque, il y a une relation algébrique entre $f(z)$ et $f\left(\frac{z}{n}\right)$.

La même propriété appartient aux fonctions fuchsiennes $f(z)$ engendrées par un groupe g, lorsque ce groupe g correspond, comme il a été dit plus haut, au groupe G des substitutions semblables d'une forme F.

Considérons maintenant le groupe des substitutions semblables *fractionnaires* de la forme F; ce groupe ne sera plus discontinu. Soit alors Σ une quelconque de ces substitutions semblables fractionnaires, et soit σ la substitution de la forme $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ qui correspond à Σ de la même manière que g correspond à G. Il y aura une relation algébrique entre $f(z)$ et $f(z\sigma)$.

Pour obtenir ce résultat, il faut s'appuyer sur le principe suivant :

Soit Γ le groupe des substitutions linéaires à coefficients entiers et de déterminant 1.

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini contenu dans Γ. On peut convenir de ne considérer deux formes comme équivalentes que si l'on peut passer de l'une à l'autre par une substitution de Γ'. On peut faire ensuite, à ce nouveau point de vue, la théorie de la réduction des formes quadratiques : elle ne différera pas de la théorie ordinaire.

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

ET

L'ÉQUATION

$\Delta u = e^u$

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 126, p. 627-630 (28 février 1898).

Parmi les équations de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

où φ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique *donnée*

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

parmi toutes ces équations, dis-je, qui admettent des points singuliers donnés et de telle façon que la différence des racines de chaque équation déterminante soit un entier donné, il y a toujours une équation fuchsienne, c'est-à-dire engendrant des fonctions fuchsiennes.

Nous avons donné de ce fait, M. Klein et moi, une première démonstration fondée sur le principe de continuité. Plus tard, M. Picard a ramené la question à l'intégration de l'équation

$$\Delta u = e^u \tag{3}$$

et il a démontré l'intégrabilité de cette équation par une méthode qu'il a imaginée et qui consiste à l'établir d'abord pour un domaine assez petit pour l'étendre ensuite au plan entier.

Voulant éviter ce détour, j'ai cherché une méthode nouvelle dont je vais exposer maintenant le principe.

J'introduis la *surface de Klein* : c'est une surface fermée ; à tout point *réel* de cette surface correspond un point imaginaire de la courbe (2) et inversement. Je pose d'ailleurs

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega},$$

où $d\omega$ est un élément de la surface de Klein et $d\Omega$ l'élément correspondant du plan des x. L'équation (3) se ramène alors à la forme

$$\text{(4)} \qquad DU = \Theta e^{U} - \Phi,$$

où Θ et Φ sont deux fonctions données, la première toujours positive.

Le problème de la formation de l'équation fuchsienne se ramène à la détermination de la fonction U qui doit être partout finie.

L'analyse repose sur certaines inégalités très simples qui se déduisent d'une remarque unique : si U est maximum, DU est négatif ; si U est minimum, DU est positif.

Je commence par intégrer l'équation

$$\text{(5)} \qquad Du = \varphi,$$

où φ est donnée ; cette intégration n'est possible que si

$$\int \varphi \, d\omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface de Klein. L'équation (5) est de même forme que l'équation bien connue de la théorie du potentiel

$$\Delta u = \varphi,$$

qu'on intègre par la fonction de Green. L'équation (5) s'intègre par un procédé analogue ; la fonction qui joue le rôle de la fonction de Green est la partie réelle d'une intégrale abélienne de troisième espèce facile à former.

J'étudie ensuite l'équation

$$\text{(6)} \qquad Du = \lambda \eta_1 u = \varphi - \lambda \psi,$$

où η_1, φ, ψ sont trois fonctions données, la première toujours positive et où λ est un paramètre positif.

Je montre d'abord que l'équation est intégrable pour les petites valeurs de λ et que l'intégrale peut se développer suivant les puissances de λ. Je montre ensuite que, si elle est intégrable pour $\lambda = \lambda_0$, elle le sera encore pour les petites valeurs de $\lambda - \lambda_0$ et que l'intégrale peut se développer suivant les puissances de $\lambda - \lambda_0$. Je conclus que l'équation est intégrable pour toutes les valeurs positives de λ.

Il y a un cas où cette méthode est en défaut. C'est quand le polygone fuchsien a des sommets sur le cercle fondamental; dans ce cas il y a des points où les fonctions η et θ deviennent infinies comme

$$\frac{1}{x^2 \log^2 x}.$$

Dans ce cas, d'ailleurs, la méthode de M. Picard est également en défaut. Je ne puis entrer dans le détail des artifices que j'ai dû employer pour triompher de cette difficulté. Cela a été la partie la plus longue de mon travail.

Je me bornerai à dire que l'intégrale est toujours finie, qu'elle peut se développer suivant les puissances de λ, mais que les termes du développement peuvent devenir infinis.

C'est ainsi que la fonction x^λ reste finie pour $x = 0$, si λ est positif; qu'elle peut se développer suivant les puissances de λ

$$x^\lambda = 1 + \lambda \log x + \frac{\lambda^2}{2} (\log x)^2 + \ldots,$$

mais que les termes du développement deviennent infinis pour $x = 0$.

Cette difficulté vaincue, j'aborde l'équation

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{D}u = \theta e^u - \varphi - \lambda\psi,$$

où θ, φ et ψ sont connus et positifs, et où λ est un paramètre positif.

Je suppose qu'on sache intégrer l'équation (7) pour $\lambda = 0$; je puis alors former une série procédant suivant les puissances de λ et satisfaisant à (7). J'obtiens chaque terme par l'intégration d'une équation de la forme (6); et, grâce aux inégalités établies au début, je montre facilement que la série converge, si λ est assez petit.

On peut démontrer alors de proche en proche, comme pour l'équation (6), que l'équation est intégrable pour toutes les valeurs positives de λ.

En résumé, l'équation (4) est intégrable si Φ est toujours positif, et il est aisé de conclure qu'elle l'est encore pourvu que

$$\text{(8)} \qquad \int \Phi \, d\omega > 0.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante. Il reste à vérifier que cette condition (8) est remplie dans les applications que l'on a à faire aux fonctions fuchsiennes. Cette vérification est facile.

On peut entrevoir la possibilité d'une démonstration rigoureuse fondée sur le calcul des variations. Il est aisé de former une intégrale double qui doit être minimum si l'équation (4) est satisfaite. Mais ce genre de raisonnement n'est pas satisfaisant, parce que, cette intégrale dépendant d'une fonction arbitraire, il n'est pas certain qu'elle ait un minimum proprement dit.

Heureusement, dans le problème qui nous occupe, la fonction inconnue $\varphi(x, y)$ doit satisfaire à certaines conditions; elle dépend seulement d'un nombre *fini* de *constantes* inconnues. La fonction u dépendra donc elle-même d'un nombre fini de constantes inconnues. Notre intégrale double, ne dépendant plus d'une fonction arbitraire, mais d'un certain nombre de paramètres arbitraires, aura certainement un minimum et la démonstration pourra devenir rigoureuse.

ACADÉMIE DES SCIENCES

GÉOMÉTRIE

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(PRIX DU BUDGET)

Commissaires : MM. Bertrand, Bonnet, Puiseux, Bouquet; Hermite, rapporteur.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 551-554 (14 mars 1881).

L'Académie avait proposé pour sujet d'un grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880 la question suivante :

Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.

Six Mémoires ont été envoyés au Concours. Quatre d'entre eux, inscrits sous les nos 1, 2, 3, 5, témoignent chez leurs auteurs d'une science étendue et d'un esprit ingénieux. Nous allons en rendre compte succinctement.

Dans les travaux dont la théorie générale des équations différentielles linéaires a été récemment l'objet, on a eu principalement en vue d'obtenir l'intégrale dans les cas où elle peut s'exprimer par des fonctions uniformes de la variable. Les belles découvertes de M. Fuchs, qui ont joué le principal rôle dans ces recherches, servent également de base pour l'étude plus profonde et plus difficile entreprise par l'auteur du Mémoire no 1, portant pour épigraphe : « *C'est ici un livre de bonne foi, lecteur.* » Il part de ce fait que la transformée d'une équation différentielle linéaire obtenue en substituant à la variable indépendante une fonction quelconque d'une nouvelle variable est une équation linéaire de même ordre, et qu'il en est de même si l'on multiplie l'inconnue par une seconde fonction arbitraire de cette nouvelle variable. Cela étant, l'auteur se propose de déterminer ces deux fonctions, de manière que l'équation transformée soit à coefficients constants, ou bien soit intégrable au moyen de fonctions uniformes, simplement rationnelles ou doublement périodiques. Ces questions sont, comme on voit, aussi importantes que difficiles; la solution complète et générale qui est exposée dans le Mémoire montre un talent mathématique de l'ordre le plus élevé. Rien n'est plus intéressant que de voir s'introduire dans cette recherche de Calcul intégral les notions algébriques d'invariants qui ont pris naissance dans la théorie des formes, et ces nouvelles combinaisons faire apparaître les éléments cachés dont dépend, sous ses diverses formes analytiques, l'intégration d'une équation donnée. C'est à M. Laguerre qu'est due l'idée ingénieuse et profonde des invariants et covariants des équations différentielles linéaires; il en a tiré pour les équations du troisième et du quatrième ordre plusieurs beaux théorèmes, et M. Brioschi s'est aussi occupé avec succès du même sujet; mais l'auteur du Mémoire que nous analysons en a encore mieux fait ressortir toute l'importance. Il y joint une considération qui joue également, dans ses recherches, un rôle essentiel : c'est celle du genre d'une équation algébrique entre deux variables, introduite en Analyse par Riemann et qui est si souvent employée dans les travaux de notre époque. Des applications exposées avec tous les détails nécessaires offrent un grand nombre de résultats entièrement nouveaux et du plus haut intérêt. Nous nous bornons à citer comme particulièrement remarquables des équations du troisième et du quatrième ordre contenant un paramètre arbitraire, puis d'autres d'ordre impair se rattachant à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques, dont la solution, qui n'est pas une fonction uniforme, est obtenue par ces transcendantes. Nous jugeons que ce Mémoire a ajouté à la théorie des équations différentielles linéaires des méthodes générales et des résultats d'une haute importance, et qu'il est digne du grand prix des Sciences mathématiques.

Le Mémoire n° 2 porte l'épigraphe suivante : « *Per faciliora ad difficiliora deveniendum.* » Il renferme des recherches intéressantes sur les intégrales algébriques que peut admettre l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

où p et q sont des fonctions rationnelles de x. L'auteur démontre diverses propriétés de ces intégrales et donne un procédé pour les trouver, quand elles existent. C'est un bon travail qui mérite d'être signalé dans ce Rapport.

Le Mémoire n° 3 a pour épigraphe : « *Nous sommes si malheureux, que nous ne pouvons prendre plaisir à une chose qu'à condition de nous fâcher si elle réussit mal.* »

L'auteur s'y occupe principalement des propriétés des intégrales dans le voisinage de leurs points singuliers. Ces points, connus *a priori*, sont les points singuliers des coefficients. On considère d'abord un point singulier x_0 tel que les coefficients restent monotropes dans une couronne ayant ce point pour centre. Soit y une fonction quelconque de la variable arbitraire x; l'auteur représente par le symbole $\theta(y)$ la nouvelle valeur acquise par cette fonction lorsque le point dont x est l'affixe fait une révolution autour du point x_0. Un changement de variable indépendante permet d'établir, entre la théorie des équations différentielles linéaires et celle des équations aux différences à coefficients constants, un rapprochement qui donne immédiatement les principales propriétés de l'intégrale étudiée.

Dans le Mémoire n° 5, qui porte l'épigraphe suivante : « *Non inultus premor* », l'auteur traite successivement deux questions entièrement différentes, dont il fait l'étude approfondie avec un talent dont la Commission a été extrêmement frappée. La seconde question, qui reçoit les développements les plus étendus, concerne de belles et importantes recherches de M. Fuchs, dont nous indiquerons en quelques mots l'objet. M. Fuchs s'est proposé de déterminer sous quelles conditions on définit une fonction uniforme en égalant à une indéterminée le quotient des intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Les résultats si remarquables du savant géomètre présentaient dans certains cas des lacunes que l'auteur a reconnues et signalées en complétant ainsi une théorie analytique extrêmement intéressante. Cette théorie lui a suggéré l'origine de transcendantes comprenant en particulier les fonctions elliptiques et qui permettent d'obtenir, dans des cas très généraux, la solution des équations linéaires du second ordre. C'est là une voie féconde que l'auteur n'a point parcourue en entier, mais qui témoigne d'un esprit inventif et profond. La Commission ne peut que l'engager à poursuivre ses recherches, en signalant à l'Académie le beau talent dont il a fait preuve.

En résumé, la Commission, à l'unanimité, en renouvelant l'expression de la satisfaction avec laquelle elle a étudié les excellents Mémoires soumis à son jugement, décerne le prix à l'auteur du Mémoire inscrit sous le n° 1, et exprime le désir que ce travail puisse être inséré au *Recueil des Savants étrangers;* elle propose en outre d'accorder des mentions très honorables aux auteurs des Mémoires inscrits sous le n° 5 et sous le n° 3.

Les conclusions de ce Rapport étant adoptées, M. le Président procède à l'ouverture du pli cacheté qui accompagne le Mémoire n° 1, et proclame le nom de M. G.-H. Halphen.

L'auteur du Mémoire inscrit sous le n° 5 s'est fait connaître et a demandé qu'il fût procédé à l'ouverture de son pli cacheté. M. le Président a proclamé le nom de M. H. Poincaré.

SUR LA THÉORIE

DES

FONCTIONS FUCHSIENNES

Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen, pour 1882, p. 3-29. Caen, 1881.

Dans une série de Mémoires présentés à l'Académie des Sciences [1er juin 1880 (¹), 14 et 21 février, 4 et 18 avril, 23 et 30 mai, 27 juin 1881], j'ai étudié une classe de fonctions dont les transcendantes elliptiques et modulaires ne sont que des cas particuliers et que j'ai appelées *fonctions fuchsiennes*. Mon intention est de résumer ici quelques-uns de mes résultats et de donner une idée générale des méthodes qui m'y ont fait arriver.

1. J'envisage une infinité de substitutions linéaires,

$$z_k = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \tag{1}$$

où

$$\alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k = 1.$$

L'indice k varie de zéro à l'infini de telle sorte que $z = z_0$; mais les substitutions sont rangées dans un ordre d'ailleurs arbitraire. Je recherche s'il existe une fonction $F(z)$ uniforme et telle que

$$F(z_k) = F(z).$$

Il est clair que les substitutions linéaires (1) doivent former un groupe et que ce groupe doit être discontinu, c'est-à-dire que la partie du plan où la

(¹) Il s'agit ici du Mémoire présenté au Concours et mentionné dans l'article précédent. Ce Mémoire est arrivé à l'Académie le 28 mai 1880. Ses trois suppléments sont parvenus respectivement aux dates suivantes, 28 juin, 6 septembre et 20 décembre 1880. G. D.

fonction F existe peut être divisée en régions R_0, R_1, ..., R_k telles que, lorsque z est intérieur à R_0, z_k soit intérieur à R_k.

A chacune des substitutions (1) correspond de la sorte une des régions R. A l'intérieur de chacune de ces régions se trouve l'un des points z_k. Ces divers points z_k s'appellent *points correspondants* de z. Ils seront aussi correspondants entre eux. Deux régions R seront dites *limitrophes*, lorsqu'elles seront contiguës tout le long d'un arc de leur périmètre. Si deux points correspondants sont dans deux régions limitrophes, je dirai qu'ils sont *limitrophes*. Les substitutions qui correspondront aux régions limitrophes de R_0 seront les *substitutions fondamentales*. Il est clair, d'ailleurs, que toutes les substitutions du groupe seront des combinaisons des substitutions fondamentales. Par conséquent, le groupe sera entièrement déterminé quand on connaîtra ces substitutions fondamentales.

2. J'appelle X l'axe des quantités réelles.

Je suis donc amené à chercher tous les groupes discontinus qui sont formés de substitutions linéaires; et tout d'abord, ceux dont toutes les substitutions ont des coefficients réels et que j'appelle *groupes fuchsiens*. De pareilles substitutions conservent les angles, elles changent les cercles en cercles et les cercles ayant leur centre sur X en cercles ayant leur centre sur X. Soient α, β deux quantités imaginaires; α', β' leurs conjuguées; je pose

$$(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'}\,\frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'}.$$

Envisageons deux arcs de cercle $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ayant leurs centres sur X. Si l'on a

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

il existera une substitution à coefficients réels qui changera $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$; je l'appelle la substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Le groupe fuchsien étant discontinu, une portion du plan qui est la partie située au-dessus de X sera partagée en régions R_0, ..., R_k, ainsi que je l'ai dit plus haut. Mais par un raisonnement très simple, je montre qu'on peut toujours supposer que ces régions sont des polygones curvilignes situés tout entiers au-dessus de X et dont les côtés sont de deux sortes; ceux de la première sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X lui-même.

Deux côtés consécutifs de la première sorte seront ainsi séparés par un sommet situé au-dessus de X et que j'appelle sommet de la première catégorie.

ou par un sommet situé sur X et que j'appelle sommet de la deuxième catégorie, ou par un côté de la deuxième sorte que j'appelle par extension sommet de la troisième catégorie.

Grâce à cette convention, il est clair que l'on rencontre, en suivant le périmètre du polygone, alternativement un côté de la première sorte et un sommet de l'une des trois catégories. Le côté qu'on rencontrera après un sommet donné sera le côté suivant, le sommet qu'on rencontrera ensuite sera le sommet suivant, etc.

Chacune des substitutions fondamentales du groupe changera le polygone curviligne R_0 en un polygone limitrophe, et par conséquent l'un des côtés de la première sorte ab de R_0 en un autre côté cd de ce même polygone. Cela montre que les côtés de la première sorte de R_0 sont en nombre pair et se répartissent en paires. Si deux côtés ab, cd appartiennent à la même paire, ils sont dits *conjugués* et l'on doit avoir

$$(a, b) = (c, d).$$

Je vais maintenant répartir les sommets en cycles de la manière suivante : on partira d'un sommet quelconque, on envisagera le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on revienne au sommet qui a servi de point de départ. Tous les sommets rencontrés de la sorte appartiendront à un même cycle. Il est clair que tous les sommets d'un même cycle devront appartenir à la même catégorie.

Un polygone R_0 (et le groupe fuchsien G correspondant) sera de la première famille si tous ses sommets sont de la première catégorie; de la deuxième famille, s'ils sont tous de la deuxième catégorie; de la troisième, s'ils sont tous de la troisième catégorie; le polygone R_0 sera de la quatrième famille, s'il a des sommets de la deuxième et de la troisième catégorie; de la cinquième, s'il a des sommets de la première et de la troisième catégorie; de la sixième, s'il en a de la première et de la deuxième catégorie; et enfin de la septième, s'il en a de toutes les catégories.

Quand on connaît le polygone R_0 et la distribution de ses côtés en paires, le groupe fuchsien est entièrement déterminé, car on connaît ses substitutions fondamentales. Si par exemple ab, cd sont deux côtés conjugués, l'une des substitutions fondamentales sera la substitution (a, b, c, d). On saura construire le polygone curviligne R qui sera contigu à R_0 le long de cd, car ce sera le transformé de R_0 par la substitution (a, b, c, d). On saura construire de même tous les polygones limitrophes de R_0 le long d'un quelconque de ses côtés; et tous les polygones limitrophes de ceux-ci, et ainsi de suite. Pour que le groupe soit discontinu, il faut que les polygones ainsi obtenus recouvrent toute la portion du plan située au-dessus de X et ne la recouvrent qu'une fois.

Soient A un point quelconque intérieur à R_0, B un point extérieur à R_0, mais situé au-dessus de X; je joins A et B par une courbe quelconque, AMB ne coupant pas X. Cette courbe sortira de R_0 par un des côtés C_0 de ce polygone et l'on pourra construire, comme on l'a vu plus haut, le polygone R_1 limitrophe de R_0 le long de C_0; si la courbe sort encore de R_1 par un des côtés C_1 de ce polygone, on construira de même le polygone R_2 limitrophe de R_1 le long de C_1; je dis que, après un nombre fini d'opérations, on arrivera à un polygone R_n contenant à son intérieur le point B. Car si cela n'était pas, il y aurait un point de AMB dans le voisinage duquel les polygones R seraient infiniment petits. Or, on démontre qu'un polygone transformé de R_0 par une substitution linéaire à coefficients réels ne peut être infiniment petit que s'il est infiniment voisin de X.

Il reste à examiner si le polygone R_n obtenu est le même quel que soit AMB, ou (ce qui revient au même) s'il se réduit à R_0 quand AMB se réduit à un contour fermé AMA. Soit donc AMA un contour fermé quelconque; décomposons-le en une infinité de contours infiniment petits. Pour qu'en suivant AMA on retombe sur R_0, il suffit qu'en parcourant un quelconque des contours infinitésimaux, on retombe sur le polygone d'où l'on est parti. Or, cela arrivera évidemment pour tout contour qui n'enveloppera aucun sommet de la première catégorie, et il suffit d'ailleurs d'étudier les contours H qui enveloppent les sommets de R_0, car le contour qui enveloppe un sommet de R_h se comportera comme celui qui enveloppe le sommet correspondant de R_0. Pour qu'en décrivant l'un quelconque des contours H, on retombe sur R_0, il faut et il suffit que *la somme des angles du polygone de R_0, correspondant à des sommets de la première catégorie appartenant à un même cycle, soit une partie aliquote de 2π.*

3. Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que R_0 donne naissance à un groupe fuchsien.

Citons quelques exemples de polygones R_0 conduisant à des groupes fuchsiens.

Premier cas. — Je suppose que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés dont les sommets se succèdent dans l'ordre suivant : $A_1 A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2, A_1$; les côtés $A_1 A_2$, $A_1 B_2$; $A_2 A_3$, $B_2 B_3$, ... ; $A_k A_{k+1}$, $B_k B_{k+1}$; ... ; $A_n A_{n+1}$, $B_n A_{n+1}$ seront conjugués ; il y aura alors $n+1$ cycles formés respectivement des sommets

$$A_1; \quad A_2, B_2; \quad A_3, B_3; \quad A_4, B_4; \quad \ldots; \quad A_n, B_n; \quad A_{n+1}.$$

On devra avoir

$$(A_1, A_2) = (A_1, B_2), \qquad (A_k, A_{k+1}) = (B_k, B_{k+1}), \qquad (A_n, A_{n+1}) = (B_n, A_{n+1}),$$

et les angles A_1, $A_2 + B_2$, $A_3 + B_3$, ..., $A_n + B_n$, A_{n+1} devront être parties aliquotes de 2π.

Deuxième cas. — Je fais les mêmes hypothèses que dans le premier cas, mais je suppose de plus que tous les sommets $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2, A_1$ sont sur X et que tous les angles sont nuls.

Troisième cas. — Je fais les mêmes hypothèses que dans le premier cas, je suppose de plus que le polygone est symétrique par rapport à $A_1 A_{n+1}$ et que cette droite est perpendiculaire à X. M. Klein m'a fait l'honneur de m'écrire que ce cas particulier lui était connu depuis quelque temps, et que, sans avoir rien fait imprimer sur ce sujet, il y a fait une fois une allusion dans son cours.

Quatrième cas. — Je fais les mêmes hypothèses que dans le troisième cas et je suppose de plus $n = 2$. Je retombe ainsi sur le cas étudié par M. Schwarz dans le Tome 75 du *Journal de Crelle*.

Cinquième cas. — Je suppose que les sommets du polygone R_0 sont successivement $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, et que les côtés opposés soient conjugués. On devra avoir alors

$$(A_k, A_{k+1}) = (A_{n+k+1}, A_{n+k}).$$

Si n est pair, tous les sommets appartiennent au même cycle et la somme de tous les angles doit être partie aliquote de 2π.

Si n est impair, il y a deux cycles, formés, l'un de tous les sommets de rang pair, l'autre de tous les sommets de rang impair. La somme de tous les angles de rang pair comme celle de tous les angles de rang impair devra être partie aliquote de 2π.

Sixième cas. — L'un des cas particuliers les plus remarquables des groupes fuchsiens, c'est celui où les coefficients des substitutions (1) sont entiers ; c'est ce cas qui a fait l'objet des intéressantes recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

4. J'appelle *points singuliers* d'un groupe fuchsien les points dans le voisinage desquels les polygones R sont infiniment petits; pour les groupes des première, deuxième et sixième familles, tout l'axe X est une ligne singulière; pour ceux des autres familles, les points singuliers sont isolés sur X, quoique en nombre infini.

Si G est de la première, de la troisième ou de la cinquième famille, je dirai qu'une fonction uniforme ne présente d'autres singularités que celles de G, si tous ses points singuliers sont ceux de ce groupe.

Supposons maintenant que G est de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille, de la deuxième par exemple pour fixer les idées. Il pourra toujours être regardé comme un cas particulier d'un groupe variable G' satisfaisant aux conditions suivantes : tous les groupes G' seront isomorphes entre eux et dérivés d'un même nombre de substitutions fondamentales; les coefficients de ces substitutions seront des fonctions rationnelles d'un paramètre u. Pour $u > 0$, le groupe G' sera de la troisième famille; pour $u = 0$, il se réduira à G et sera de la deuxième famille. Je dirai alors qu'une fonction $F(z)$ n'a d'autres singularités que celles de G quand elle pourra être regardée comme la limite d'une fonction $F'(z)$ n'ayant d'autre singularité que celle de G'.

5. Outre les groupes fuchsiens, j'ai étudié dans mes communications des 27 juin et 11 juillet 1881 les groupes discontinus formés de substitutions telles que (1), mais où α_k, β_k, γ_k, δ_k sont imaginaires. M. Klein ayant le premier donné un exemple remarquable de pareils groupes, je les ai appelés *groupes kleinéens*. Ne pouvant donner ici, faute d'espace, la manière de les former, je renverrai aux communications citées.

6. Envisageons le groupe fuchsien G et la décomposition correspondante de la portion du plan située au-dessus de X en polygones curvilignes R_0, R_1, ... Décomposons de même la partie du plan située au-dessous de X en polygones curvilignes $R'_0 R'_1$, ..., symétriques de R_0, R_1, ...

Soit

$$t_k = \frac{z_k - \sqrt{-1}}{z_k + \sqrt{-1}}, \qquad t = \frac{z - \sqrt{-1}}{z + \sqrt{-1}}$$

J'appelle respectivement *fonction fuchsienne* et *fonction thétafuchsienne* deux fonctions $F(z)$ et $\Theta(z)$ uniformes, telles que

$$F(z_k) = F(z), \qquad \Theta(z_k) = \Theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}$$

(m étant un entier), et ne présentant d'autres singularités que celles de G.

Je dis d'abord qu'il existe de pareilles fonctions. Envisageons, en effet, la série

$$\Sigma_k \, H\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right)(\gamma_k z + \delta_k)^{-2m}(z_k + \sqrt{-1})^{-2m} = \Theta(z), \tag{2}$$

où m est un entier plus grand que 1 et où $H(z)$ est une fonction rationnelle de z n'ayant pas d'infini réel.

Je dis que cette série est convergente. Considérons d'abord la série

$$\Sigma \bmod \left(\frac{dt_k}{dt}\right)^m. \tag{3}$$

Envisageons une aire C_0 intérieure à R_0; quand z reste intérieur à C_0, z_k reste intérieur à une aire C_k, intérieure elle-même à R_k. Si z reste intérieur à C_0, t restera intérieur à une aire C'_0, et t_k à une certaine aire C'_k; et il est clair que les aires C' seront intérieures au cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, et n'empiéteront pas les unes sur les autres. La somme des aires C' est donc finie, c'est-à-dire que la série

$$\Sigma C'_k \tag{4}$$

est convergente. Si C'_0 était infiniment petite, on aurait

$$\frac{C'_k}{C'_0} = \bmod \left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2,$$

C'_0 étant fini, $\frac{C'_k}{C'_0}$ sera compris entre la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre $\bmod \left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$, quand t reste intérieur à C'_0. Mais on démontre que le rapport de cette plus grande et de cette plus petite valeur reste fini, quel que soit k. La série

$$\sum \text{la plus grande valeur de } \bmod \left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$$

est donc convergente, et par conséquent il en est de même de $\Sigma \bmod \left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$ et de la série (3).

Mais on a identiquement

$$(z_k + \sqrt{-1})^{-2m} H(z_k)(\gamma_k z + \delta_k)^{-2m} = H(z_k)\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^m (z + \sqrt{-1})^{-2m}.$$

et le module de $(z+\sqrt{-1})^{2m} H(z_k)$ n'augmente pas indéfiniment avec k. La série (2) est donc convergente et sa somme est indépendante de l'ordre de ses termes. J'ai supposé que z était intérieur à R_0, mais le même raisonnement s'appliquerait dans tous les cas possibles, pourvu que z ne soit ni un infini de H, ni un point singulier de G.

La fonction définie par la série (2) est donc uniforme et n'a d'autres points singuliers essentiels que ceux de G. Si G est de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, elle n'existe qu'au-dessus de X, et toute cette droite est pour elle une ligne singulière essentielle. Si G est d'une autre famille, elle existe dans tout le plan et ses points singuliers sont isolés, quoique en nombre infini.

Si G est de la première, de la troisième ou de la cinquième famille, $\Theta(z)$ n'aura, d'après la définition du paragraphe 4, d'autres singularités que celles de G. Si G est d'une autre famille, de la deuxième par exemple, on l'envisagera comme un cas particulier d'un groupe variable G', ainsi qu'il est dit au paragraphe 4; la fonction $\Theta(z)$ sera alors un cas particulier d'une fonction $\Theta'(z)$ formée avec G', comme elle l'est avec G; on démontre que $\Theta'(z)$ est une fonction continue de u pour $u=0$ et pour $u>0$; d'où

$$\Theta(z)=\lim\Theta'(z).$$

Mais $\Theta'(z)$ n'a d'autres singularités que celles de G'; donc $\Theta(z)$ n'a, d'après la définition du paragraphe 4, d'autres singularités que celles de G.

Elle jouit d'ailleurs de la propriété

$$\Theta(z_k)=\Theta(z)(\gamma_k z+\delta_k)^{2m}.$$

C'est une fonction thetafuchsienne.

7. Il est facile de trouver le nombre des zéros et des infinis de $\Theta(z)$ intérieurs à R_0. Les infinis de $\Theta(z)$ sont en effet ceux des fonctions rationnelles $H(z_k)$. Considérons un quelconque des infinis de $H(z)$ situé au-dessus de X, et par conséquent dans l'un des polygones de R. A cet infini correspondra un infini de chacune des fonctions $H(z_k)$, et chacun de ces infinis sera dans un polygone R différent; l'un d'eux sera intérieur à R_0; il résulte de là que le nombre des infinis de $\Theta(z)$ intérieurs à R_0 est égal à celui des infinis de $H(z)$ supérieurs à X. Ce nombre est donc fini.

Pour avoir celui des zéros, on prendra l'intégrale

$$\int \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)}$$

le long du périmètre de R_0. Si G est de la première, de la troisième ou de la cinquième famille, ce calcul ne présente aucune difficulté, car la somme des intégrales prises le long de deux côtés conjugués de R_0 a une valeur très simple.

Si G est d'une autre famille, on considérera $\Theta(z)$ de même qu'au paragraphe 4 comme un cas particulier de $\Theta'(z)$; la fonction Θ' étant continue pour $u \geqq 0$, le nombre des zéros de Θ sera égal au nombre constant des zéros de Θ'. Dans tous les cas, on trouve que le nombre des zéros est fini.

8. Comme le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe G et à une même valeur de m est une fonction fuchsienne, l'existence des fonctions fuchsiennes se trouve démontrée. Ces fonctions ne pourront prendre à l'intérieur de chacune des régions R un nombre infini de fois la même valeur.

Soient deux fonctions fuchsiennes F et F_1 correspondant à un même groupe G; à chacune des valeurs de F correspondra un nombre fini de valeurs de F_1 et réciproquement, de telle sorte que F et F_1 seront liées par une relation algébrique. Toutes les fonctions fuchsiennes correspondant à un même groupe seront donc fonctions algébriques les unes des autres. Elles s'exprimeront rationnellement en fonctions de deux d'entre elles que j'appelle x et y et entre lesquelles il y a une relation

$$f(x, y) = 0. \tag{5}$$

Le genre de cette relation est le genre du groupe G et des fonctions correspondantes.

Soit

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

la fonction $\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}$ sera une fonction fuchsienne et par conséquent une fonction rationnelle $\varphi(x, y)$ de x et de y. La fonction v est donc l'intégrale de l'équation linéaire

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y). \tag{6}$$

9. Si G est de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, et si $H(z)$ n'a pas d'infini supérieur à X, la fonction $\Theta(z)$ n'a pas d'infini et est holomorphe dans toute la région située au-dessus de X, c'est-à-dire dans toute la région où elle existe. Elle peut donc toujours être représentée par une série ordonnée suivant les puissances de t.

Lorsque G est de la première famille, et si le nombre entier m reste constant, toutes les fonctions $\Theta(z)$ sans infini s'expriment linéairement par un nombre fini d'entre elles.

10. La première question qui se présente est la détermination du genre p de la relation (5). On l'obtiendra en cherchant le nombre des cycles distincts que l'on peut faire décrire au point analytique (x, y) dans son plan multiple. Ce nombre est égal à $2p$. Je remarque d'abord que, quand x, y décrit un cycle dans son plan, z décrit dans le sien un arc de courbe dont les extrémités sont des points correspondants α, α_1. On obtiendra donc tous les cycles en joignant un point α à chacun des points correspondants par tous les arcs de courbe possibles.

J'appellerai un pareil arc, *arc cyclique*. Un cycle évanouissant est un cycle qui n'enveloppe aucun point singulier; l'arc cyclique correspondant sera dit aussi *évanouissant*.

Je suppose, pour fixer les idées, que G soit de la première, de la deuxième ou de la sixième famille. Il est clair qu'il faut rejeter d'abord tous les arcs de courbe dont les extrémités se confondent et qui se réduisent à un contour fermé, car on peut décomposer un pareil contour en contours infinitésimaux, et, si z décrit un contour infinitésimal, (x, y) ne peut décrire qu'un cycle évanouissant. De même deux arcs de courbe $\alpha m \alpha_1$, $\alpha n \alpha_1$ ayant mêmes extrémités ne donneront pas naissance à deux cycles distincts, car le premier est équivalent au second, plus le contour fermé $\alpha_1 n \alpha m \alpha_1$. J'obtiendrai donc tous les cycles distincts en joignant le point α à chacun des points correspondants par un seul arc de courbe.

Je dis de plus qu'il suffira de le joindre aux points correspondants limitrophes. En effet, soit α_i un point correspondant de α non limitrophe de α; on pourra trouver une série de points correspondants

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1}, \quad \alpha_i,$$

de telle façon que deux points consécutifs soient limitrophes. L'arc cyclique $\alpha\alpha_i$

sera alors la réunion des arcs cycliques $\alpha\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{i-1}\alpha_i$. Or les points α_k, α_{k+1} étant limitrophes, l'arc cyclique $\alpha_k\alpha_{k+1}$ sera équivalent à un arc $\alpha\alpha_r$, α_r étant limitrophe de α. Un cycle quelconque peut donc s'obtenir par une combinaison d'arcs cycliques tels que $\alpha\alpha_r$.

Soient maintenant R_1 le polygone dans lequel se trouve α_r; ab le côté de R_0 qui le sépare de R_1; $a'b'$ son conjugué. Il est évident que les arcs cycliques aa', $\alpha\alpha_r$, bb' sont équivalents.

D'où la règle suivante pour former tous les cycles distincts :

On considère un sommet quelconque a, le côté suivant, son conjugué, le sommet suivant a' et l'on joint aa'.

Mais ce nombre de cycles distincts peut encore être réduit si l'on remarque :

1° Que, si ab, $a'b'$ sont deux côtés conjugués, les arcs cycliques aa' et bb' sont équivalents;

2° Que tout contour fermé est un arc cyclique *évanouissant;*

3° Que, si les points a et a' se confondent, l'arc aa' est évanouissant.

11. Appliquons ces principes à quelques exemples :

1° Supposons-nous placés dans le premier cas du paragraphe 3 qui comprend le deuxième, le troisième et le quatrième. En appliquant la règle précédente, on trouve les arcs cycliques

$$A_1A_1, \quad A_2B_2, \quad A_3B_3, \quad \ldots, \quad A_nB_n, \quad A_{n+1}A_{n+1}.$$

Tous ces arcs sont équivalents, car A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1} étant conjugués, les cycles A_kB_k et $A_{k+1}B_{k+1}$ sont équivalents. Mais l'arc A_1A_1 est évanouissant. Le nombre des cycles distincts est donc nul; la relation (5) est de genre o.

Dans ce cas, toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'entre elles que j'appelle x, et dans l'équation (6) φ devient une fonction rationnelle de x devenant infinie pour $n+1$ valeurs de x :

$$a_1 = F(A_1), \quad a_2 = F(A_2) = F(B_2), \quad a_3 = F(A_3) = F(B_3), \quad \ldots, \quad a_{n+1} = F(A_{n+1})$$

Les points singuliers de l'équation (6) sont $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Si l'on n'est pas placé dans le deuxième cas, les intégrales sont régulières dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, et la différence des racines de l'équation déterminante est une partie aliquote de l'unité.

Dans le deuxième cas, il peut arriver, ou bien que les intégrales soient irrégulières, ou bien qu'elles soient régulières et que les racines de l'équation déterminante soient égales. De plus, il est évident que, dans ce deuxième cas, la fonction fuchsienne x ne peut prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

Le nombre des paramètres arbitraires dont on dispose est égal au nombre des conditions qu'on s'imposerait en assujettissant $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ à avoir des valeurs déterminées. Mais une discussion spéciale est nécessaire pour savoir si l'on peut effectivement disposer de ces paramètres pour satisfaire à ces conditions. J'ai fait cette discussion dans quelques cas particuliers, et j'ai reconnu qu'on peut toujours obtenir pour $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ des valeurs réelles données quelconques et que si $n=3$, on peut obtenir pour a_1, a_2, a_3, a_4 des valeurs réelles ou imaginaires quelconques.

On peut donc toujours construire une fonction fuchsienne $F(z)$ ne pouvant devenir égale à aucune des quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n+1},$$

quelles que soient les valeurs réelles de ces quantités, ou bien encore ne pouvant devenir égale à aucune des quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$

quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de ces quantités.

2° Supposons-nous placés dans le cinquième cas.

Je dis que le genre de (5) sera $\frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair.

En effet, supposons d'abord, pour fixer les idées, $n=4$. En appliquant la règle, on trouve les arcs cycliques

$$\begin{array}{llll} A_1A_6, & A_3A_8, & A_2A_7, & A_1A_4, \\ A_2A_5, & A_4A_7, & A_3A_6, & A_8A_5. \end{array}$$

Comme chaque arc de la première ligne est équivalent à celui qui est au-dessous de lui dans la deuxième ligne, on peut s'en tenir aux quatre arcs de la deuxième ligne, qui sont tous distincts. Le genre est donc égal à 2.

C. Q. F. D.

Soit maintenant $n=3$; en appliquant la règle, on trouve les arcs cycliques

$$\begin{array}{lll} A_1A_5, & A_3A_1, & A_5A_3, \\ A_2A_4, & A_4A_6, & A_6A_2, \end{array}$$

les arcs de la deuxième ligne ne sont pas distincts de ceux de la première. Ceux de la première, eux-mêmes, ne sont pas distincts entre eux, car, placés bout à bout dans l'ordre suivant

$$A_1 A_5, \quad A_5 A_3, \quad A_3 A_1,$$

ils forment un contour fermé.

Il reste donc deux cycles distincts et le genre est égal à 1. C. Q. F. D.

12. Je dis que n fonctions

$$\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z)$$

sont des fonctions zétafuchsiennes si elles sont uniformes, si elles jouissent de la propriété

$$\varphi_\lambda(z_k) = A_{1,\lambda}^{(k)} \varphi_1(z) + A_{2,\lambda}^{(k)} \varphi_2(z) + \ldots + A_{n,\lambda}^{(k)} \varphi_n(z)$$

(les A étant des constantes, dont le déterminant soit égal à 1) et enfin si elles ne présentent d'autres singularités que celles de G.

Les substitutions linéaires

$$y'_\lambda = A_{1,\lambda}^{(k)} y_1 + A_{2,\lambda}^{(k)} y_2 + \ldots + A_{n,\lambda}^{(k)} y_n$$

devront évidemment former un groupe H isomorphe à G.

J'appellerai

$$\alpha_{1,\lambda}^{(k)}, \quad \alpha_{2,\lambda}^{(k)}, \quad \ldots, \quad \alpha_{n,\lambda}^{(k)}$$

les mineurs du déterminant des $A^{(k)}$.

Cela posé, je considère les groupes G et H comme donnés, et j'envisage n fonctions rationnelles de z, $H_1(z)$, $H_2(z)$, ..., $H_n(z)$, convenablement choisies.

Je forme les n séries

$$(7) \qquad \Phi_\lambda(z) = \Sigma_k \left[\alpha_{\lambda,1}^{(k)} H_1(z_k) + \alpha_{\lambda,2}^{(k)} H_2(z_k) + \ldots + \alpha_{\lambda,n}^{(k)} H_n(z_k) \right] (\gamma_k z + \delta_k)^{-2m}.$$

Ces séries sont convergentes, pourvu que m soit assez grand.

Elles jouissent de la propriété

$$\Phi_\lambda(z_k) = \left[A_{1,\lambda}^{(k)} \Phi_1(z) + A_{2,\lambda}^{(k)} \Phi_2(z) + \ldots + A_{n,\lambda}^{(k)} \Phi_n(z) \right] (\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

On démontre dans tous les cas possibles (comme pour les fonctions thétafuchsiennes) que ces fonctions n'ont d'autres singularités que celles de G. Les fonctions

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{\Phi_\lambda(z)}{\Theta(z)},$$

où $\Theta(z)$ est une fonction thétafuchsienne quelconque, sont alors des fonctions zétafuchsiennes.

Il est clair que tout déterminant à n lignes, où chaque ligne sera formée d'un système de n fonctions zétafuchsiennes, sera lui-même une fonction fuchsienne. D'autre part, si x est la fonction fuchsienne définie au paragraphe 8, les dérivées d'ordre m des $\varphi_\lambda(z)$ par rapport à x formeront un système de n fonctions zétafuchsiennes.

Il résulte de là qu'un système de n fonctions zétafuchsiennes

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

satisfait à une équation linéaire de la forme

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n} + \mathrm{P}_2\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} + \mathrm{P}_3\frac{d^{n-3}\varphi}{dx^{n-3}} + \ldots + \mathrm{P}_{n-1}\frac{d\varphi}{dx} + \mathrm{P}_n\varphi = 0,$$

où les P sont rationnels en x et y.

13. Comment peut-on reconnaître quelles sont les équations linéaires qui sont intégrables par les fonctions zétafuchsiennes? Je ne puis examiner cette question dans toute sa généralité sans dépasser les bornes que je m'impose dans ce résumé. Je me bornerai à quelques exemples.

Considérons l'équation

$$(8) \qquad \frac{d^n\varphi}{dx^n} + \mathrm{P}_2\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} + \ldots + \mathrm{P}_n\varphi = 0,$$

où les P sont rationnels.

1° Supposons d'abord qu'elle ne présente que des points singuliers réels. Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p$$

ces points singuliers; d'après ce que nous avons vu plus haut, nous pouvons toujours construire une fonction fuchsienne

$$x = f(z)$$

ne pouvant prendre aucune des valeurs

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p.$$

Si l'on substitue $f(z)$ à la place de x dans l'équation (8), il est clair que les intégrales de ces équations seront des fonctions zétafuchsiennes de z. Une remarque importante, c'est que ces fonctions zétafuchsiennes peuvent être représentées par une série ordonnée suivant les puissances de t et *toujours convergente* [1].

[1] C'est à dire convergente pour $|t| < 1$. N. E. N.

Toute fonction algébrique pouvant être regardée comme l'intégrale d'une équation linéaire à coefficients rationnels, le même procédé permet, *si tous les points singuliers sont réels*, d'exprimer par des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire les coordonnées des points d'une courbe algébrique.

2° Supposons maintenant que tous les points singuliers soient sur différents cercles qui *se coupent en deux points a et b sous des angles commensurables avec* 2π.

Je puis, par un changement de variable très simple, amener tous les points singuliers à avoir des arguments commensurables.

Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p$$

ces points singuliers. Supposons que tous leurs arguments soient multiples de $\frac{2\pi}{n}$; les quantités

$$a_1^n, \quad a_2^n, \quad \ldots, \quad a_p^n$$

seront réelles. On pourra construire une fonction fuchsienne $f(z)$ ne pouvant prendre aucune des valeurs *réelles*

$$0, \quad a_1^n, \quad a_2^n, \quad \ldots, \quad a_p^n, \quad \infty.$$

Comme $f(z)$ ne peut devenir ni nul, ni infini, $\sqrt[n]{f(z)}$ sera uniforme en z; et comme $f(z)$ ne peut prendre aucune des valeurs

$$a_1^n, \quad a_2^n, \quad \ldots, \quad a_p^n,$$

$\sqrt[n]{f(z)}$ ne pourra prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Si donc on substitue $\sqrt[n]{f(z)}$ à la place de x dans l'équation (8), les intégrales de cette équation seront fonctions zétafuchsiennes de z.

3° Nous avons vu plus haut qu'on pouvait toujours construire une fonction fuchsienne ne pouvant devenir égale à aucune des quatre quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$

quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de ces quantités. On en déduirait, par un raisonnement tout semblable à ceux qui précèdent, que les fonctions zétafuchsiennes permettent d'intégrer toutes les équations linéaires à coefficients rationnels, toutes les fois qu'il n'y a que quatre points singuliers.

14. Tout ce qui est relatif à la convergence des séries (2) et (7) s'applique encore si le groupe G est un groupe kleinéen quelconque. On peut donc définir des fonctions thétakleinéennes, kleinéennes et zétakleinéennes, analogues aux fonctions thetafuchsiennes, fuchsiennes et zétafuchsiennes, et susceptibles des mêmes applications.

L'intégration d'une équation linéaire pourra, dans un très grand nombre de cas [1], s'effectuer d'une infinité de manières à l'aide des fonctions zétafuchsiennes et zetakleinéennes : ce qui permet d'établir entre ces fonctions une infinité de relations que le défaut d'espace ne me permet pas d'étudier dans ce résumé.

15. Une autre application des fonctions fuchsiennes est le calcul des intégrales abéliennes de première espèce. Reprenons, en effet, les deux fonctions fuchsiennes x et y définies au paragraphe 8 et liées par la relation (5).

Soit

$$\int g(x, y)\, dx$$

une intégrale abélienne de première espèce quelconque. Ce sera une fonction de z que j'appellerai $G(z)$. On démontre aisément que si le groupe G est de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, $G(z)$ est une fonction holomorphe de z toutes les fois que z est au-dessus de X ; cette fonction jouit de la propriété

$$G(z_k) - G(z) = \text{const.}$$

Il est clair d'ailleurs que $G(z)$ peut être représenté par une série ordonnée suivant les puissances de t et toujours convergente.

16. Je ne parlerai pas ici des applications arithmétiques des fonctions fuchsiennes, me bornant à renvoyer à mes Notes sur les invariants arithmétiques et sur l'application de la géométrie non euclidienne à la théorie des formes quadratiques [Association française pour l'Avancement des Sciences, Congrès d'Alger [2]]. Les invariants arithmétiques se ramènent très aisément aux

[1] J'ai démontré dans ma Communication du 8 août que les fonctions zétafuchsiennes intègrent toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

[2] 15 avril 1881, p. 109-117 ; 16 avril 1881, p. 132-138. *Cf.* aussi le Mémoire ***Sur les invariants arithmétiques***, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 129, p. 89-150.

N. E. N.

fonctions thétafuchsiennes, et l'on peut ramener aussi aux groupes fuchsiens les groupes de substitutions linéaires à coefficients entiers, qui reproduisent une forme quadratique ternaire indéfinie à coefficients entiers [1].

---

[1] Il existe une expression très simple du genre p de la relation (5). J'appelle $2n$ le nombre des côtés de la première sorte, q celui des côtés de la deuxième sorte, a celui des cycles formés de sommets de la première ou de la deuxième catégorie, b celui des cycles formés d'un nombre impair de sommets de la troisième catégorie, c celui des cycles formés d'un nombre pair de sommets de la troisième catégorie : on trouve

$$2p = n - a + 1$$

pour les fonctions de la première, de la deuxième et de la sixième famille, et

$$2p = 2n - 2a - 4c + q - b \text{ [*]}$$

pour les fonctions des autres familles.

[*] Le second membre doit être : $2n - 2a - c + q - b$ et l'équation se réduit par conséquent à $p = n - a$. N. E. N.

SUR LES FONCTIONS UNIFORMES

QUI SE REPRODUISENT

PAR DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

Mathematische Annalen, t. 19, p. 553-564.

1. Les fonctions que je veux étudier dans ce travail ont les plus grandes analogies avec les fonctions elliptiques et modulaires qui n'en sont que des cas particuliers. On sait quels services les transcendantes à deux périodes ont rendus à l'analyse, et l'on comprend que tous les géomètres ont dû avoir l'idée qu'il y avait lieu de les généraliser. Les fonctions elliptiques ont pour propriété essentielle de se reproduire quand on augmente leur argument ζ de l'une des périodes. Le plan se trouve partagé en une infinité de parallélogrammes qui forment une sorte de damier dont l'ensemble ne varie pas, mais dont les cases se permutent quand on augmente ζ de l'une des périodes.

Nous allons rechercher s'il existe une fonction uniforme $F(\zeta)$ qui ne change pas quand on applique à ζ l'une des substitutions linéaires en nombre infini

$$S_i = \left(\zeta, \frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right).$$

Je suppose que l'indice i prend toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots$ *ad inf.* et que l'on a

$$\alpha_0 = \delta_0 = 1, \qquad \gamma_0 = \beta_0 = 0, \qquad \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1.$$

En d'autres termes, je cherche s'il y a une fonction uniforme $F(\zeta)$ jouissant de la propriété

$$F(\zeta) = F\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right).$$

Il est clair que les substitutions S_i devront former un groupe et un groupe discontinu, c'est-à-dire que la portion du plan où la fonction F existe peut être divisée en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ telles que quand ζ parcourt R_0, $\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}$ parcourt R_i. Ces diverses régions formeront, comme dans le cas des fonctions elliptiques, une sorte de damier dont l'ensemble ne variera pas, mais dont les cases se permuteront quand on appliquera à ζ l'une des substitutions S_i. A chacune des substitutions S_i correspond de la sorte une des régions R_i.

Si l'on appelle *points correspondants* les divers points $\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}$, la fonction F reprendra la même valeur en deux points correspondants et il y aura dans chacune des régions R_i un point correspondant à un point donné et un seul. Deux régions R seront dites *limitrophes* quand elles seront contigues tout le long d'un arc de leur périmètre. Les substitutions qui correspondent aux régions limitrophes de R_0 sont des *substitutions fondamentales* dont toutes les substitutions S_i seront des combinaisons. Il en résulte que le groupe sera complètement déterminé quand on connaîtra ces substitutions fondamentales et par conséquent quand on connaîtra le polygone R_0 et les polygones limitrophes.

2. Je vais chercher d'abord à former tous les groupes discontinus formés de substitutions S_i où les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sont réels.

Je les appelle *groupes fuchsiens*. Dans ce cas, il est aisé de voir que les régions R_i qui forment le *damier* peuvent être réduites à des polygones curvilignes situés tout entiers au-dessus de l'axe des quantités réelles (que j'appelle pour abréger X) et ayant des côtés de deux sortes; ceux de la première sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X lui-même.

Chacune des substitutions fondamentales du groupe changera le polygone R_0 en un polygone limitrophe R_1, et par conséquent l'un des côtés de la première sorte ab de R_0 en un autre côté cd de ce même polygone. Cela montre que les côtés de la première sorte sont en nombre pair et se répartissent en paires de côtés conjugués (ab, cd). Si a', b', c', d' sont les quantités imaginaires conjuguées de a, b, c, d, on devra avoir

$$(1) \qquad \frac{a-a'}{a-b'}\,\frac{b-b'}{b-a'} = \frac{c-c'}{c-d'}\,\frac{d-d'}{d-c'}.$$

Cette condition est suffisante pour qu'il existe une substitution S_i à coefficients réels, qui change *ab* en *cd*; cette substitution est d'ailleurs parfaitement déterminée. Il résulte de là que, si l'on se donne le polygone R_0 et la distribution de ses côtés en paires, les substitutions fondamentales et par conséquent le groupe lui-même seront parfaitement déterminés.

Nous avons vu qu'on ne pouvait avoir deux points correspondants à l'intérieur de R_0; les points du périmètre, au contraire, se correspondent deux à deux, de manière qu'un côté corresponde à son conjugué. De plus, deux ou un plus grand nombre de sommets pourront être des points correspondants. Je dirai alors qu'ils appartiennent à un même cycle.

Voici une règle pratique pour former les cycles; on partira d'un sommet quelconque, on considérera le côté suivant (en parcourant le périmètre de R_0 dans un sens convenu) si ce côté est de la première sorte, puis le côté conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant s'il est de la première sorte, puis son conjugué, etc.; on ne sera arrêté que si l'on arrive à un côté de la deuxième sorte, auquel cas le cycle sera *ouvert*, ou si l'on retombe sur le sommet qui a servi de point de départ, auquel cas le cycle sera *fermé*. Tous les sommets rencontrés de la sorte formeront un cycle.

Un cycle fermé sera de la première catégorie si tous ses sommets sont au-dessus de X et de la deuxième dans le cas contraire.

Nous avons vu que, pour déterminer un groupe fuchsien il suffit de connaître R_0 et la distribution de ses côtés en paires. On connaît en effet les substitutions fondamentales, et l'on peut construire les polygones limitrophes de R_0, puis les polygones limitrophes de ceux-ci, et ainsi de suite. Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que les polygones obtenus de la sorte recouvrent toute une partie du plan et ne la recouvrent qu'une fois, de manière à former un damier.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi? Je les ai déterminées par des procédés empruntés à la géométrie non euclidienne; j'ai montré qu'outre la condition (1) le polygone R_0 est assujetti à la condition suivante :

La somme des angles qui correspondent aux divers sommets d'un cycle de la première catégorie doit être une partie aliquote de 2π.

3. Pour former tous les groupes fuchsiens, il suffira donc de former tous

les polygones R_0 qui satisfont à ces deux conditions. En voici quelques exemples :

PREMIER CAS. — Je suppose que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés de la première sorte dont les sommets se succèdent dans l'ordre suivant : $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2, A_1$; les côtés A_1A_2, A_1B_2; A_2A_3, B_2B_3; ...; A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}; ...; A_nA_{n+1}, B_nA_{n+1} seront conjugués; il y aura alors $n+1$ cycles formés respectivement des sommets

$$A_1;\quad A_2, B_2;\quad A_3, B_3;\quad A_4, B_4;\quad \ldots;\quad A_n, B_n;\quad A_{n+1}.$$

Le polygone R_0 satisfera à la condition (1) et de plus les angles A_1, A_2+B_2, A_3+B_3, ..., A_n+B_n, A_{n+1} seront des parties aliquotes de 2π.

Si je suppose de plus que le polygone est symétrique par rapport à A_1A_{n+1} et que cette droite est perpendiculaire à X, R_0 se trouvera divisé en deux polygones $R'_0 = A_1A_2\ldots A_{n+1}$, et $R''_0 = A_1B_2B_3, \ldots, B_nA_{n+1}$ dont tous les angles seront des parties aliquotes de π. Chacun des polygones R_i du damier se trouvera de même divisé en deux polygones R'_i et R''_i. Le damier sera ainsi formé d'une infinité de polygones R'_i, R''_i et de telle sorte que deux polygones limitrophes soient dérivés l'un de l'autre par une transformation par *rayons vecteurs réciproques* qui n'altère pas leur frontière commune. Si l'on suppose en particulier $n=2$, on retombera sur le cas examiné par M. Schwarz au tome 75 du *Journal de Crelle*.

DEUXIÈME CAS. — Je suppose que les sommets du polygone R_0 soient au nombre de $2n$ et que les côtés opposés soient conjugués. Si n est pair, tous les sommets appartiennent au même cycle et la somme des angles doit être une partie aliquote de 2π. Si n est impair, il y a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang impair, l'autre de tous les sommets de rang pair. La somme de tous les angles de rang pair, comme celle de tous les angles de rang impair, devra diviser 2π.

TROISIÈME CAS. — R_0 a huit sommets A, B, C, D, E, F, G, H; les côtés BC, DE, FG, HA sont de la deuxième sorte; les côtés AB et CD, EF et GH sont conjugués; tous les cycles sont *ouverts;* un pareil polygone n'est assujetti à *aucune* condition.

QUATRIÈME CAS. — L'un des cas particuliers les plus remarquables est celui où les coefficients des S_i sont entiers, et qui a fait l'objet des savantes recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

4. J'ai supposé jusqu'ici que les coefficients des S_i étaient réels; il est facile de faire une première généralisation. Posons

$$t = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \qquad t_i = \frac{\alpha_i \dfrac{a\zeta + b}{c\zeta + d} + \beta_i}{\gamma_i \dfrac{a\zeta + b}{c\zeta + d} + \delta_i},$$

a, b, c, d étant quatre constantes imaginaires telles que

$$ad - bc = 1.$$

A la substitution S_i correspond la substitution linéaire

$$T_i = (t, t_i)$$

dont les coefficients sont imaginaires. Mais, de même que les substitutions S_i conservent X et changent également en lui-même le demi-plan qui est au-dessus de cet axe, de même les substitutions T_i conserveront un certain cercle qui a pour équation

$$\text{partie imaginaire de } \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = 0,$$

et que j'appellerai *cercle fondamental*. De plus, si les substitutions S_i forment un groupe discontinu, il en sera de même des substitutions T_i; à chacune d'elles correspondra, comme dans le cas précédent, une case d'un certain damier formé par des polygones R dont les côtés de la première sorte sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental et ceux de la deuxième sorte sont des arcs du cercle fondamental. Mais la surface totale de ce damier sera finie (contrairement à ce qui avait lieu dans le cas précédent), car elle ne recouvrira que l'intérieur du cercle fondamental ou une partie seulement de ce cercle. Nous conserverons le nom de *fuchsiens* à ces groupes dont les groupes à substitutions réelles ne sont que des cas particuliers.

Reste à examiner le cas le plus général, celui où l'on ne fait aucune hypothèse sur les substitutions S_i. Dans ce cas, il y a encore des groupes discontinus que j'ai appelés *kleinéens* et dont j'ai démontré l'existence et étudié le mode de génération par des procédés empruntés à la géométrie non euclidienne à trois dimensions. Dans certains cas particuliers, des méthodes plus simples peuvent être employées; mais, dans le cas le plus général, les conditions auxquelles sont assujettis les groupes kleinéens sont très compliquées et ne peuvent être énoncées ici. Nous aurons encore un damier dont les cases, en nombre infini, seront des polygones limités par des arcs de cercle, et dont la surface totale sera en général finie.

5. De l'existence des groupes discontinus on pourrait sans doute, par des procédés analogues à ceux de M. Schwarz, déduire celle de fonctions uniformes reproduites par les substitutions de ce groupe; mais on n'aurait pas ainsi l'expression explicite de ces transcendantes. Aussi est-il préférable d'employer d'autres méthodes. Mon point de départ est ce fait que la série

$$\sum_i \operatorname{mod} \frac{1}{(\gamma_i\zeta + \delta_i)^{2m}}$$

(où m est un entier plus grand que 1) est convergente. Je m'appuie sur ce que l'aire totale du damier est finie : dans les cas particuliers où cela ne serait pas, un changement linéaire convenablement choisi de la variable nous ramènerait au cas général. La série

$$\Theta(\zeta) = \sum H\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right) \frac{1}{(\gamma_i\zeta + \delta_i)^{2m}},$$

où $H(\zeta)$ est une fonction rationnelle quelconque, est convergente et définit une fonction uniforme de ζ.

Cette fonction jouit de la propriété

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right) = \Theta(\zeta)(\gamma_i\zeta + \delta_i)^{2m}.$$

De plus, le nombre des zeros et des infinis de cette fonction interieurs à R_0 est toujours fini, ce que j'établis par la considération de l'integrale

$$\int \frac{\Theta'(\zeta)\, d\zeta}{\Theta(\zeta)}$$

si aucun des angles de R_0 n'est nul, et par un raisonnement plus compliqué dans le cas contraire. $\Theta(\zeta)$ s'appellera une fonction *thétafuchsienne* ou *thétakleinéenne*, selon que le groupe correspondant sera fuchsien ou kleineen.

Soit $F(\zeta)$ le quotient de deux fonctions telles que $\Theta(\zeta)$ correspondant à une même valeur de m. Il est clair qu'à l'interieur de R_0 cette fonction n'aura qu'un nombre fini de zeros et d'infinis et qu'elle jouira de la propriéte

$$F\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right) = F(\zeta).$$

Nous appellerons *fonction fuchsienne* (ou *kleinéenne*) toute fonction jouissant de ces deux proprietes.

Occupons-nous d'abord des fonctions fuchsiennes. Si le polygone R_0 n'admet pas de cycle ouvert, les fonctions Θ et F n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont la circonférence est pour elles une ligne singulière essentielle. Dans certains cas particuliers même, les transcendantes n'existent pas dans tout le cercle fondamental, mais seulement dans un domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental [1]. Si au contraire R_0 admet des cycles ouverts, les fonctions Θ et F existent dans tout le plan et leurs points singuliers sont isolés, quoique en nombre infini.

Supposons de nouveau que R_0 n'admette pas de cycle ouvert. Si $H(\zeta)$ a des infinis intérieurs au cercle fondamental, la fonction Θ aura des infinis et l'on sera certain qu'elle n'est pas identiquement nulle. Mais si $H(\zeta)$ ne devient pas infini à l'intérieur du cercle fondamental, la fonction Θ sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle et pourra même être identiquement nulle. Et, en effet, on voit aisément que toutes les fonctions Θ *sans infini* peuvent (*pour une même valeur de m*) s'exprimer linéairement par un nombre fini d'entre elles. Ces relations linéaires, dont l'existence se démontre aisément *a priori*, peuvent être *effectivement* écrites, grâce à la considération de fonctions auxiliaires de la forme

$$\sum \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right)}{\zeta - \dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2m}}. \tag{2}$$

C'est de la même manière qu'on arrive à exprimer une fonction fuchsienne donnée à l'aide de séries telles que Θ et cela d'une infinité de manières; mais je ne puis insister davantage sur ce point, cela m'entraînerait trop loin.

Passons maintenant aux fonctions kleinéennes. Les unes existeront dans tout le plan et auront des points singuliers isolés; les autres n'existeront que dans un certain domaine. La limite de ce domaine n'est pas une courbe analytique; la tangente en un de ses points est généralement déterminée, mais il n'en est pas de même du rayon de courbure.

6. Entre deux fonctions fuchsiennes (ou kleinéennes) F et F_1 correspondant à un même groupe, il y a toujours une relation algébrique, car à une valeur de F correspondent un nombre fini de valeurs de F_1 et réciproquement. Toutes les fonctions qui correspondent à un même groupe s'exprimeront donc ration-

---

[1] Ce cas d'exception n'a pas lieu; la fonction existe toujours dans tout le cercle fondamental.
N. E. N.

nellement en fonctions de deux d'entre elles que j'appelle x et y et entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{3}$$

Quel est le genre de cette relation ? La géométrie de situation permet aisément de le déterminer. Soient $2n$ le nombre des côtés de la première sorte, p celui des cycles fermés. Le genre sera $\frac{n+1-p}{2}$ s'il n'y a pas de cycle ouvert et $n-p$ s'il y en a. Reprenons les exemples que nous avons envisagés plus haut. Dans le premier cas, le genre est nul; dans le deuxième, il est $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair; dans le troisième, il est égal à 2.

7. Nous allons voir maintenant comment les fonctions x et y définies plus haut permettent d'intégrer certaines équations linéaires du second ordre. Soit

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\zeta}}, \qquad v_2 = \zeta\sqrt{\frac{dx}{d\zeta}},$$

les fonctions v_1 et v_2 seront des intégrales d'une équation linéaire du second ordre de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y), \tag{4}$$

φ étant rationnel en x et en y, et y étant lié à x par la relation algébrique (3). Ici x est une fonction fuchsienne ou kleinéenne du rapport ζ des intégrales. *Il existe donc des équations linéaires de la forme (4) telles que la variable indépendante soit une fonction uniforme du rapport des intégrales.*

Il s'agit maintenant, étant donnée une équation de la forme (4), de reconnaître si x est fonction fuchsienne ou fonction kleinéenne, ou encore fonction non uniforme du rapport des intégrales et, dans les deux premiers cas, d'exprimer x à l'aide des séries Θ. Le second problème peut se résoudre à l'aide des considérations dont j'ai parlé plus haut et qui permettent d'exprimer toute fonction fuchsienne par les séries Θ. Disons quelques mots du premier problème.

Les conditions auxquelles sont assujettis les coefficients de l'équation (4) pour que x soit fonction uniforme du rapport des intégrales sont très compliquées; voici quelle est la forme la plus simple sous laquelle on pourra les présenter : on pourra exprimer les coefficients de l'équation (4) en fonctions transcendantes, mais *uniformes* d'un nombre égal de paramètres auxiliaires convenablement choisis. Les conditions cherchées se réduiront alors à un certain nombre d'inégalités ou d'égalités *algébriques* entre les parties réelles et imaginaires de ces nouveaux paramètres. Je ne puis ici entrer dans plus de détails.

8. J'ajouterai cependant quelques mots en ce qui concerne le cas le plus simple, celui où l'équation (4) est de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \frac{P_n}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda},$$

P_n étant un polynome de degré n en x.

Supposons d'abord

(5) $$\alpha \leqq 2, \qquad \beta \leqq 2, \qquad \ldots, \qquad \lambda \leqq 2, \qquad n \leqq \alpha + \beta + \ldots + \lambda - 2.$$

C'est le cas où les intégrales sont *régulières* (suivant l'expression de M. Fuchs) dans le voisinage de chacun des points singuliers $a, b, \ldots, l, \infty$. Pour que x soit une fonction uniforme du rapport des intégrales, il faut d'abord que la différence des racines de chaque équation déterminante soit nulle ou soit une partie aliquote de l'unité. Mais cette condition n'est pas suffisante. Si de plus les coefficients de P_n satisfont à certaines *inégalités*, x sera fonction *kleinéenne* du rapport des intégrales; s'ils satisfont en outre à certaines *égalités*, x sera fonction fuchsienne de ce rapport. Donc, si l'on suppose remplie la condition relative aux équations déterminantes, il suffit pour que x soit fonction uniforme du rapport ζ des intégrales, que certaines quantités soient comprises entre certaines limites; pour que ce soit une fonction fuchsienne de ce rapport ζ, il faut en outre que ces quantités prennent certaines valeurs déterminées.

Si x est fonction fuchsienne de ζ, cette fonction n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Si nous supposons de plus que les racines de chaque équation déterminante soient égales, nous verrons aisément que x ne peut prendre aucune des valeurs $a, b, \ldots, l, \infty$ quand ζ est intérieur au cercle fondamental.

Supposons maintenant que les inégalités (5) cessent d'avoir lieu, de telle sorte que les intégrales deviennent *irrégulières*. Dans ce cas, x pourra encore être fonction fuchsienne de ζ, mais cette fonction, au lieu d'exister dans tout le cercle fondamental, n'existera plus que dans un domaine limité par une infinité de circonférences qui coupent orthogonalement ce cercle [1].

---

[1] Ce résultat a été retiré plus tard. Cf. *Mémoires sur les fonctions zetafuchsiennes*, *Acta mathematica*, t. V, p. 211; et ce tome plus loin. N. E. N.

9. Nous avons vu qu'une fonction fuchsienne peut s'exprimer à l'aide de séries telles que Θ; mais on en peut trouver beaucoup d'autres expressions. Si par exemple x ne peut devenir infini quand ζ est intérieur au cercle fondamental, on pourra exprimer cette fonction par une série toujours convergente et ordonnée suivant les puissances croissantes de $\zeta - \zeta_0$ (ζ_0 étant le centre du cercle fondamental). Dans le cas contraire, on pourra représenter x d'une infinité de manières comme le quotient de deux pareilles séries dont on pourra calculer les coefficients par récurrence. Enfin, nous pourrons encore exprimer une fonction fuchsienne d'une infinité de manières à l'aide de séries telles que (2).

10. J'ai démontré le théorème suivant :

On peut toujours construire une fonction fuchsienne $F(\zeta)$ *n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et ne pouvant prendre à l'intérieur de ce cercle aucune des* $n+1$ *valeurs données*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \infty.$$

Le calcul numérique des constantes qui servent à construire cette fonction est assez long; mais si, au lieu de calculer exactement ces constantes, on n'en prend que des valeurs approchées, on aura construit, au lieu de $F(\zeta)$, une fonction kleinéenne jouissant des mêmes propriétés.

Ce théorème a une première conséquence importante. Soit une relation algébrique quelconque

$$f(x, y) = 0$$

admettant comme points singuliers

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Faisons-y

$$x = F(\zeta),$$

$F(\zeta)$ étant la fonction définie plus haut; tant que ζ sera à l'intérieur du cercle fondamental, x ne pourra passer par aucun des points singuliers; si ζ sort de ce cercle, x cessera d'exister. Il résulte de là que y est une fonction uniforme de ζ qui n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental et l'on voit aisément que cette fonction est une fonction fuchsienne.

Donc les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque peuvent s'exprimer par des fonctions fuchsiennes d'un même paramètre ζ.

11. Considérons maintenant une équation linéaire quelconque

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \ldots + P_1 \frac{dv}{dx} + P_0 v = 0. \tag{6}$$

Je suppose que les P soient des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées entre elles par une relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{7}$$

et qu'on ait fait disparaître le coefficient de $\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}$, ce qui est toujours possible. Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

les points singuliers de l'équation (7) et les infinis des P. Faisons, comme dans le paragraphe précédent,

$$x = F(\zeta).$$

On démontrerait, par un raisonnement tout semblable à celui qui précède, que les n intégrales de l'équation (6) sont des fonctions $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$, ..., $\varphi_n(\zeta)$ uniformes en ζ et n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Ces fonctions, comme $F(\zeta)$ d'ailleurs, peuvent s'exprimer par des séries toujours convergentes ordonnées suivant les puissances de $\zeta - \zeta_0$ et dont les coefficients se calculent par récurrence.

12. Je dis que n fonctions

$$\varphi_1(\zeta), \quad \varphi_2(\zeta), \quad \ldots, \quad \varphi_n(\zeta)$$

sont des fonctions zétafuchsiennes si elles sont uniformes et si elles jouissent de la propriété

$$\varphi_\lambda\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right) = A^i_{1,\lambda}\,\varphi_1(\zeta) + A^i_{2,\lambda}\,\varphi_2(\zeta) + \ldots + A^i_{n,\lambda}\,\varphi_n(\zeta). \tag{8}$$

Les A sont des constantes dont le déterminant est l'unité, et les substitutions $\left(\zeta, \frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right)$ sont toutes celles d'un groupe fuchsien G. Les substitutions linéaires

$$y'_\lambda = A^i_{1,\lambda}\,y_1 + A^i_{2,\lambda}\,y_2 + \ldots + A^i_{n,\lambda}\,y_n$$

devront évidemment former un groupe H isomorphe à G.

Les fonctions φ_1, φ_2, ..., φ_n du paragraphe précédent sont évidemment des fonctions zétafuchsiennes, ce qui me permet d'énoncer le résultat suivant :

Toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques est intégrable par les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes.

Mais le procédé indiqué au paragraphe précédent n'est pas unique : au lieu de substituer $F(\zeta)$ à la place de x dans l'équation (6), on aurait pu substituer une infinité d'autres fonctions fuchsiennes et l'on aurait également obtenu pour les intégrales un système de fonctions zétafuchsiennes. On aurait pu aussi substituer à la place de x une infinité de fonctions kleinéennes, et les intégrales auraient été des fonctions zétakleinéennes formées avec un groupe kleinéen comme les fonctions zétafuchsiennes le sont avec un groupe fuchsien. Le nombre des intégrations de l'équation (6) à l'aide des transcendantes nouvelles est donc infini.

13. Nous ne pourrons dire toutefois que nous avons intégré l'équation (6) que quand nous aurons donné une expression explicite des fonctions φ_1, φ_2, ..., φ_n ; nous en avons une déjà, il est vrai, sous la forme de séries toujours convergentes et ordonnées suivant les puissances de $\zeta - \zeta_0$, ou bien encore sous la forme d'un quotient de deux pareilles séries. Mais on peut en donner une expression différente analogue à celle des fonctions fuchsiennes à l'aide des séries Θ.

Soient (en reprenant les constantes A du paragraphe précédent)

$$a_{1,\lambda}^{i}, \quad a_{2,\lambda}^{i}, \quad \ldots, \quad a_{n,\lambda}^{i}$$

les mineurs du déterminant des A^i.

Cela posé, je considère les groupes G et H comme données, et j'envisage n fonctions rationnelles de ζ, $H_1(\zeta)$, $H_2(\zeta)$, ..., $H_n(\zeta)$. Je forme les n séries

$$\begin{aligned}(9)\qquad \Phi_\lambda(\zeta) = \sum_i \Big[& a_{\lambda,1}^{i}\, H_1\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right) + a_{\lambda,2}^{i}\, H_2\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right) + \ldots \\ & + a_{\lambda,n}^{i}\, H_n\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right)\Big](\gamma_i\zeta+\delta_i)^{-2m}.\end{aligned}$$

Ces séries sont convergentes, pourvu que m soit assez grand. Elles jouissent de la propriété

$$\Phi_\lambda\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right) = [A_{1,\lambda}^{i}\,\Phi_1(\zeta) + A_{2,\lambda}^{i}\,\Phi_2(\zeta) + \ldots + A_{n,\lambda}^{i}\,\Phi_n(\zeta)](\gamma_i\zeta+\delta_i)^{2m}.$$

Les n fonctions

$$\frac{\Phi_\lambda(\zeta)}{\Theta(\zeta)},$$

où $\Theta(\zeta)$ est la série du paragraphe 5, sont des fonctions zétafuchsiennes et, si l'on considérait un système quelconque de fonctions zétafuchsiennes, on verrait que ces fonctions peuvent toujours s'exprimer rationnellement par un certain nombre de séries de la forme $\Theta(\zeta)$ et de séries de la forme (9).

14. Je n'ai pu donner ici les démonstrations de ces théorèmes, je n'ai pu qu'énoncer des résultats en supprimant tous les raisonnements intermédiaires que je publierai prochainement dans un travail de longue haleine. L'énoncé des résultats eux-mêmes n'a pu être complet, je prie le lecteur de vouloir bien m'excuser.

Je ne parlerai pas ici des applications des fonctions fuchsiennes à l'arithmétique et au calcul des intégrales abéliennes de première espèce, et je me bornerai à résumer en ces quelques lignes les résultats de ce travail :

Si l'on envisage une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques, on peut exprimer la variable indépendante et les intégrales en fonctions uniformes d'un même paramètre ζ.

Ces fonctions uniformes peuvent d'une infinité de manières s'exprimer rationnellement par un certain nombre de séries à coefficients entiers ou rationnels (¹).

Paris, 17 décembre 1881.

(¹) Die vorstehend abgedruckte Arbeit des Herrn Poincaré resumirt gewisse Resultate, welche der Verfasser in einer Reihe aufeinanderfolgender Artikel in den Comptes rendus dieses Jahres mitgetheilt hat. Es wird kaum nöthig sein, dieselben der Beachtung der Mathematiker noch besonders zu empfehlen. Handelt es sich doch um Functionen, welche geeignet scheinen, in der Lehre von den algebraischen Irrationalitäten den Abel'schen Functionen erfolgreiche Concurrenz zu machen, und die überdies einen ganz neuen Einblick in diejenigen Abhängigkeiten gewähren, welche durch lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten bestimmt sind. Indem ich Herrn Poincaré im Namen der Annalenredaction den besonderen Dank dafür ausspreche, dass er uns vorstehenden Aufsatz hat überlassen wollen, glaube ich ihm nur in dem Punkte entgegentreten zu sollen, dass ich die von ihm vorgeschlagene Benennung der in Betracht kommenden Functionen als verfrüht bezeichne. Einmal nämlich bewegen sich alle die Untersuchungen, welche Hr. Schwarz und ich in der betreffenden Richtung bislang veröffentlicht haben, auf dem Gebiete der « fonctions fuchsiennes », über die Hr. Fuchs selbst nirgends publicirt hat. Andererseits habe ich über die allgemeineren Functionen, welche Hr. Poincaré mit meinem Namen in Verbindung bringt, von mir aus bisher nichts drucken lassen; ich habe nur gelegentlich Herrn Poincaré auf die Existenz dieser Functionen aufmerksam gemacht [siehe *Comptes rendus*, t. XCII, 1881 (²), p. 1484]. Letzterer Umstand ist aber um so irrelevanter, als sich ein specieller Fall jener allgemeineren Functionen bereits anderwärts bei Gelegenheit in Betracht gezogen findet, nämlich in der Arbeit von Hrn. Schottky im 83ten Bande von *Borchardt's Journal*. Es werden dort (p. 346 ff.) Functionen besprochen, welche sich symmetrisch reproduciren, wenn man einen ebenen Bereich, der von lauter getrennten Kreislinien begrenzt ist, an eben diesen Kreislinien spiegelt. Uebrigens möchte ich auch auf die Dyck'schen Arbeiten im 17ten und 18ten Bande dieser Annalen sowie insbesondere auf dessen demnächst (in Bd. XX) erscheinende Habilitationsschrift verweisen, wo Gebietseintheilungen der allgemeinsten hier in Betracht

(²) Ce Tome p. 21. N. E. N.

kommen Art zu gruppentheoretischen Zwecken verwandt werden. — Vielleicht ist es gut, diesen kleinen Bemerkungen noch eine allgemeinere zuzugesellen und bei vorliegender Gelegenheit zu constatiren, dass alle die hier in Frage kommenden Untersuchungen, und zwar sowohl diejenigen, welche ein geometrisches Gepräge besitzen, als auch die mehr analytischen, die sich auf die Lösungen linearer Differentialgleichungen beziehen, auf Riemann'sche Ideenbildungen zurückgehen. Der Zusammenhang ist ein so enger, dass man behaupten kann, es handele sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. Poincaré geradezu um die weitere Durchführung des allgemeinen functionentheoretischen Programm's, welches Riemann in seiner Doctordissertation aufgestellt hat.

Leipzig, den 30. December 1881.

F. Klein.

SUR LES FONCTIONS UNIFORMES

QUI SE REPRODUISENT

PAR DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. KLEIN).

Mathematische Annalen, t. 20, p. 52-53.

. . . . Vous avez eu dernièrement la bonté de faire insérer aux *Mathematische Annalen* (¹) mon travail sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires et vous l'avez fait suivre d'une Note où vous exposez les raisons qui vous font trouver peu convenables les noms que j'ai donnés à ces transcendantes. Permettez-moi de vous adresser quelques lignes pour défendre mes dénominations, que je n'ai pas choisies au hasard (²).

Si j'ai cru devoir donner aux fonctions nouvelles le nom de M. Fuchs, ce n'est pas que je méconnaisse la valeur des travaux de M. Schwarz et des vôtres; je suis le premier, au contraire, à en apprécier la haute importance. Mais il ne m'était pas possible d'oublier les découvertes si remarquables que le savant

(¹) T. XIX, p. 553-564. Ce tome, p. 92.

(²) Herrn Poincaré's Darlegungen habe ich nur hinzuzufügen, dass ich für mein Theil allerdings nach wie vor an der Auffassung festhalte, der ich auf p. 564 des XIX. Annalenbandes Ausdruck gegeben habe. Dabei will ich nicht unterlassen, ausdrücklich auf die Note aufmerksam zu machen, mit welcher Herr Fuchs von sich aus dem auf ihn bezüglichen Passus meiner Auseinandersetzung entgegengetreten ist (Cf. *Göttinger Nachrichten*, vom 4. März 1882).

Düsseldorf, den 2. April 1882.

F. KLEIN.

professeur de Heidelberg a publiées dans le *Journal de Crelle*. Elles sont le fondement de la théorie des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais pu aborder l'étude de mes transcendantes qui se lient si directement à cette théorie. Dans ses premiers travaux, M. Fuchs se place, il est vrai, à un point de vue un peu différent du mien et ne se préoccupe ni de la discontinuité des groupes, ni de l'uniformité des fonctions. Mais M. Schwarz, dans ses Mémoires des Tomes 70 et 74 du *Journal de Crelle*, ne s'en préoccupe pas non plus; il en dit quelques mots dans un cas très particulier, dans le Mémoire du Tome 75 que j'ai cité dans ma Note. C'est là seulement qu'il se trouve : « auf dem Gebiete der fonctions fuchsiennes ». Dans vos belles recherches sur les fonctions modulaires, votre façon d'envisager les choses différait peu de la mienne, mais vous aviez plutôt en vue alors l'étude des fonctions elliptiques que celles des équations linéaires. Quant à M. Fuchs, dans ses Mémoires des Tomes 83 et 89 du *Journal de Crelle*, il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celles de certaines fonctions uniformes. Ce fut la lecture de ces Mémoires qui devint le point de départ de mes recherches.

En ce qui concerne les fonctions kleinéennes, j'aurais cru commettre une injustice si je leur avais donné un autre nom que le vôtre. C'est M. Schottky qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, mais c'est vous qui avez « ihre principielle Wichtigkeit betont », comme vous dites à la fin de votre savant travail : *Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich*.

Quant à ce que vous dites de Riemann, je ne puis qu'y souscrire pleinement. C'était un de ces génies qui renouvellent si bien la face de la Science qu'ils impriment leur cachet, non seulement sur les œuvres de leurs élèves immédiats, mais sur celles de tous leurs successeurs pendant une longue suite d'années. Riemann a créé une théorie nouvelle des fonctions, et il sera toujours possible d'y retrouver le germe de tout ce qui s'est fait et se fera aprèslui en analyse mathématique....

Paris, le 30 mars 1882.

THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS [1].

Acta mathematica, t. I, p. 1-62, 1882.

Dans une série de Mémoires [2] présentés à l'Académie des Sciences, j'ai défini certaines fonctions nouvelles que j'ai appelées fuchsiennes, kleinéennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes. De même que les fonctions elliptiques et abéliennes permettent d'intégrer les différentielles algébriques, de même les nouvelles transcendantes permettent d'intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. J'ai résumé succinctement les résultats obtenus dans une Note insérée aux *Mathematische Annalen* [3]. Ayant l'intention de les exposer en détail, je commencerai, dans le présent travail, par étudier les propriétés des groupes fuchsiens, me réservant de revenir plus tard sur leurs conséquences au point de vue de la théorie des fonctions.

I. — Substitutions réelles.

Soient z une variable imaginaire définie par la position d'un point dans un plan; t une fonction imaginaire de cette variable définie par la relation

$$t = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{1}$$

Je supposerai, ce qui ne restreint pas la généralité, qu'on a

$$ad - bc = 1.$$

Si le point z décrit deux arcs de courbe se coupant sous un certain angle α, le point t décrira de son côté deux arcs de courbe se coupant sous le même

(1) Terminé (au plus tard) juillet 1881; imprimé septembre 1882. (N. E. N.)

(2) Ce tome, p. 1-40. (N. E. N.)

(3) Ce tome, p. 92-105. (N. E. N.)

angle α, c'est-à-dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ (¹) *conserve les angles.*

La fonction $\frac{az+b}{cz+d}$ est en effet monogène.

Si z décrit un cercle, t décrit également un cercle ; c'est-à-dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ change les cercles en cercles.

Enfin si z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre valeurs de z et si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les valeurs correspondantes de t, on a

$$(2) \qquad \frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}\,\frac{t_4-t_3}{t_4-t_2} = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\,\frac{z_4-z_3}{z_4-z_2}.$$

Il existe en général deux valeurs de z qui sont égales aux valeurs correspondantes de t : c'est ce qu'on appelle les *points doubles* de la substitution (1).

Si

$$(a+d)^2 \neq 4,$$

les points doubles sont distincts ; et si nous les appelons α et β, la relation (1) peut s'écrire

$$(3) \qquad \frac{t-\alpha}{t-\beta} = \mathrm{K}\,\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

K étant une constante que j'appellerai *multiplicateur*.

Si au contraire

$$a+d=\pm 2$$

les points doubles se confondent et l'on a

$$\alpha = \beta.$$

La relation (1) peut alors s'écrire

$$(4) \qquad \frac{1}{t-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} \pm c.$$

(¹) J'emploierai dans ce qui suit les notations de M. Jordan.

La substitution $[z, f(z)]$ ou bien $[x, y; f(x,y), \varphi(x,y)]$ sera l'opération qui consiste à changer z en $f(z)$ ou bien celle qui consiste à changer x en $f(x,y)$ et y en $\varphi(x,y)$. La substitution inverse de $[z, f(z)]$ sera $[f(z), z]$; le produit de deux substitutions sera l'opération qui consiste à faire successivement ces deux substitutions.

Un système de substitutions formera un *groupe* si la substitution inverse de toute substitution du système et le produit de deux substitutions quelconques du système font également partie du système.

Un groupe A est *isomorphe* à un autre groupe B si à toute substitution de B correspond une et une seule substitution de A et de telle sorte qu'au produit de deux substitutions de B corresponde le produit des deux substitutions correspondantes de A.

Si B est également isomorphe à A, les deux groupes sont isomorphes entre eux et l'isomorphisme est *holoédrique* ; autrement il est *mériédrique*.

Telles sont les principales propriétés des substitutions linéaires $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$. Mais nous allons faire une hypothèse de plus; nous supposerons que les coefficients a, b, c, d sont réels. Je dirai alors que la substitution (1) est une *substitution réelle*.

Il en résulte que la partie imaginaire de t est positive, nulle ou négative selon que la partie imaginaire de z est elle-même positive, nulle ou négative; c'est-à-dire que la substitution (1) conserve l'axe des parties réelles que j'appellerai désormais X et change également en elle-même la partie du plan qui est au-dessus de cet axe.

Si z décrit un cercle ayant son centre sur X, t décrira également un cercle ayant son centre sur X. Si z_1 et z_2 sont deux quantités imaginaires conjuguées, les valeurs correspondantes t_1 et t_2 de t seront aussi imaginaires conjuguées.

Si α et β sont deux valeurs de z, γ et δ les valeurs correspondantes de t, si α', β', γ', δ' sont les valeurs conjuguées de α, β, γ, δ, on aura, en vertu de la relation (2),

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\,\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\delta'}\,\frac{\delta-\delta'}{\delta-\gamma'}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\,\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = (\alpha, \beta),$$

cette relation s'écrira

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta). \tag{5}$$

Les substitutions réelles ont été étudiées par différents géomètres et en particulier par M. Klein dans ses recherches sur les fonctions modulaires; il les a partagées en substitutions elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Les substitutions elliptiques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2 < 4.$$

Les points doubles α et β sont imaginaires conjugués; l'un d'eux est par conséquent au-dessus de l'X, l'autre au-dessous; la relation (1) peut se mettre sous la forme (3) et la constante K est une quantité imaginaire ou négative dont le module est l'unité. Si z décrit un cercle passant par α et β, t décrira également un cercle passant par α et β et coupant le premier sous un angle égal à l'argument de K.

La substitution (1) change en elle-même toute circonférence qui, ayant son centre sur le prolongement de $\alpha\beta$, coupe ce segment harmoniquement.

Les substitutions paraboliques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2 = 4.$$

Les points doubles se confondent en un seul qui est situé sur X. La relation (1) se met sous la forme (4) et de telle sorte que α soit réel. Si z décrit un cercle passant par α, t décrira également un cercle passant par α et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui sont tangentes à X en α. Soit C une pareille circonférence; soit m_0 un point de cette circonférence C, la substitution (1) le changera en un autre point m_1 de cette même circonférence; elle changera m_1 en un autre point m_2 de C, m_2 en un autre point m_3, etc. Quand $\varkappa$ tendra vers l'infini, le point $m_\varkappa$ se rapprochera indéfiniment de α. Soit de même m_{-1} le point que la substitution (1) change en m_0, m_{-2} le point que cette substitution change en m_{-1}, etc. Quand $\varkappa$ tendra vers l'infini, le point $m_{-\varkappa}$ se rapprochera aussi indéfiniment de α.

J'appelle $C_\varkappa$ le cercle qui a son centre sur X et qui passe par α et par $m_\varkappa$; qui, par conséquent, coupe orthogonalement le cercle C en α et en $m_\varkappa$. Il est clair que la substitution (1) changera C_{-1} en C_0, C_0 en C_1, C_1 en C_2, etc., et, en général, $C_\varkappa$ en $C_{\varkappa+1}$. De plus, si $\varkappa$ est infini positif ou négatif, $C_\varkappa$ se réduit à un cercle de rayon infiniment petit. C'est dire que si l'on applique une infinité de fois la substitution (1), ou la substitution inverse à un cercle passant par α et ayant son centre sur X, le rayon de ce cercle devient infiniment petit.

Il en résulte qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas X, ne pourra rencontrer un nombre infini de cercles $C_\varkappa$, c'est-à-dire de transformés successifs d'un cercle C_0 ayant son centre sur X et passant par α.

Les substitutions hyperboliques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2 > 4.$$

Les points doubles α et β sont distincts et situés sur X. La relation (1) se met sous la forme (3) et de telle sorte que K soit réel et positif. Je puis de plus toujours supposer

$$K > 1.$$

Si z décrit un cercle passant par α ou par β, t décrira également un cercle passant par α ou par β et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui passent par α et β.

J'appelle, comme plus haut, C une circonférence passant par α et β, et

$$\ldots\quad m_{-2},\quad m_{-1},\quad m_0,\quad m_1,\quad m_2,\quad \ldots$$

une série de points tels que la substitution (1) change $m_\varkappa$ en $m_{\varkappa+1}$. Il est clair que le point $m_\varkappa$ se rapprochera indéfiniment de β quand $\varkappa$ tendra vers $+\infty$, et de α quand $\varkappa$ tendra vers $-\infty$.

J'appelle aussi $C_\varkappa$ le cercle qui, ayant son centre sur X, passe par α et par $m_\varkappa$. Lorsque $\varkappa$ tendra vers $+\infty$, $C_\varkappa$ se rapprochera indéfiniment du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre; lorsque $\varkappa$ tendra vers $-\infty$, le rayon de $C_\varkappa$ diminuera indéfiniment. C'est dire que, si l'on applique la substitution (1) une infinité de fois à un cercle C_0 passant par α et ayant son centre sur X, on obtiendra à la limite un cercle ayant $\alpha\beta$ pour diamètre. Si l'on applique une infinité de fois à C_0 la substitution inverse, le rayon limite sera nul.

Si, au contraire, on appliquait une infinité de fois la substitution (1) à un cercle passant par β et ayant son centre sur X, le rayon limite serait nul, tandis qu'en lui appliquant une infinité de fois la substitution inverse, on obtiendrait à la limite le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Il résulte de là qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas X, rencontrera un nombre infini de cercles $C_\varkappa$, c'est-à-dire de transformés successifs du cercle C_0, ou bien un nombre fini de ces transformés, selon qu'il rencontrera ou ne rencontrera pas le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Si l'on a

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

il existe une substitution réelle (¹) qui change α en γ et β en δ. Cette substitution est définie par la relation

$$\frac{t-\gamma}{t-\delta}\,\frac{\gamma'-\delta}{\gamma'-\gamma} = \frac{z-\alpha}{z-\beta}\,\frac{\alpha'-\beta}{\alpha'-\alpha}.$$

Il est une autre propriété des substitutions réelles sur laquelle je voudrais attirer l'attention; en différentiant la relation (1) on trouve

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Si, de plus, j'appelle y la partie imaginaire de z, Y celle de t, je trouve

$$\operatorname{mod}\frac{dt}{dz} = \frac{Y}{y}.$$

II. Figures congruentes.

Je dirai que deux figures sont *congruentes* quand l'une est la transformée de l'autre par une substitution *réelle*. Les substitutions réelles formant un

(¹) Il faut que α et γ (et par conséquent β et δ) soient situés sur le même côté de X; s'il n'en est pas ainsi, le déterminant $ad - bc$ sera négatif. N. E. N.

groupe, il est clair que deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles.

Je puis énoncer tout d'abord les théorèmes suivants :

Dans deux figures congruentes les angles homologues sont égaux.

Si, dans deux figures congruentes, le point γ est homologue de α et le point δ homologue de β, on a

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta). \tag{1}$$

Cette relation peut prendre une autre forme.

Considérons, en effet, les quantités α, β et leurs conjuguées α', β' de telle sorte que

$$(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'}.$$

Les quatre points α, β, α', β' sont sur un même cercle qui a son centre sur X. Supposons de plus que α et β soient tous deux au-dessus de x. Ce cercle coupe X en deux points que j'appelle h et k ; h sera celui de ces deux points qui est sur l'arc $\beta\beta'$, k celui de ces deux points qui est sur l'arc $\alpha\alpha'$. Je pose

$$[\alpha, \beta] = \frac{\alpha - h}{\alpha - k} \frac{\beta - k}{\beta - h}.$$

$[\alpha, \beta]$ est essentiellement réel, positif et plus grand que 1. De plus, on a

$$(\alpha, \beta) = \frac{4[\alpha, \beta]}{([\alpha, \beta] + 1)^2}.$$

Si γ est un point de l'arc de cercle $\alpha\beta$, on a

$$[\alpha, \gamma][\gamma, \beta] = [\alpha, \beta].$$

Il est clair maintenant qu'en employant cette notation nouvelle, on peut mettre la relation (1) sous la forme

$$[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta].$$

Voyons ce qui se passera quand α et β seront infiniment voisins.

Soit

$$z = x + y\sqrt{-1},$$
$$dz = dx + dy\sqrt{-1},$$
$$\operatorname{mod} dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

On aura, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$[z, z+dz] = 1 + \frac{\operatorname{mod} dz}{y}$$

ou

$$\mathrm{L}[z, z+dz] = \frac{\operatorname{mod} dz}{y}.$$

On voit ainsi que le logarithme népérien de $[z, z+dz]$ est proportionnel au module de dz et indépendant de son argument.

L'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{y},$$

prise le long d'un arc de courbe quelconque, s'appellera la L de cette courbe.

L'intégrale double

$$\int\int \frac{dx\,dy}{y^2},$$

prise à l'intérieur d'une aire plane quelconque, sera la S de cette aire.

D'après ce qui précède, deux arcs de courbe congruents ont même L; deux aires congruentes ont même S. La L d'un arc de cercle $\alpha\beta$, ayant son centre sur X, sera le logarithme népérien de $[\alpha, \beta]$.

Je ne puis passer sous silence le lien qui rattache les notions précédentes à la géométrie non euclidienne de Lobatschewsky.

Supposons que l'on convienne d'enlever aux mots *droite*, *longueur*, *distance*, *surface* leur signification habituelle, d'appeler droite tout cercle qui a son centre sur X, longueur d'une courbe ce que nous venons d'appeler sa L, distance de deux points la L de l'arc de cercle qui unit ces deux points en ayant son centre sur X, et enfin surface d'une aire plane ce que nous appelons sa S.

Supposons de plus que l'on conserve aux mots *angle* et *cercle* leur signification, mais en convenant d'appeler *centre d'un cercle* le point qui est à une distance constante de tous les points du cercle (d'après le sens nouveau du mot *distance*) et rayon du cercle cette distance constante.

Si l'on adopte ces dénominations, *les théorèmes de Lobatschewsky sont vrais*, c'est-à-dire que tous les théorèmes de la géométrie ordinaire s'appliquent à ces nouvelles quantités, sauf ceux qui sont une conséquence du postulatum d'Euclide.

Cette terminologie m'a rendu de grands services dans mes recherches, mais je ne l'emploierai pas ici pour éviter toute confusion.

III. — Groupes discontinus.

Envisageons une infinité de substitutions de la forme

$$(1)\qquad \left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)$$

qui, en posant pour abréger

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i},$$

peuvent s'écrire sous la forme

$$[z, f_i(z)].$$

Pour abréger encore, je dirai simplement la substitution

$$f_i(z).$$

Je suppose que i est un indice qui varie de zéro à l'infini.

Je suppose de plus

$$a_0 = d_0 = 1, \qquad b_0 = c_0 = 0,$$

d'où

$$f_0(z) = z.$$

Je suppose enfin que ces substitutions forment un groupe.

Je vais définir certains symboles dont je serai amené à faire usage dans la suite. Je poserai

$$f_i^2(z) = f_i[f_i(z)], \quad f_i^3(z) = f_i[f_i^2(z)], \quad \ldots, \quad f_i^m(z) = f_i[f_i^{m-1}(z)], \quad \ldots.$$

Je définirai de même, par une extension toute naturelle, le symbole $f_i^m(z)$ quand m sera nul ou négatif. Je poserai

$$f_i^0(z) = z, \qquad z = f_i^{-1}[f_i(z)], \qquad f_i^{-m}(z) = f_i^{-1}[f_i^{-m+1}(z)].$$

Si $f_1(z)$ est une des substitutions du groupe envisagé, toutes les substitutions qui sont comprises dans la formule générale

$$(2)\qquad f_1^m(z)$$

feront également partie du groupe.

Si $f_2(z)$ est une substitution du groupe non comprise dans la formule (2), toutes les substitutions de la forme

$$(3)\qquad f_1^\alpha(f_2^\beta(f_1^\gamma(f_2^\delta(\ldots(f_1^\lambda(f_2^\mu(z))\ldots))$$

appartiendront au groupe.

Si maintenant $f_3(z)$ est une substitution du groupe qui ne soit pas comprise dans la formule (3), c'est-à-dire qui ne soit pas une combinaison de f_1 et de f_2, si f_3 est une substitution du groupe qui ne soit pas une combinaison de f_1, f_2 et f_3, etc., si enfin f_p est une substitution qui ne soit pas une combinaison de f_1, f_2, ..., f_{p-1}, les substitutions comprises dans la formule générale

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots(f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z))\ldots) \tag{4}$$

(où α_1, α_2, ..., α_n sont des indices qui peuvent être 1, 2, 3, ..., $p-1$ ou p, et où β_1, β_2, ..., β_n sont des entiers positifs ou négatifs) feront également partie du groupe.

Il peut se faire qu'on ait épuisé ainsi toutes les substitutions du groupe envisagé, de telle sorte que toute substitution de ce groupe soit une combinaison de f_1, f_2, ..., f_p. On dit alors que le groupe est *dérivé* de f_1, f_2, ..., f_p, ou que f_1, f_2, ..., f_p sont un système de *substitutions fondamentales* du groupe. Il est évident qu'un groupe peut avoir une infinité de systèmes de substitutions fondamentales; mais *un seul de ces systèmes suffit pour déterminer complètement le groupe.*

On peut concevoir aussi des groupes tels qu'il soit impossible de les faire dériver d'un nombre fini de substitutions fondamentales. Mais nous les laisserons systématiquement de côté.

Soit donc un groupe G dérivé de p substitutions fondamentales f_1, f_2, ..., f_p de telle sorte que toutes ses substitutions soient de la forme (4).

J'appellerai *exposant* d'une substitution de ce groupe la somme des modules des nombres entiers positifs ou négatifs β_1, β_2, ..., β_n.

Il peut se faire que les diverses substitutions contenues dans la formule (4) ne soient pas toutes distinctes et qu'on ait identiquement

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z))\ldots) = f_{\gamma_1}^{\delta_1}(f_{\gamma_2}^{\delta_2}(\ldots f_{\gamma_n}^{\delta_n}(z)\ldots)). \tag{5}$$

La relation (5) peut toujours se mettre sous la forme

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z)\ldots)) = z. \tag{6}$$

Les α et les β ont ici la même signification que dans la formule (4).

Les relations de la forme (6) pourront, en général, être toutes regardées comme les conséquences d'un certain nombre d'entre elles que nous appellerons *relations fondamentales* et qui seront seules réellement distinctes.

Un groupe H sera isomorphe à G s'il est dérivé d'un même nombre de substitutions fondamentales, et si l'on a entre ses substitutions fondamentales les mêmes relations fondamentales. Si, entre les substitutions de H, il n'y a pas d'autre relation de la forme (6) qu'entre celles de G, l'isomorphisme est réciproque et par conséquent *holoédrique*; autrement il est *mériédrique*.

Par suite des relations (6), une même substitution peut être mise d'une infinité de manières sous la forme (4); de sorte que la définition donnée plus haut de *l'exposant d'une substitution* laisse subsister une certaine ambiguïté. Nous appellerons alors exposant d'une substitution *la plus petite* valeur que peut prendre la somme des modules de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ quand on écrit cette substitution sous la forme (4).

Ici il y a lieu de faire une distinction importante entre les différentes sortes de groupes formés de substitutions réelles. Nous devons d'abord laisser de côté les groupes qui ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions et qui ont déjà été étudiés à fond par plusieurs géomètres. Mais si les substitutions d'un groupe sont en nombre infini, on peut faire deux hypothèses différentes :

On peut supposer qu'il est possible de choisir dans le groupe une substitution

$$(z, f_i(z))$$

telle que $f_i(z)$ diffère infiniment peu de z (et cela quel que soit z), c'est-à-dire que le groupe contient une substitution infinitésimale.

On peut supposer aussi que le groupe ne contient pas de pareille substitution.

Les groupes de la première espèce seront *continus*, ceux de la seconde *discontinus*.

Il ne peut exister de fonction uniforme analytique de z qui reste inaltérée par les substitutions d'un groupe continu, car cette fonction devrait reprendre la même valeur en des points infiniment voisins les uns des autres et, par conséquent, avoir une valeur constante. Aussi les groupes continus n'ont-ils aucun intérêt pour nous et nous réserverons le nom de *groupes fuchsiens* aux groupes discontinus formés de substitutions réelles.

Si le groupe G est discontinu, il est clair qu'on pourra diviser le plan, ou une partie du plan, en une infinité de régions jouissant des propriétés suivantes :

Chacune d'elles correspondra à l'une des substitutions du groupe G. Celle qui correspondra à la substitution

$$(z, f_i(z))$$

s'appellera la région R_i, et, par conséquent, celle qui correspondra à la substitution

$$(z, f_0(z)) \quad \text{ou} \quad (z, z)$$

s'appellera R_0.

Quand z *sera intérieur à la région* R_0, $f_i(z)$ *devra être intérieur à* R_i. En d'autres termes, R_i sera la transformée de R_0 par la substitution

$$(z, f_i(z)).$$

Supposons maintenant que z soit intérieur à la région R_k, correspondant à

$$(z, f_k(z)):$$

$f_k^{-1}(z)$ devra être intérieur à R_0 et, par conséquent, $f_i(f_k^{-1}(z))$ sera intérieur à R_i.

Dire que R_i est transformée de R_0 par une substitution réelle, c'est dire que ces régions sont congruentes et, par conséquent, que toutes les régions R sont congruentes entre elles.

Pour me servir d'une expression très usitée de l'autre côté du Rhin, je dirai que la division d'un plan en une infinité de régions est *régulière* lorsqu'en déformant ces régions d'une manière continue on pourra faire coïncider le nouveau mode de division avec l'ancien, de telle façon que chaque région de la nouvelle division vienne coïncider avec une région de l'ancienne, et qu'une région donnée quelconque du nouveau mode de division vienne coïncider avec une région *donnée également quelconque* de l'ancien mode. En ce qui concerne le mode de division qui nous occupe, il est clair que, si l'on applique aux différentes régions R la substitution

$$[z, f_i(z)],$$

chacune des régions R se changera en une autre région R, et R_0 se changera en R_i. C'est dire que la division du plan sera régulière.

Le problème de la recherche des groupes fuchsiens se ramène donc au suivant : *Subdiviser d'une façon régulière le plan, ou une partie du plan, en une infinité de régions toutes congruentes entre elles.*

Deux régions seront dites *limitrophes* lorsqu'elles confineront entre elles tout le long d'un arc de courbe qui leur servira de frontière commune.

Soit R_p une région limitrophe de R_0 tout le long d'un arc AB de son périmètre; cet arc AB sera *l'un des côtés de* R_0. Mais on peut supposer que ce ne soit pas le plan tout entier, mais une partie du plan qui ait été divisée en une infinité de régions R, toutes congruentes entre elles. Dans ce cas, R_0 pourra confiner tout le long d'un arc CD de son périmètre à la partie du plan qui n'aura pas été subdivisée en régions R. Cet arc CD sera encore *un des côtés* de R_0. Les côtés tels que AB seront ceux de la première sorte, les côtés tels que CD ceux de la deuxième sorte.

Je supposerai toujours que les côtés de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X.

Je justifie en quelques mots cette hypothèse. Si l'on a divisé une partie du plan en une infinité de régions R, et si la région R_0 est contiguë à la partie du plan non divisée, on pourra toujours étendre la division à une portion plus grande du plan. Je l'étendrai jusqu'à ce que R_0 cesse d'être contiguë à la partie non divisée, ou jusqu'à ce que R_0 atteigne l'axe X. Cet aperçu suffira, je pense, pour faire comprendre les raisons qui me permettent d'adopter cette hypothèse.

J'appellerai sommets de R_0 les extrémités de ses côtés et je serai conduit à envisager : 1° les sommets situés au-dessus de X; 2° les sommets situés sur X et séparant deux côtés de la première sorte; 3° les sommets situés sur X et séparant un côté de la première sorte et un de la deuxième sorte. J'appellerai ces différents sommets, sommets de la première, de la deuxième ou de la troisième catégorie.

Les points

$$z, f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_i(z), \quad \ldots$$

seront dits *correspondants*.

Quand le point z est à l'intérieur de R_0, tous les points $f_i(z)$ seront dans des régions R_i différentes de R_0. Donc il ne peut y avoir dans l'intérieur de R_0 deux points correspondants, et un point intérieur à R_0 ne peut être non plus correspondant d'un point du périmètre de cette région.

Au contraire, un point situé sur l'un des côtés de R_0, sur λ_p par exemple, appartient à la fois à deux régions R_0 et R_p. Si le point z est sur λ_p, c'est-à-dire sur le périmètre de R_p, le point $f_p^{-1}(z)$ sera sur le périmètre de R_0 sur un côté que j'appellerai λ'_p et qui séparera R_0 d'une région R'_p correspondant à la substitution

$$(z, f_p^{-1}(z)).$$

Les côtés λ_p et λ'_p seront dits *conjugués*.

On peut tirer de là les conclusions suivantes : 1° Les côtés de la première sorte sont en nombre pair et conjugués deux à deux; 2° deux côtés conjugués sont congruents; 3° les points du périmètre de R_0, situés au-dessus de l'axe X (sans parler des sommets dont nous nous occuperons plus loin), sont correspondants deux à deux.

Une convention spéciale est nécessaire pour faire rentrer dans le cas général un cas particulier qui se présentera quelquefois.

Il pourrait arriver qu'on eût identiquement

$$f_p(z) = f_p^1(z) \quad \text{ou} \quad z = f_p[f_p(z)].$$

Alors R_p coïnciderait avec R'_p, λ_p avec λ'_p. Mais, dans ce cas, la substitution

$$(z, f_p(z))$$

est elliptique et la relation (1) (§ I) pourrait se mettre sous la forme (3) (§ I), de telle façon que

$$K = -1.$$

La substitution $(z, f_p(z))$ n'altérant pas le côté λ_p, celui-ci devra passer par le point α (point double de la substitution) et se partager en deux moitiés congruentes entre elles.

Cela posé, on pourra regarder le point α comme un sommet et les deux moitiés du côté λ_p comme deux côtés distincts, conjugués entre eux; on est ainsi ramené au cas général.

Chaque sommet appartient à deux ou plusieurs régions différentes; il en résulte que plusieurs sommets de R_0 peuvent être correspondants. Je dirai que les sommets correspondants appartiennent à un même cycle.

D'après ce qui précède, le nombre des côtés de la première sorte est pair; soit $2n$ ce nombre. Ces $2n$ côtés seront conjugués deux à deux. Soient λ_1, λ_2, ..., λ_n n de ces côtés; λ_{n+1}, λ_{n+2}, ..., λ_{2n} les n autres côtés conjugués des premiers, de telle sorte que les côtés λ_p, λ_{n+p} soient conjugués. Soient R_p la région qui est limitrophe de R_0, le long du côté λ_p, et

$$(z, f_p(z))$$

la substitution correspondante. De cette façon, on aura

$$f_{n+p}(z) = f_p^1(z).$$

Il est aisé de voir que, si l'on sort d'une région R_i correspondant à

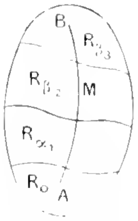
$$(z, f_i(z)),$$

par le côté correspondant à λ_p, on entre dans une région correspondant à la substitution

$$(z, f_i[f_p(z)]).$$

Rien n'est plus facile maintenant que de trouver quelle est la substitution qui correspond à une région donnée R_{β_ν}. Soient A un point intérieur à R_0, B un

Fig. 1.



point intérieur à R_{β_ν}; joignons ces deux points par un arc quelconque AMB. Si je suppose que cet arc AMB parte de la région R_0, qu'il en sorte par le côté λ_{α_1} pour entrer dans la région R_{α_1}, puis qu'il sorte de R_{α_1} par le côté correspondant à λ_{α_2} pour entrer dans la région R_{β_2}, qu'il sorte de R_{β_2} par le côté correspondant à λ_{α_3} pour entrer dans R_{β_3}, etc., et enfin qu'il sorte de $R_{\beta_{\nu-1}}$ par le côté correspondant à λ_{α_ν} pour entrer dans R_{β_ν}; la substitution qui correspondra à cette région R_{β_ν} sera

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(f_{\alpha_3}) \ldots (f_{\alpha_{\nu-1}}(f_{\alpha_\nu}(z)) \ldots)].$$

Dans cette expression $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ désignent des indices qui peuvent être 1, 2, ... ou $2n$.

Donc toute substitution qui correspond à une région que l'on peut atteindre en partant de R_0 et en franchissant un nombre fini de côtés est une combinaison de (z, f_1), (z, f_2), ..., (z, f_n). Nous laisserons de côté tous les groupes pour lesquels on ne pourrait pas passer d'une région à l'autre en franchissant un nombre fini de côtés. Alors toute substitution sera une combinaison de

$$(7) \qquad (z, f_1), \quad (z, f_2), \quad \ldots, \quad (z, f_n).$$

Comment trouverons-nous les relations de la forme (6) qui auront lieu entre les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$?

Pour cela il suffira évidemment de rechercher comment on peut exprimer par une combinaison des substitutions (7) la substitution

$$(z, z) \quad \text{ou} \quad (z, f_0(z))$$

qui correspond à R_0. On appliquera la règle exposée plus haut, c'est-à-dire qu'on décrira un contour fermé quelconque AMA passant par un point A intérieur à R_0. Si ce contour traverse successivement des régions R_0, R_{α_1}, R_{β_2}, ..., $R_{\beta_{\nu-1}}$, $R_{\beta_\nu} = R_0$ et en sort respectivement par les côtés correspondants à λ_{α_1}, λ_{α_2}, ..., λ_{α_ν}, la substitution qui correspondra à R_0 sera

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\ldots(f_{\alpha_\nu}(z)\ldots)],$$

ce qui permettra d'écrire

$$z = f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\ldots(f_{\alpha_\nu}(z)\ldots).$$

Des relations (6) ainsi obtenues, toutes ne sont pas fondamentales. Pour obtenir les relations fondamentales, il suffit de décrire des contours fermés infinitésimaux autour de chacun des sommets de R_0.

Puisqu'on trouve ainsi toutes les relations de la forme (6), les substitutions (7) sont généralement indépendantes et par conséquent forment un système de substitutions fondamentales du groupe envisagé.

On voit de plus que l'exposant d'une substitution f_i est le nombre minimum de côtés qu'il faut franchir pour passer de R_0 dans la région qui correspond à la substitution f_i.

Outre les groupes fuchsiens ou groupes discontinus formés de substitutions réelles, j'ai été conduit à envisager les groupes discontinus formés de substitutions linéaires quelconques et que j'ai appelés *groupes kleinéens*. Je n'en parlerai pas dans le présent travail, me réservant d'exposer dans un Mémoire spécial les résultats que j'ai obtenus à leur égard.

IV. Polygones générateurs.

Les régions R_i sont définies par la condition que chacune d'elles ne contient *qu'un seul* point correspondant à un point z donné. Mais cette condition ne suffit pas pour les définir complètement. En effet, si l'on se donne un groupe fuchsien G, il y aura une infinité de manières de subdiviser le plan de telle sorte que dans chaque région il n'y ait qu'un point correspondant à un point z donné.

Au contraire si l'on se donne la décomposition du plan en une infinité de régions telles que R, le groupe G sera parfaitement déterminé.

Donnons-nous un groupe G et envisageons les diverses décompositions du plan en régions R_i qui correspondent à ce groupe. Ces décompositions sont en nombre infini. Comment de l'une d'elles pourrons-nous déduire toutes les autres? Soient S_0 une portion de la région R_0, S_i la portion correspondante de la région R_i. Choisissons, parmi les substitutions du groupe G, l'une quelconque d'entre elles

$$(z, f_p(z)).$$

Soit i_p l'indice de la substitution

$$[z, f_p(f_i(z))]$$

de telle sorte que

$$f_p[f_i(z)] = f_{i_p}(z).$$

Des diverses régions R_i je retranche la portion S_i et j'ajoute à ce qui reste la région S_{i_p}. J'obtiens ainsi une infinité de régions

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i.$$

Ces régions R'_i recouvriront la même partie du plan que les régions R_i et ne la recouvriront qu'une fois. Chacune d'elles ne contiendra qu'un seul point correspondant à un point donné z. A la décomposition du plan en régions R'_i correspondra donc le même groupe G qu'à la décomposition en régions R_i. Si S_0 est contigu intérieurement à l'une des frontières de R_0 et si S_p est contigu extérieurement à l'une des frontières de $R_0 - S_0$, la région R'_0 sera *d'une seule pièce et sans trou*. La plupart du temps, pour plus de commodité, nous choisirons la région R'_0 de telle sorte qu'elle soit d'une seule pièce et sans trou, mais cela n'a rien d'essentiel.

En opérant sur les régions R'_i comme nous avons opéré sur les régions R_i, nous obtiendrons une nouvelle décomposition du plan en régions R''_i qui correspondra toujours au groupe envisagé G. En continuant indéfiniment de la sorte, on obtiendra toutes les décompositions qui correspondent au groupe G.

On est conduit tout naturellement à la généralisation suivante :

Jusqu'ici j'ai supposé que la région S_0 était tout entière intérieure à la région R_0 et par conséquent S_i à la région R_i, et de fait, sans cette hypothèse, on ne saurait ce qu'on doit entendre par la région

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i,$$

à moins toutefois que l'on ne fasse une convention spéciale.

On est conduit ainsi à envisager des régions divisées en deux parties dont l'une est considérée comme positive et l'autre comme négative.

Ainsi, si S_i ne fait pas partie de R_i, on considérera la région R'_i comme formée d'une partie positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une partie négative S_i. Cet ordre de considérations n'est pas d'ailleurs absolument nouveau.

Si l'on envisage un quadrilatère ABCD dont deux côtés opposés AB et CD se coupent en un point M, ce quadrilatère, formé de deux triangles ADM et BCM opposés par le sommet, s'appelle un quadrilatère *concave*.

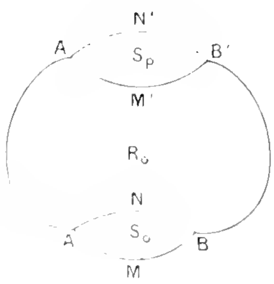
Les formules qui donnent l'aire d'un quadrilatère convexe s'appliquent à une pareille figure pourvu qu'on regarde l'aire de cette figure comme la différence et non comme la somme des aires des deux triangles ADM et BCM. Dans un quadrilatère concave l'un des deux triangles doit donc être regardé comme positif et l'autre comme négatif. Il se passe ici quelque chose d'analogue. Une région *concave* R'_i sera formée d'une portion positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une portion négative S_i. Le nombre des points correspondants à un même point donné z, compris dans la partie positive de R'_i, est toujours fini et il surpasse d'une unité le nombre des points correspondants à z compris dans la partie négative.

Nous ferons peu d'usage de cette subdivision du plan en régions R_i concaves, parce que la subdivision en régions convexes est infiniment plus commode, mais elle pourra nous servir comme d'intermédiaire pour passer d'une subdivision convexe à une autre subdivision également convexe.

Puisqu'il y a une infinité de manières de subdiviser le plan en régions R_i convexes, nous devons choisir parmi ces diverses manières la plus simple et la plus commode.

Voici comment nous pourrons procéder. Nous déterminerons une région S_0, et la région S_p transformée de S_0 par la substitution $f_p(z)$. Nous ajouterons

Fig. 2.



S_p à R_0 et nous en retrancherons S_0. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région R'_0 qui pourra servir de base à une nouvelle subdivision du plan en régions R'_i correspondant au groupe G. Car, pour obtenir la région R'_i, il suffira de retrancher de R_i la région S_i transformée de S_0 par $f_i(z)$ et d'y ajouter la région S_{i_p} transformée de S_p par $f_i(z)$. Comment maintenant conviendra-t-il de choisir les régions S_0 et S_p?

Soient AMB un côté de R_0, A'M'B' le côté conjugué. Ces deux côtés sont congruents et la substitution réelle qui change AMB en A'M'B' est une substitution $f_p(z)$ du groupe G. Joignons les points A et B par un arc de cercle ANB ayant son centre sur X. La région S_0 sera la région AMBNA comprise entre l'arc de courbe AMB et l'arc de cercle ANB. Le transformé de ANB par $f_p(z)$ sera un arc de cercle A'N'B' ayant son centre sur X, et la transformée S_p de S_0 sera la région A'M'B'N'A'. Si nous ajoutons S_p à R_0 et que nous retranchions S_0, nous obtiendrons une région R'_0 analogue à R_0, mais où les côtés conjugués AMB, A'M'B' seront devenus des arcs de cercle ANB, A'N'B' ayant leurs centres sur X.

En opérant de même manière sur chaque paire de côtés conjugués de la première sorte, on réduira tous ces côtés à des arcs de cercle ayant leurs centres sur X. On peut donc toujours supposer que la région R_0 est un polygone dont les côtés sont de deux sortes, les uns sont des arcs de cercle ayant leurs centres sur X, les autres sont des segments de cet axe X lui-même. Un pareil polygone s'appellera *polygone normal*.

Mais une difficulté spéciale peut se présenter dans certains cas.

En effet nous ne nous sommes pas inquiétés de savoir si la région

$$S_0 = \text{AMBNA}$$

faisait tout entière partie de R_0. Il pourra donc se faire que le polygone normal auquel on aura réduit la région R_0 soit concave.

Voici comment on se tirerait d'affaire en pareil cas. Il est clair que la partie positive et la partie négative de R_0 devront être toutes deux des polygones normaux. Supposons, pour fixer les idées, que la partie positive contienne au plus deux points correspondants à un point donné z. Parmi les points de R_0, il y en aura qui seront compris dans la partie positive et qui n'admettront aucun correspondant soit dans la partie positive, soit dans la partie négative. Ils formeront un certain polygone normal P.

La partie négative formera un certain polygone normal P'; et à chaque point de cette partie négative correspondront deux points de la partie positive dont l'ensemble formera deux polygones normaux P'' et P''', tous deux congruents à P′. La partie positive de R_0 sera formée des trois polygones P, P″ et P‴. Cela posé, retranchons de R_0 le polygone P″ et ajoutons-y le polygone congruent P′. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région R'_0 qui pourra servir comme R_0 à engendrer le groupe fuchsien G. Cette région n'aura plus de partie négative et sera formée des deux polygones P et P‴.

Ce sera donc un *polygone normal convexe.*

On voit ainsi que, dans tous les cas possibles, on peut supposer que R_0 *est un polygone normal convexe.*

Si l'on connaît le polygone normal R_0 et la distribution de ses côtés en paires de côtés conjugués, le groupe G est entièrement déterminé [1].

En effet, reportons-nous à ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent :

Les substitutions fondamentales de G sont celles qui correspondent aux régions limitrophes de R_0; on les obtiendra donc en envisageant un des côtés de la première sorte de R_0 et en cherchant quelle est la substitution qui change ce côté en son conjugué. Or soient AB et A′B′ deux côtés conjugués. Ces deux côtés, d'après le paragraphe III, devront être congruents, c'est-à-dire qu'on aura

$$(A, B) = (A', B').$$

Or dans ce cas, d'après le paragraphe I, il existe une substitution réelle qui change AB en A′B′ et, en général, cette substitution est parfaitement déterminée. Les substitutions fondamentales du groupe G, et, par conséquent, le groupe G lui-même, sont donc parfaitement déterminés.

C'est pour cette raison que j'appellerai le polygone R_0 *polygone générateur* du groupe G.

V. Classification en familles.

Nous avons vu plus haut que deux, trois ou plusieurs des sommets du polygone R_0 peuvent être des points correspondants et nous avons appelé *cycle* l'ensemble des sommets de ce polygone qui sont correspondants à l'un d'entre eux.

---

[1] Si les deux extrémités d'un côté de la première sorte AB sont situés sur l'axe X, il en est de même des extrémités du côté conjugué A′B′. Il existe alors une infinité de substitutions réelles qui changent AB en A′B′. Dans ce cas, il arrive donc que le polygone R_0 engendre une infinité de groupes fuchsiens. N. E. N.

Les sommets de R_0 se répartissent de la sorte en un certain nombre de cycles. Voyons comment, connaissant la distribution en paires des côtés de la première sorte, on pourra trouver la distribution des sommets en cycles. Pour cela, il suffit d'appliquer la règle suivante, qu'on démontrerait sans peine :

Supposons qu'on parcoure dans un certain sens le périmètre du polygone R_0, et qu'on rencontre successivement un côté, puis un sommet, puis un autre côté, puis un autre sommet, et ainsi de suite. Cela posé, partons d'un sommet quelconque; envisageons le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la première sorte; puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la première sorte, et ainsi de suite. On pourra continuer ainsi jusqu'à ce qu'on revienne au sommet qui a servi de point de départ, ou bien jusqu'à ce qu'on arrive à un côté de la deuxième sorte.

Dans le premier cas, tous les sommets qu'on aura rencontrés de la sorte formeront un cycle. Dans le second cas, il sera nécessaire, pour compléter le cycle, de reprendre le sommet qui a servi de point de départ et de remonter à partir de ce sommet, en considérant successivement le côté précédent, puis son conjugué si ce côté est de la première sorte, puis le sommet précédent, puis le côté précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on finisse par arriver à un côté de la deuxième sorte.

Il est aisé de voir qu'il y a trois catégories de cycles : Tout point correspondant d'un point z situé au-dessus de X est lui-même au-dessus de X, donc tout sommet correspondant d'un sommet de la première catégorie (§ III) est lui-même de la première catégorie. Il y aura donc des cycles formés uniquement de sommets de la première catégorie; ce seront les *cycles de la première catégorie*. En partant d'un sommet de la première catégorie et prenant successivement les côtés et les sommets qu'on rencontre en appliquant la règle précédente, on ne rencontrera jamais que des sommets de la première catégorie et, par conséquent, aussi jamais que des côtés de la première sorte. On ne sera donc arrêté que quand on sera revenu au sommet qui aura servi de point de départ, c'est-à-dire que le cycle sera *fermé*.

Tout sommet correspondant d'un sommet de la deuxième ou de la troisième catégorie devra lui-même appartenir à l'une des deux catégories. Ce qui nous amène à considérer deux nouvelles classes de cycles.

Les *cycles de la deuxième catégorie* ne contiendront que des sommets de la deuxième catégorie; en leur appliquant la règle précédente, on ne rencontrera pas de côtés de la deuxième sorte, c'est-à-dire que le cycle sera encore *fermé*.

Les *cycles de la troisième catégorie* contiendront des sommets de la troisième catégorie et pourront en contenir également de la deuxième; en leur appliquant la règle précédente, on rencontrera des côtés de la deuxième sorte, c'est-à-dire que le cycle sera *ouvert*. Cela va nous permettre de classer en familles les polygones R_0 et par conséquent les groupes G.

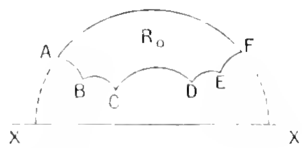
Le polygone R_0 sera :

de la 1re famille s'il y a des cycles de la 1re catégorie seulement;
de la 2e famille s'il y a des cycles de la 2e catégorie seulement;
de la 3e famille s'il y a des cycles de la 3e catégorie seulement;
de la 4e famille s'il y a des cycles de la 2e et de la 3e catégorie seulement;
de la 5e famille s'il y a des cycles de la 1re et de la 3e catégorie seulement;
de la 6e famille s'il y a des cycles de la 1re et de la 2e catégorie seulement;
de la 7e famille s'il y a des cycles des trois catégories.

Quelques exemples feront mieux comprendre ma pensée.

Exemple I. — Le polygone R_0 est un hexagone ABCDEF; tous les côtés

Fig. 3.



sont de la première sorte; les côtés

AB et AF,
BC et FE,
CD et ED

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement :

1° En partant du sommet A, le sommet A, le côté AB, le côté AF et le sommet A;

2° En partant de B, le sommet B, puis BC, puis EF, puis F, puis FA, puis AB, puis B;

3° En partant de C, le sommet C, puis CD, puis ED, puis E, puis EF, puis BC, puis C;

4° En partant de D, le sommet D, puis DE, puis CD, puis D, Il y a donc quatre cycles formés respectivement :

1° Du sommet A;

2° Des sommets B et F;

3° Des sommets C et E;

4° Du sommet D.

Exemple II. — Le polygone R_0 est toujours un hexagone ABCDEF dont tous les côtés sont de la première sorte; mais les côtés opposés

AB et ED,
BC et FE,
CD et AF

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement :

1° En partant de A, le sommet A, puis AB, puis DE, puis E, puis EF, puis BC, puis C, puis CD, puis FA, puis A;

2° En partant de B, le sommet B, puis BC, puis EF, puis F, puis FA, puis CD, puis D, puis DE, puis AB, puis B.

Il y a donc deux cycles formés respectivement :

1° Des sommets A, C et E;

2° Des sommets B, D et F.

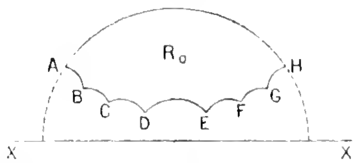
Exemple III. — Le polygone R_0 est un octogone ABCDEFGH dont tous les côtés sont de la première sorte; les côtés opposés

AB et FE,
BC et GF,
CD et HG,
DE et AH

sont conjugués.

Partons du sommet A, nous rencontrerons successivement : A, AB, EF, F,

Fig. 4.



FG, BC, C, CD, GH, H, HA, DE, E, EF, AB, B, BC, FG, G, GH, CD, D, DE, HA, A.

Tous les sommets font donc partie d'un même cycle.

Exemple IV. — Supposons maintenant que les côtés

$$\begin{array}{lcl} AB & \text{et} & DC, \\ BC & \text{et} & ED, \\ EF & \text{et} & HG, \\ FG & \text{et} & AH \end{array}$$

soient conjugués.

Partons encore de A, nous rencontrerons :

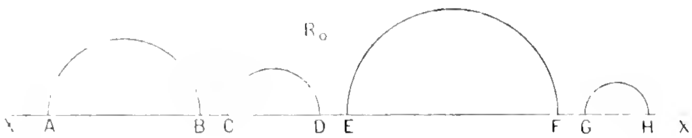
A, AB, CD, D, DE, BC, C, CD, AB, B, BC, DE, E, EF, GH, H, HA, FG, G, GH, EF, F, FG, HA, A.

Tous les sommets font encore partie d'un même cycle.

Dans les quatre exemples précédents, tous les côtés sont de la première sorte, tous les cycles sont donc de la première ou de la deuxième catégorie.

Exemple V. — Le polygone R_0 est encore un octogone ABCDEFGH.

Fig. 5



Les côtés AB, CD, EF, GH sont de la première sorte; les côtés BC, DE, FG, HA sont de la deuxième sorte. Les côtés

$$\begin{array}{lcl} AB & \text{et} & DC, \\ EF & \text{et} & HG \end{array}$$

sont conjugués. On rencontrera successivement :

1° En partant de A, le côté AB, puis CD, puis D, puis DE qui est de la deuxième sorte;

2° En partant de C, le côté CD, puis AB, puis B, puis BC qui est de la deuxième sorte;

3° En partant de E, le côté EF, puis GH, puis H, puis HA qui est de la deuxième sorte;

4° En partant de G, le côté GH, puis EF, puis F, puis FG qui est de la deuxième sorte.

Les sommets se répartissent donc en quatre cycles formés respectivement :

1° De A et de D;

2° De C et de B;

3° De E et de H;

4° De G et de F.

Ces cycles sont ouverts, puisque dans la recherche de chacun d'eux on a été arrêté par la rencontre d'un côté de la deuxième sorte. Ils sont donc de la troisième catégorie.

On peut pousser plus loin encore la classification des polygones R_0 et des groupes G. Voici de quelles considérations nous pourrons faire usage à cet effet.

Considérons d'abord un cycle de la première catégorie et un sommet A_0 de R_0 faisant partie de ce cycle. Soient B_1 le côté suivant, C_1 son conjugué, A_1 le sommet suivant, B_2 le côté suivant, C_2 son conjugué, A_2 le sommet suivant et ainsi de suite, on poursuivra de la sorte jusqu'à ce qu'on arrive à un sommet A_n coïncidant avec A_0.

On pourra même poursuivre indéfiniment de cette façon sans être jamais arrêté puisqu'on ne rencontrera pas de côté de la deuxième sorte. Mais le sommet A_n ne différera pas de A_0, le sommet A_{n+1} de A_1, et, en général, le sommet A_h de A_k si l'on a

$$h \equiv k \pmod{n}.$$

Le cycle se compose alors de n sommets distincts, à savoir $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

Supposons maintenant qu'on décrive autour de A_0 un cycle infiniment petit quelconque; on sortira de R_0 par le côté B_1, pour entrer dans le polygone R_1. Considéré comme appartenant à ce dernier polygone, le côté B_1 sera l'homologue de C_1; par conséquent, le point A_0 sera l'homologue de A_1 et le côté suivant sera l'homologue de B_2. Le cycle infiniment petit décrit autour de A_0 sortira ensuite du polygone R_1 en franchissant ce côté homologue de B_2 et entrera dans un certain polygone que j'appelle R_2. Considéré comme appartenant à ce polygone, le côté qui, dans R_1, était homologue de B_2 sera homologue de C_2; le point A_0 sera homologue de A_2 et le côté suivant l'homologue de B_3.

On continuera de la sorte, la loi est manifeste. On passera successivement dans les polygones $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{q-1}$ et enfin dans R_q qui devra se confondre avec R_0.

On sortira du polygone R_h pour entrer dans le polygone R_{h+1} en franchissant un côté qui, envisagé comme appartenant à R_h, sera l'homologue de B_{h+1} et qui, envisagé comme appartenant à R_{h+1}, sera l'homologue de C_{h+1}. Le sommet A_0, envisagé comme appartenant à R_h, sera l'homologue de A_h.

Mais le polygone R_q doit se confondre avec R_0; donc le sommet A_q ne doit pas différer de A_0; on a donc

$$q \equiv 0 \pmod{n},$$

d'où

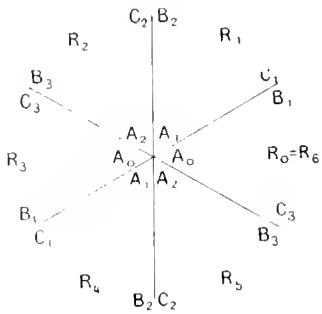
$$q = pn.$$

Le nombre des polygones qui ont un sommet en A_0 sera donc divisible par n. La figure ci-jointe éclaircira peut-être ce qui précède. Nous y avons supposé

$$n = 3, \qquad p = 2.$$

Nous n'avons représenté que les parties des polygones qui sont infiniment voisines de A_0; c'est pourquoi chacun de ces polygones est représenté seule-

Fig. 6.



ment par un angle. Dans le voisinage de chaque sommet A (ou de chaque côté B ou C) et à l'intérieur de chaque polygone R_i, nous avons marqué une lettre indiquant quel est le sommet (ou le côté) de R_0 dont ce sommet A (ou ce côté B ou C) est l'homologue si on l'envisage comme faisant partie du polygone R_i.

Nous avons donc, autour du point A_0, pn angles dont la somme doit être égale à 2π, et comme dans deux polygones congruents les angles homologues sont égaux, on aura, entre les angles A, la relation

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{q-1} = 2\pi.$$

Or on a

$$A_{kn} + A_{kn+1} + A_{kn+2} + \ldots + A_{kn+n-1} = A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1}.$$

Il vient donc

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} = \frac{2\pi}{p},$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

La somme des angles de R_0 qui correspondent aux sommets d'un même cycle de la première catégorie est une partie aliquote de 2π.

Mais ici deux cas peuvent se présenter : ou bien la somme de ces angles sera égale à 2π, ou bien à 2π divisé par un nombre entier plus grand que 1.

Dans le premier cas, je dirai que le cycle appartient à la première sous-catégorie; dans le second cas, qu'il appartient à la deuxième sous-catégorie.

Les propriétés des cycles de ces deux sous-catégories ne sont pas tout à fait les mêmes; c'est ce qui nous engage à faire dans la première famille une coupure, et à séparer, sous le nom de premier ordre, les polygones R_0 dont tous les cycles sont de la première sous-catégorie, pendant que les autres polygones R_0 qui auront un cycle de la deuxième sous-catégorie formeront le deuxième ordre.

Reprenons les polygones $R_0, R_1, \ldots, R_{q-1}$ qui ont un sommet en A_0.

Envisageons la substitution réelle qui change R_0 en R_n et qui fait évidemment partie du groupe G. Cette substitution ne changera pas le point A_0 qui devra par conséquent en être un point double. C'est donc une substitution elliptique; elle pourra se mettre sous la forme (3) (§ I) et de telle sorte que

$$K = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Supposons maintenant que le point A_0, au lieu d'appartenir à un cycle de la première catégorie, appartienne à un cycle de la deuxième catégorie. Tous les raisonnements précédents s'appliqueront, puisque nous n'avons supposé qu'une chose : c'est que le cycle était fermé, et puisque cela est vrai des cycles de la deuxième comme de ceux de la première catégorie. Seulement le nombre q, et par conséquent le nombre p, seront infinis. La somme des angles correspondant aux divers sommets du cycle sera donc nulle et c'est ce qu'il était aisé de prévoir, puisque tout angle d'un polygone normal dont le sommet est de la deuxième catégorie est évidemment nul. La substitution réelle qui change R_0 en R_n ne changera pas A_0. Ce sommet en sera donc un point double, et comme il est sur X, la substitution sera parabolique ou hyperbolique.

Soit S cette substitution; soit C_k le côté qu'il faut franchir pour passer de R_k dans R_{k+1}. C_{k+n} sera le transformé de C_k par S, de sorte que les divers côtés C_k seront les transformés successifs de $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ par la substitution S et la substitution inverse.

Supposons d'abord que la substitution S soit parabolique. Nous avons vu (§ I) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas X ne peut rencontrer qu'un nombre fini de transformés successifs d'un cercle tel que C_0 par une substitution telle que S et par sa substitution inverse. Un pareil arc ne passera donc qu'à travers un nombre fini des polygones R_0, R_1, ..., R_q, ..., qui ont un sommet en A_0.

Supposons, au contraire, que la substitution S soit hyperbolique. Soient A_0 et A'_0 les deux points doubles de cette substitution, C le cercle décrit sur $A_0 A'_0$ comme diamètre. Nous avons vu (§ I) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas X rencontre un nombre infini de transformés successifs d'un cercle tel que C_0 ou n'en rencontre qu'un nombre fini, suivant qu'il coupe ou ne coupe pas le cercle C. Un pareil arc traversera donc un nombre infini des polygones R_0, R_1, ..., R_q, ... s'il coupe C, et il n'en traversera qu'un nombre fini s'il ne coupe pas C. Si la substitution S est parabolique, nous dirons que le cycle auquel appartient A_0 est de la troisième sous-catégorie; si elle est hyperbolique, nous dirons que le cycle est de la quatrième sous-catégorie.

Cela va nous permettre de subdiviser les deuxième, quatrième, sixième, septième familles.

Un groupe de l'une de ces familles appartiendra au premier ordre de cette famille s'il ne contient pas de cycle de la quatrième sous-catégorie, et au deuxième ordre s'il contient des cycles de la quatrième sous-catégorie (1).

VI. — Existence des groupes fuchsiens.

Jusqu'ici, nous avons raisonné sur les groupes fuchsiens en supposant qu'ils existaient et nous n'en avons pas démontré l'existence. Nous avons vu que tout groupe fuchsien G peut être considéré comme engendré par un polygone normal R_0 dont les côtés sont de deux sortes; ceux de la première sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X lui-même. Les côtés de la première sorte sont au nombre de $2n$ et se répartissent en paires de côtés conjugués. Quand on connaît le polygone R_0 et la répartion de ses côtés en paires, le groupe G correspondant est, en général, parfaitement déterminé. Quant aux sommets, ils se répartissent en un certain nombre de cycles.

Pour pouvoir donner naissance à un groupe fuchsien G, le polygone R_0 doit satisfaire à deux conditions :

(1) On peut se passer de cette dernière subdivision. Poincaré démontre plus loin qu'on peut éviter les cycles de la quatrième sous-catégorie, en modifiant convenablement le polygone R_0. Mais cette démonstration appelle des critiques; en réalité, le polygone générateur n'admet pas des cycles de la quatrième sous catégorie. *Voir* les Notes à la fin du Volume. N. E. N.

1° *Deux côtés conjugués doivent être congruents ;*

2° *La somme des angles d'un même cycle de la première catégorie doit être une partie aliquote de* 2π.

Ces conditions sont nécessaires ; sont-elles suffisantes ? C'est ce que je vais démontrer.

Je suppose que le polygone R_0 soit donné, ainsi que la distribution de ses côtés de la première sorte. De cette connaissance résulte celle des substitutions fondamentales du groupe correspondant et par conséquent la possibilité de construire les polygones R limitrophes de R_0 (1). Opérant sur ceux-ci comme on a opéré sur R_0, on construira les polygones limitrophes des polygones déjà obtenus et continuant indéfiniment cette opération, on construira une infinité de polygones congruents à R_0. Mais ici plusieurs hypothèses peuvent être faites :

1° Ou bien les polygones ainsi construits couvriront une partie du plan mais ne la couvriront qu'une fois de manière à ne pas empiéter les uns sur les autres et à ne pas se recouvrir mutuellement. Alors ils formeront une sorte de damier ; la portion du plan envisagée sera partagée en un certain nombre de régions congruentes entre elles. *L'existence du groupe fuchsien correspondant à* R_0 *sera donc démontrée.*

2° Ou bien les polygones construits de la sorte empiéteront les uns sur les autres de façon à recouvrir une partie du plan plusieurs fois ou même une infinité de fois. Dans ce cas le groupe auquel conduirait R_0 (c'est-à-dire le groupe dont les substitutions fondamentales sont celles qui changent chaque côté de la première sorte de R_0 en son conjugué) est continu ; ce n'est pas un groupe fuchsien.

Comment reconnaîtrons-nous maintenant quel est celui de ces deux cas auquel nous avons affaire ? Considérons un point quelconque A, intérieur à R_0, et un second point B quelconque. Joignons A à B par un arc de courbe quelconque AMB. Cet arc sortira de R_0 par un certain côté C_0 ; on construira alors le polygone R_1, limitrophe de R_0 le long de C_0 ; si AMB sort de R_1 par un côté C_1, on construira le polygone R_2, limitrophe de R_1 le long de C_1 et ainsi de suite.

Les arcs AMB seront de deux sortes :

1° Ou bien, après un nombre fini d'opérations de ce genre, on finira par

(1) Il faut excepter les cas dont il est question dans la note de la page 126. N. E. N.

trouver un polygone R_n duquel ne sorte plus l'arc AMB, de telle façon que le point B soit à l'intérieur de R_n; c'est alors que le point B se trouve dans la partie du plan recouverte par les polygones R et que l'arc AMB ne sort pas de cette partie du plan : l'arc AMB sera *de la première sorte*.

2° Ou bien, quelque grand que soit le nombre des opérations effectuées, on ne trouvera jamais un polygone R_n duquel ne sorte plus l'arc AMB : l'arc AMB sera alors *de la deuxième sorte*.

Au sujet du point B on peut faire trois hypothèses :

1° Tous les arcs AMB qu'on peut tracer entre A et B sont de la deuxième sorte; le point B est alors hors de la partie du plan recouverte par les polygones R.

2° Parmi les arcs AMB tracés entre A et B, il y en a de la première sorte; chacun de ces arcs conduit, d'après ce qui précède, à un polygone R_n à l'intérieur duquel se trouve B. De plus ce polygone R_n est le *même* quel que soit l'arc AMB de la première sorte par lequel on a joint les deux points A et B. Dans ce cas le point B est dans la partie du plan recouverte par les polygones R; de plus ces polygones ne recouvrent cette partie du plan qu'une seule fois et l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est démontrée.

3° Parmi les arcs AMB tracés entre A et B, il y en a de la première sorte; chacun d'eux conduit à un polygone R_n à l'intérieur duquel se trouve B; mais ce polygone change quand on change l'arc AMB. Dans ce cas le point B est dans la partie du plan recouverte par les polygones R; mais ces polygones recouvrent cette partie du plan plus d'une fois de telle sorte qu'il n'y a pas de groupe fuchsien correspondant à R_0.

Nous sommes donc conduits à la règle suivante :

Il faut joindre deux points A et B par deux arcs AMB, ANB de la première sorte et rechercher si ces deux arcs conduisent à un même polygone R_n.

Mais nous pouvons la modifier de la manière suivante : On trace un contour fermé AMA, dont le point initial et final A est intérieur à R_0; si cet arc AMA sort de R_0 par un côté C_0, on construira le polygone R_1, limitrophe de R_0 le long de C_0; s'il sort de R_1 par un côté C_1, on construira le polygone R_2, limitrophe de R_1 le long de C_1 et ainsi de suite. Je suppose de plus que l'arc AMA soit de la première sorte, c'est-à-dire qu'on l'ait choisi de telle manière qu'après un nombre fini d'opérations, on arrive à un polygone R_n d'où ne sorte plus l'arc AMA. *Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que, quel* *que soit le contour AMA de la première sorte, le polygone* R_n *soit précisément* R_0.

Supposons d'abord que le polygone R_0 envisagé n'admette pas de cycle de la quatrième sous-catégorie.

Dans ce cas j'énoncerai les théorèmes suivants :

I. *Tout arc de courbe* AMB *qui coupe* X *est de la deuxième sorte.* — En effet, le polygone R_0 est tout entier au-dessus de X et il en est par conséquent de même de tous les polygones R qui lui sont congruents. Supposons qu'on construise les polygones $R_1, R_2, \ldots, R_n$ comme il a été dit plus haut. Ils seront tous dans la partie du plan située au-dessus de X, et, comme l'arc AMB doit sortir de cette partie du plan, il devra sortir de R_n quelque grand que soit n.

C. Q. F. D.

II. *Tout arc* AMB *qui ne coupe pas* X *est de la première sorte.* — En effet, je construis comme il a été dit plus haut les polygones

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_p, \quad \ldots$$

et j'appelle λ_p la portion de l'arc AMB qui est à l'intérieur du polygone R_p. L'arc AMB va se trouver décomposé en une série d'arcs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ correspondant à la série des polygones $R_0, R_1, R_2, \ldots$. Le nombre de ces arcs (qui est celui des polygones correspondants) sera fini si AMB est de la première sorte (ce que nous nous proposons de démontrer) et infini dans le cas contraire.

L'arc λ_p joindra évidemment deux côtés de la première sorte du polygone R_p, car il ne doit pas couper X et ne peut, par conséquent, aboutir à un côté de la deuxième sorte, puisque ces côtés sont des segments de X. On peut d'ailleurs faire deux hypothèses :

1° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc λ_p sont deux côtés consécutifs du polygone R_p séparés seulement par un sommet A_p de ce polygone. Je dirai que λ_p est de la première espèce et qu'il sous-tend le sommet A_p. Exemples : les arcs CD et FG de la figure 7.

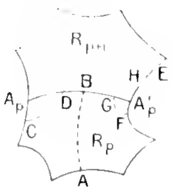
2° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc λ_p ne sont pas consécutifs, et dans ce cas je dirai que λ_p est de la deuxième espèce. Exemple : l'arc AB de la figure. Le polygone R_p étant congruent à R_0, l'arc λ_p sera congruent à un certain arc λ joignant deux points du périmètre de R_0 appartenant à deux côtés non consécutifs. Il est clair que la distance de ces deux points ne pourra être infiniment petite et que, par conséquent, la L (*voir* § II) de cet arc λ ne sera pas non plus infiniment petite, mais sera plus grande qu'une certaine quantité donnée K. La L de l'arc λ_p sera la même que celle de l'arc congruent λ; elle sera donc plus grande que K.

Soit L_0 la L de l'arc AMB; elle est finie, parce que cet arc ne coupe pas X. Le nombre des arcs λ_p de la seconde espèce sera donc plus petit que $\frac{L_0}{K}$, et par conséquent *limité*.

On pourra donc prendre q assez grand pour que les arcs $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \ldots$ et en général les arcs λ_p où $p > q$ soient tous de la première espèce; il reste à démontrer que le nombre de ces arcs $\lambda_p\,(p > q)$ est fini.

J'envisage deux arcs consécutifs λ_p et λ_{p+1} et l'arc $\mu_p = \lambda_p + \lambda_{p+1}$ formé par leur réunion; je dirai que l'arc μ_p est de la première catégorie si les arcs

Fig. 7.



λ_p et λ_{p+1} sous-tendent un même sommet, et de la deuxième catégorie dans le cas contraire. Ainsi l'arc CE de la figure sera de la deuxième catégorie et l'arc FH de la première, parce que l'arc CD sous-tend le sommet A_p pendant que les arcs FG, GH et DE sous-tendent le sommet A'_p.

Envisageons un arc μ_p de la deuxième catégorie : il aboutira à deux côtés de la première sorte appartenant l'un à R_p, l'autre à R_{p+1} et il traversera le côté C_p qui sert de frontière commune à ces deux polygones; d'ailleurs ces trois côtés n'ont aucun point commun.

Le polygone R_p étant congruent à R_0, le côté C_p sera congruent à un des côtés H de R_0. Soit R' celui des polygones R qui est limitrophe de R_0 le long de H; l'arc μ_p sera congruent d'un certain arc μ dont l'une des extrémités sera sur un des côtés B de R_0 et l'autre sera sur un des côtés B' de R'; cet arc traversera le côté H. D'ailleurs les trois côtés B, H et B' n'auront aucun point commun.

Dans ces conditions, il est clair que la L de l'arc μ et par conséquent celle de μ_p n'est pas infiniment petite et est plus grande qu'une quantité fixe K. Il suit de là, comme plus haut, que le nombre des arcs μ_p de la deuxième catégorie est *limité* et qu'on pourra prendre q assez grand pour que tous les arcs

$\mu_{q+1}, \mu_{q+2}, \ldots$ et en général $\mu_p (p > q)$ soient tous de la première catégorie; en d'autres termes, tous les arcs $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \ldots$ et en général tous les arcs $\lambda_p (p > q)$ sous-tendront un même sommet D.

Il reste à démontrer que le nombre de ces arcs λ_p sous-tendant le sommet D est fini. Nous pouvons faire deux hypothèses :

1° Ou bien D appartient à un cycle de la première ou de la troisième catégorie, et alors ce sommet n'appartient qu'à un nombre fini de polygones R, et par conséquent le nombre des arcs λ_p est nécessairement fini;

2° Ou bien D appartient à un cycle de la deuxième catégorie, c'est-à-dire de la troisième sous-catégorie, puisque nous avons supposé que le polygone R_0 n'admettait pas de cycles de la quatrième sous-catégorie. Nous avons vu (§ V) qu'un arc de courbe ne coupant pas X ne pouvait traverser qu'un nombre fini des polygones auxquels appartient le sommet D. Il suit de là que le nombre des arcs λ_p est fini.

Donc, dans tous les cas, le nombre des arcs λ_p est fini; donc l'arc AMB est de la première sorte. C. Q. F. D.

Donc la partie du plan recouverte par les polygones R *est la partie située au-dessus de* X.

Considérons maintenant un contour fermé AMA de la première sorte, c'est-à-dire ne coupant pas X; appliquons-lui la règle exposée plus haut et supposons qu'en le parcourant on rencontre successivement les polygones $R_0, R_1, \ldots$ pour arriver au polygone R_n quand on sera de retour au point A. Si le polygone R_n est précisément R_0, je dirai que AMA est de la première espèce, et, dans le cas contraire, qu'il est de la deuxième espèce. Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que tous les contours AMA de la première sorte soient de la première espèce. A ce sujet je démontrerai successivement les théorèmes suivants :

III. *Si le contour* AMA *se compose :* 1° *d'un arc de courbe* AMB, 2° *d'un contour fermé infiniment petit* BNB, 3° *de l'arc* AMB *parcouru en sens contraire, il est de la première espèce.*

En effet, construisons successivement, d'après la règle exposée plus haut, les polygones R_0, R_1, R_2, ..., R_m que l'on rencontre en parcourant l'arc AMB. Parcourons ensuite le contour infiniment petit BNB. On peut faire au sujet de ce contour trois hypothèses :

1° Ou bien BNB reste tout entier à l'intérieur du polygone R_m et alors parcourant ce contour on ne sortira pas de ce polygone;

2° Ou bien BNB franchit un des côtés C_m de R_m, mais sans envelopper un des sommets de ce polygone. Alors, en suivant le contour, on sortira d'abord de R_m en franchissant le côté C_m pour entrer dans un nouveau polygone R_{m+1}, puis on sortira de R_{m+1} en franchissant le côté C_m en sens contraire et par conséquent en rentrant dans R_m;

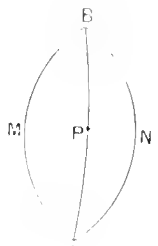
3° Ou bien BNB enveloppe un des sommets de R_m. Ce sommet sera forcément de la première catégorie, puisqu'il ne pourra être sur X. Ce sommet appartiendra à un cycle comprenant par exemple n sommets et la somme des angles correspondants sera $\frac{2\pi}{p}$. On rencontrera alors en parcourant BNB successivement pn polygones $R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots, R_{m+pn}$; la somme des angles en D de tous ces polygones étant 2π, R_{m+pn} se confondra avec R_m.

Donc, dans tous les cas possibles, on retombera sur le polygone R_m après avoir parcouru le contour BNB. Parcourons maintenant l'arc AMB en sens contraire; nous rencontrerons successivement les polygones $R_m, R_{m-1}, \ldots, R_1, R_0$, c'est-à-dire, dans l'ordre inverse, ceux que nous avions rencontrés en parcourant une première fois l'arc AMB. Quand nous serons de retour au point A, nous retomberons sur le polygone R_0. Donc le contour AMA sera de la première espèce.

C. Q. F. D.

IV. *Si deux contours AMBPA, APBNA sont de la première sorte et de la première espèce, il en sera de même du contour AMBNA formé par leur réunion.*

Fig. 8



En effet, si AMBPA, APBNA sont de la première sorte, c'est que ni AMB, ni ANB ne sortent de la région recouverte par les polygones R et, par conséquent, que AMBNA est aussi de la première sorte.

Si AMBPA est de la première espèce, on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc AMB ou l'arc ABP; si APBNA est de la première espèce, on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc APB ou l'arc ANB. Donc on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc AMB ou l'arc ANB. Donc AMBNA est de la première espèce. C. Q. F. D.

V. *Si un contour AMA est de la première sorte, tout contour ANA qui lui est intérieur est aussi de la première sorte.*

En effet, si AMA ne coupe pas X, il en sera de même du contour intérieur ANA. C. Q. F. D.

VI. *Un contour quelconque AMA de la première sorte est de la première espèce.*

En effet, ce contour pourra être décomposé en une infinité de contours comme ceux qui sont considérés dans le théorème III. En vertu du théorème V, ces contours sont tous de la première sorte; donc en vertu du théorème III chacun d'eux est de la première espèce, donc en vertu du théorème IV le contour total lui-même AMA est de la première espèce. C. Q. F. D.

L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 *est donc démontrée.*

Les polygones R transformés de R_0 par les diverses substitutions de ce groupe recouvriront toute la partie du plan située au-dessus de X et ne la recouvriront qu'une fois.

Je suppose maintenant que R_0 *admette des cycles de la quatrième sous-catégorie* (¹).

Les théorèmes I, III et IV seront évidemment encore vrais. Mais il n'en sera pas de même du théorème II. Voyons comment il faudra le modifier dans le cas qui nous occupe.

Reprenons les notations de ce théorème. On démontrera comme plus haut que l'on peut prendre q assez grand pour que tous les arcs λ_p où $p > q$ soient de la première espèce et sous-tendent un même sommet D. Je n'ai rien à ajouter pour le cas où D est de la première ou de la troisième catégorie, ou bien de la troisième sous-catégorie. Supposons maintenant que D soit de la quatrième sous-catégorie. Le nombre des arcs $\lambda_p (p > q)$ sera-t-il fini ou infini? Nous avons vu (§ V) qu'un arc de courbe qui ne coupe pas X traverse un nombre

(¹) *Voir* la note de la page 134. N. E. N.

infini de polygones R qui ont un sommet en D ou seulement un nombre fini, selon qu'il coupe ou ne coupe pas un certain cercle C passant par D et ayant son centre sur X.

Il suit de là qu'un arc AMB qui ne coupe pas X peut cependant être de la deuxième sorte.

Considérons un arc AMB de la deuxième sorte venant aboutir à un cercle C et supposons qu'il se déforme d'une façon continue; il ne pourra cesser d'être de la deuxième sorte qu'en cessant de couper C, comme il est aisé de le comprendre.

Le théorème X est encore vrai, mais il a besoin d'une démonstration nouvelle. Envisageons un contour fermé AMA qui soit de la première sorte et un second contour ANA intérieur au premier, je dis que ce second contour ne peut être de la deuxième sorte. En effet, s'il en était ainsi, il devrait couper un certain cercle C, on pourrait passer du contour ANA au contour AMA d'une façon continue, et en variant de la sorte, le contour ANA ne cesserait pas de couper C; il ne cesserait donc pas d'être de la deuxième sorte, de manière que AMA devrait être de la deuxième sorte, ce que nous n'avons pas supposé.

Le théorème X étant démontré, le théorème XI doit être vrai également et par conséquent *l'existence du groupe fuchsien correspondant à* R_0 *est démontrée*. Les polygones R, transformés de R_0 par les substitutions de ce groupe, recouvrent toute une partie du plan S et ne la recouvrent qu'une fois. Cette région S est tout entière au-dessus de X et elle est limitée par des segments de cet axe et par une infinité de cercles tels que C ayant leurs centres sur X (¹).

Nous avons donc démontré dans tous les cas possibles l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0; mais la démonstration peut être considérablement simplifiée dans certains cas particuliers, par exemple quand on n'a pas de sommet de la première catégorie. Dans ce cas, en effet, le polygone R_0, s'il a $2n$ côtés de la première sorte, divise la partie du plan située au-dessus de X en $2n+1$ régions, à savoir le polygone R_0 lui-même et la région comprise entre l'axe X et chacun des côtés de la première sorte. Considérons un côté C_1, la région S_1 comprise entre C_1 et X et le polygone R_1 limitrophe de R_0 le long de C_1. Le polygone R_1 subdivisera la région S_1 en $2n$ régions plus petites, à savoir le polygone R_1 lui-même et la région comprise entre l'axe X et chacun

(¹) En choisissant R_0 d'une manière convenable, les polygones R recouvriront toujours toute la partie du plan située au-dessus de X. N. E. N.

des côtés de la première sorte restés libres. Quand on aura construit plusieurs polygones $R_0, R_1, \ldots, R_p$, la partie du plan située au-dessus de X se trouvera partagée en un certain nombre de régions, à savoir les polygones $R_0, R_1, \ldots, R_p$ et les régions $S_1, S_2, \ldots, S_q$ comprises entre X et chacun des côtés de la première sorte restés libres. Si l'on cherche à construire un nouveau polygone limitrophe de $R_0, R_1, \ldots, R_p$, il se trouvera tout entier dans une des régions $S_1, S_2, \ldots, S_q$. Il est donc impossible que les polygones ainsi construits se recouvrent mutuellement. L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est donc démontrée.

VII. — Principaux exemples.

Avant de donner quelques exemples de ces groupes fuchsiens dont je viens de démontrer l'existence d'une manière générale, je vais expliquer une notation dont je me servirai dans la suite pour définir certaines propriétés du polygone R_0. Je commencerai par désigner chacun des côtés de R_0 par un numéro d'ordre de telle sorte qu'en parcourant le périmètre de ce polygone dans un sens convenable on rencontre successivement le côté 1, puis le côté 2, etc. Cela fait, j'écrirai le numéro d'un des côtés de la première sorte, puis celui de son conjugué, puis une virgule, puis un autre côté de la première sorte, puis son conjugué, puis une virgule, etc.; enfin j'écrirai à la suite les numéros des côtés de la deuxième sorte. Par exemple, si R_0 est un octogone dont les côtés de rang impair soient de la première sorte, ceux de rang pair de la deuxième sorte et dont les côtés opposés de la première sorte soient conjugués, je dirai que le polygone R_0 est du système

$$(1.5, 3.7, 2468).$$

J'aurai ainsi défini le nombre des côtés de chaque sorte et la distribution des côtés en paires. De cette distribution des côtés en paires nous déduirons celle des sommets en cycles.

Je vais maintenant étudier quelques exemples en me servant de ces notations précédentes.

Exemple I (14, 23).

Le polygone R_0 est un quadrilatère dont je désigne les sommets par A, B, C, D; le côté 1 sera le côté AB, le côté 2 le côté BC, le côté 3 le côté CD, le côté 4 le côté DA. Tous les côtés sont de la première sorte; ce sont donc des arcs de cercle ayant leur centre sur X. Les côtés AB et AD, CB et CD sont conjugués.

ils sont donc congruents. Enfin l'angle A est égal à $\frac{2\pi}{\alpha}$, l'angle B + D à $\frac{2\pi}{\beta}$, l'angle C à $\frac{2\pi}{\gamma}$, les nombres α, β, γ étant entiers.

Nous pouvons joindre les deux sommets opposés A et C par un arc de cercle ayant son centre sur X, le quadrilatère R_0 se trouvera ainsi décomposé en deux triangles curvilignes ACD et ABC.

Je voudrais maintenant définir une expression dont je serai quelquefois appelé à me servir dans la suite. Envisageons dans le plan une transformation par rayons vecteurs réciproques; soient o le centre de la transformation et K^2 son paramètre; le cercle C dont le centre est o et le rayon K demeure inaltéré par la transformation. Je dirai que cette transformation est une *réflexion sur le cercle* C et que deux figures transformées réciproques sont *symétriques par rapport à ce cercle*.

Cela posé, il est clair que les deux triangles ACD, ABC sont symétriques par rapport au cercle AC. Il suit de là que les angles curvilignes CAD et CAB, ACD et ACB, ABC et ADC sont égaux et par conséquent que le triangle ABC a ses trois angles respectivement égaux à $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$.

Soit maintenant R_1 un quadrilatère limitrophe de R_0 le long d'un de ses côtés, de AB par exemple; ces deux polygones seront symétriques par rapport au cercle AB.

Ceci nous conduit, dans le cas particulier qui nous occupe, à une construction très simple du système des polygones R.

On construira d'abord un triangle ABC dont les trois angles seront respectivement $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$; on peut construire une infinité de pareils triangles, mais ils sont tous congruents entre eux; on construira alors les triangles symétriques de ABC par rapport à leurs côtés restés libres et ainsi de suite. On partagera ainsi le plan en une infinité de triangles tous congruents à ABC ou à ACD et en les réunissant deux à deux, on aura partagé le plan en une infinité de quadrilatères congruents à R_0 = ABCD.

Qu'arrivera-t-il si l'un des nombres entiers α, β, γ devient infini; supposons par exemple que ce soit γ qui devienne infini; l'angle C qui était égal à $\frac{2\pi}{\gamma}$ deviendra nul; le cycle formé par le sommet C cessera d'être de la première catégorie pour devenir de la troisième sous-catégorie. R_0 se composerait encore de deux triangles ABC, ADC symétriques par rapport au cercle AC. Les deux côtés AC et BC sont des arcs de cercle qui sont tangents en un point C situé sur X; le côté AB est aussi un arc de cercle coupant AC et BC sous des angles $\frac{\pi}{\alpha}$ et $\frac{\pi}{\beta}$.

Supposons en particulier :

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 2.$$

Supposons de plus, pour achever de déterminer le triangle ABC, que les côtés AC et BC se réduisent à deux droites perpendiculaires à X de telle façon que le point C soit rejeté à l'infini; que la droite BC prolongée vienne passer par l'origine O; que la distance des deux parallèles AC et BC soit égale à $\frac{1}{2}$. Le cercle AB aura alors pour centre o et pour rayon 1. On retombera ainsi sur le *Fundamentaldreieck* de M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd. XIV). Le groupe fuchsien correspondant est extrêmement remarquable; il se compose de toutes les substitutions $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ telles que a, b, c, d étant entiers, on ait $ad - bc = 1$. C'est la considération de ce groupe et des sous-groupes qui y sont contenus qui est le fondement des recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

Exemple II (16, 25, 34) :

C'est l'exemple I du paragraphe V. Le polygone R_0 est un hexagone ABCDEF et les sommets forment quatre cycles distincts formés respectivement des sommets A; B et F; C et E; D; les angles curvilignes A, B + F, C + E, D doivent être respectivement égaux à $\frac{2\pi}{\alpha}$, $\frac{2\pi}{\beta}$, $\frac{2\pi}{\gamma}$, $\frac{2\pi}{\delta}$; α, β, γ, δ étant des nombres entiers positifs ou infinis.

Un cas particulier intéressant est celui où l'hexagone se décompose en deux quadrilatères ABCD, ADEF, symétriques par rapport au cercle AD. Dans ce cas, on a, pour les angles curvilignes de ces deux quadrilatères, les valeurs suivantes :

$$BAD = DAF = \frac{\pi}{\alpha}; \qquad CDA = EDA = \frac{\pi}{\delta};$$

$$B = F = \frac{\pi}{\beta}; \qquad C = E = \frac{\pi}{\gamma}.$$

Pour construire tous les hexagones R, on pourra alors opérer comme dans l'exemple précédent; on construira le quadrilatère ABCD, puis les quadrilatères symétriques par rapport à chacun de ses côtés, puis les quadrilatères symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés, et ainsi de suite.

Considérons maintenant un exemple plus général. Supposons que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés de la première sorte dont les sommets soient successivevement $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2$. Supposons que les côtés

$$A_1A_2 \text{ et } A_1B_2, \quad A_2A_3 \text{ et } B_2B_3, \quad \ldots, \quad A_{n-1}A_n \text{ et } B_{n-1}B_n, \quad A_nA_{n+1} \text{ et } B_nA_{n+1}$$

soient conjugués. Les sommets se répartiront en $n+1$ cycles :

$$A_1; \quad A_2, B_2; \quad A_3, B_3; \quad \ldots; \quad A_{n-1}, B_{n-1}; \quad A_n, B_n; \quad A_{n+1}$$

et le polygone R_0 s'écrira, dans le système de notation adopté :

$$(1.2n, 2.2n-1, 3.2n-2, \ldots, n-1.n+2, n.n+1).$$

Dans un certain cas particulier, ce polygone R_0 se divisera en deux moitiés $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$ et $A_1B_2B_3\ldots B_nA_{n+1}$ symétriques par rapport au cercle A_1A_{n+1}. Chacune de ces moitiés est un polygone curviligne dont les côtés ont leurs centres sur X et dont les angles sont des parties aliquotes de π. Pour construire tous les polygones R, il suffit de partir de $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$, de construire les polygones symétriques de celui-ci par rapport à l'un de ses côtés, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés, et ainsi de suite.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de polygones générateurs de groupes fuchsiens. Parlons seulement des exemples déjà cités au paragraphe V. Avec le mode de notation adopté, les polygones R_0 des exemples II, III, IV et V s'écriraient :

$$(14, 25, 36),$$
$$(15, 26, 37, 48),$$
$$(13, 24, 57, 68),$$
$$(13, 57; 2468).$$

Quelles sont les conditions auxquelles dans ces quatre exemples doit satisfaire le polygone R_0 pour donner naissance à un groupe fuchsien?

Dans les trois premiers exemples les côtés conjugués doivent être congruents. De plus, dans l'exemple II, la somme des angles de rang pair, comme celle des angles de rang impair, doit être une partie aliquote de 2π; dans les exemples III et IV c'est la somme de tous les angles qui doit diviser 2π.

Dans l'exemple V, le polygone R_0 n'est assujetti à *aucune* condition.

VIII. Classification en genres.

J'ai fait voir dans ce qui précède comment on pouvait partager la partie du plan qui est au-dessus de X en une infinité de polygones curvilignes R congruents entre eux. Envisageons maintenant la partie du plan qui est au-dessous de X, et dans cette partie du plan les polygones curvilignes R'_0, R'_1, ... qui sont respectivement symétriques de R_0, R_1, ... par rapport à X. Il est clair que si R_i est le transformé de R_0 par une certaine substitution $f_i(z)$ du groupe G, R'_i sera le transformé de R'_0 par cette même substitution. Les substitutions du groupe G qui transforment R_0 en R_1, R_2, ... transformeront donc de même R'_0 en R'_1, R'_2, ... Mais plusieurs cas sont à considérer : si R_0 n'a pas de sommet de la quatrième sous-catégorie, l'ensemble des polygones R et R' recouvre tout le plan ; si, au contraire, nous avons des sommets de cette sous-catégorie, les polygones R et R' laissent non recouvertes les régions situées à l'intérieur d'une infinité de cercles ayant leurs centres sur X (¹).

Voici une seconde distinction plus importante pour ce qui va suivre. Supposons que le groupe G soit de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, nous n'aurons ni sommet de la troisième catégorie, ni côté de la deuxième sorte. Le polygone R_0 n'ayant pas pour côté de segment de X sera complètement séparé de son symétrique R'_0 ou bien confinera à ce polygone par un sommet seulement (s'il a des sommets de la deuxième catégorie) et non par tout un côté. Supposons, au contraire, que le groupe G soit de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille, le polygone R_0 aura un ou plusieurs côtés de la deuxième sorte et confinera à son symétrique R'_0 tout le long de ces côtés. Supposons qu'on supprime ces côtés de la deuxième sorte qui servent de frontière commune à R_0 et à R'_0 : on pourra considérer l'ensemble des deux figures R_0 + R'_0 comme une seule région qui sera limitée seulement par des arcs de cercle ayant leurs centres sur X, c'est-à-dire par les côtés de la première sorte de R_0 et ceux de R'_0. L'ensemble de ces arcs de cercle formera en général plusieurs courbes fermées séparées.

Nous allons maintenant pouvoir parler d'une nouvelle classification des groupes fuchsiens. Considérons d'abord un groupe de la première, de la deuxième ou de la sixième famille : le polygone R_0 n'aura pas de côté de la deuxième sorte ; par conséquent les points du périmètre de R_0 seront correspondants deux à deux, puisque à chaque point d'un côté de la première sorte correspond un point de son conjugué ; les points intérieurs à R_0 n'auront aucun correspondant ni dans ce polygone, ni sur son périmètre ; enfin tous les sommets d'un même cycle seront correspondants. Supposons qu'on découpe

(¹) *Voir* la note de la page 142. N. E. N.

le polygone R_0, puis qu'on le replie en le déformant d'une manière continue et de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre; après cette déformation, R_0 sera devenu une surface fermée. Si, par exemple, on reprend le quadrilatère ABCD de l'exemple I du paragraphe précédent et si, après l'avoir découpé, on le replie en le déformant de telle sorte que AB vienne se coller entre AD, puis BC contre CD, R_0 aura pris l'aspect d'une surface fermée convexe.

Considérons maintenant un quadrilatère ABCD du système (13, 24) de telle sorte que AB soit conjugué de DC et BC de AD. Replions le quadrilatère de façon à coller AB contre DC, il prendra l'aspect d'une sorte de cylindre ouvert par les deux bouts, les côtés BC et AD étant restés libres, mais étant devenus des courbes fermées; si l'on colle ensuite AC contre BD, le quadrilatère prendra l'aspect d'une sorte d'anneau fermé.

On sait que les surfaces fermées sont susceptibles d'être classées en genres de la manière suivante : sur une sphère, par exemple, on ne peut tracer un cycle fermé sans subdiviser la surface de la sphère en deux régions distinctes; il n'en est pas de même sur un tore dont un cercle méridien, par exemple, ne subdivise pas la surface en deux régions distinctes; mais on ne pourrait tracer sur le tore deux cycles fermés séparés sans obtenir une semblable subdivision.

Le genre d'une surface fermée est alors le nombre maximum des cycles fermés séparés que l'on peut tracer sur la surface sans la subdiviser en deux régions distinctes. Ainsi, une surface fermée dans laquelle on aurait percé p trous serait de genre p.

Le genre d'un groupe fuchsien sera le genre de la surface fermée, obtenue comme il vient d'être dit par la déformation de R_0.

Comment obtenir l'expression de ce genre?

Supposons qu'on ait subdivisé une surface de genre p en F polygones curvilignes, que le nombre total des côtés soit A et celui des sommets S, on aura la relation

$$F + S - A = -2p + 2.$$

Reprenons le polygone R_0; soient $2n$ le nombre de ses côtés de la première sorte et q celui des cycles fermés. Après la déformation, les côtés étant venus se coller l'un contre l'autre deux à deux, le nombre des côtés distincts restants sera n; de même le nombre des sommets distincts restants sera q.

On aura donc

$$F = 1, \qquad A = n, \qquad S = q.$$

d'où

$$q + 1 - n = 2 - 2p$$

ou

$$p = \frac{n + 1 - q}{2}.$$

Reprenons les exemples I et II du paragraphe précédent; nous aurons

$$q = n + 1,$$

d'où

$$p = 0.$$

Je vais donner une autre application de la règle qui précède.

Supposons que le polygone R_0 ait $2n$ côtés de la première sorte et de telle façon que les côtés opposés soient conjugués. Pour trouver le genre du groupe fuchsien correspondant, il faut chercher le nombre des cycles entre lesquels se répartissent les $2n$ sommets. En appliquant la règle du paragraphe V, on trouve que tous les sommets appartiennent à un même cycle si n est pair, et que, si n est impair, on a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang pair, l'autre de tous les sommets de rang impair. On a donc

$$q = 1 \quad \text{ou} \quad 2$$

selon que n est pair ou impair, et par conséquent

$$p = \frac{n}{2}$$

si n est pair, et

$$p = \frac{n - 1}{2}$$

si n est impair.

Supposons maintenant que le polygone R_0 admette des côtes de la deuxième sorte; il sera contigu tout le long de ces côtés à R'_0, de sorte que la région $R_0 + R'_0$ sera d'une seule pièce; les points situés à l'intérieur de cette région ne pourront être correspondants à aucun autre point de la région; les points du périmètre, qui appartiendront tous à des côtés de la première sorte de R_0 ou de R'_0, seront correspondants deux à deux; enfin les sommets d'un même cycle seront des points correspondants. Découpons maintenant la région $R_0 + R'_0$ et replions-la en la déformant de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre. Le genre du groupe fuchsien sera par définition celui de la surface fermée ainsi obtenue.

Soient encore $2n$ le nombre des côtés de la première sorte de R_0, q celui de ses cycles fermés; R'_0 aura de même $2n$ côtés de la première sorte et q cycles fermés. Supposons que nous ayons h côtés de la deuxième sorte et par conséquent h cycles ouverts qui seront communs à R_0 et à R'_0.

Reprenons la formule

$$F + S - A = 2 - 2p.$$

Nous aurons $F = 2$, car nous avons deux polygones R_0 et R'_0; nous aurons $A = 2n + h$, car nous avons n paires de côtés de la première sorte provenant de R_0, n paires de côtés de la première sorte provenant de R'_0 et h côtés de la deuxième sorte; enfin on aura $S = 2q + h$, puisque nous avons en tout $2q$ cycles fermés et h cycles ouverts.

Il vient donc

$$p = n - q.$$

Supposons par exemple que R_0 soit de la troisième famille, c'est-à-dire que tous ses sommets soient de la troisième catégorie. On a alors

$$q = 0, \qquad p = n.$$

Ainsi, dans l'exemple V du paragraphe V, le genre est égal à 2.

Comme second exemple, je prends un polynome R_0 dont la distribution des côtés est donnée par la formule suivante :

$$(15, 24; 3)$$

ou, plus généralement,

$$(1.2n + 1, 2.2n, 3.2n - 1, \ldots, n.n + 2; n + 1),$$

de telle sorte que le $(n + 1)^{\text{ième}}$ côté soit seul de la deuxième sorte et que les côtés d'ordre m et $2n + 2 - m$ soient conjugués. On aura dans ce cas

$$q = n,$$

d'où

$$p = 0,$$

IX. — Simplification du polygone générateur.

Nous avons vu au commencement du paragraphe IV que les régions R_0 ne sont pas complètement définies par cette condition que chacune d'elles ne contient qu'un seul point correspondant à un point z donné. Nous avons ensuite imposé à ces régions une condition de plus, celle de se réduire à des polygones curvilignes ayant pour côtés des arcs de cercle et des segments de X. Mais les régions R_0 (ou *polygones générateurs*) ne sont pas encore par là complètement déterminées. En effet, nous avons vu qu'on pouvait ajouter à R_0 une région quelconque S_0, à la condition d'en retrancher une région S_p transformée de S_0 par une des substitutions du groupe fuchsien, et que la région ainsi obtenue $R_0 + S_0 - S_p$ pouvait servir de la même façon que R_0 à engendrer ce groupe. Si les régions R_0, S_0 et S_p sont contiguës et si elles se réduisent toutes trois à des polygones normaux, c'est-à-dire dont les côtés sont des segments de X ou des arcs de cercle ayant leurs centres sur X, la région résultante $R_0 + S_0 - S_p$ est également un polygone normal. Il suit de là qu'un même groupe fuchsien peut être engendré par une infinité de polygones générateurs R_0 et qu'on peut profiter de cette indétermination pour simplifier ce polygone.

Voici comment peut s'effectuer une pareille simplification. Joignons deux points A et B du périmètre de R_0 par un arc de cercle ayant son centre sur X, de façon à diviser ce polygone en deux autres S_0 et T_0; considérons deux côtés conjugués CD et EF de R_0 et supposons que CD appartienne tout entier au périmètre de S_0 et EF à celui de T_0. Soit R_1 le polygone qui est limitrophe de R_0 le long de EF et supposons-le décomposé en deux polygones S_1 et T_1 respectivement congruents à S_0 et T_0. Le polygone $R'_0 = S_1 + T_0$ pourra servir, aussi bien que R_0, de polygone générateur pour le groupe fuchsien G. Il peut se faire que la considération de R'_0 soit plus avantageuse que celle de R_0, ou bien encore qu'en faisant sur R'_0 une opération analogue à celle qu'on vient de faire sur R_0, on arrive à un polygone R''_0 plus simple que les deux autres.

Dans chaque cas particulier, on se laissera guider par les circonstances du problème, aussi ne veux-je pas insister plus longuement sur ce point. Je me bornerai à quelques exemples, en reprenant les notations du paragraphe VII.

1° Un polygone R_0 du système (16, 23, 45) peut toujours être ramené à un polygone du système (16, 25, 34).

2° Un polygone du système (12, 34, 56, 78) peut toujours être ramené à un polygone du système (18, 27, 36, 45).

3° Un octogone du système (13, 24, 57, 68) peut toujours être ramené à un octogone du système (15, 26, 37, 48).

Quelles sont, dans cette transformation des polygones curvilignes R_0, les propriétés de ce polygone qui demeurent invariables?

1° La famille du polygone R_0 ne change pas, sauf une exception dont je parlerai

2° Son genre ne change pas non plus.

3° Le nombre des cycles fermés de la troisième sous-catégorie ne varie pas.

4° Il en est de même du nombre des cycles fermés de la quatrième sous-catégorie.

5° Le nombre des cycles fermés de la deuxième sous-catégorie ne varie pas non plus. On a vu que la somme des angles correspondants aux divers sommets d'un pareil cycle était égale à $\frac{2\pi}{p}$, p étant un nombre entier supérieur à l'unité. La valeur de ce nombre p demeure également invariable.

6° On peut au contraire, en général, augmenter ou diminuer à volonté le nombre des cycles fermés de la première sous-catégorie, qui sont tels que la somme des angles qui correspondent à tous les sommets du cycle est égale à 2π.

X. — Isomorphisme.

Nous avons vu au commencement du paragraphe III qu'un groupe fuchsien H est isomorphe à un autre groupe fuchsien G si le nombre des substitutions fondamentales est le même et si de plus toutes les relations de la forme (6) (§ III) qui existent entre les substitutions de G subsistent entre celles de H. Pour reconnaître l'isomorphisme de deux groupes donnés, nous sommes donc amenés à chercher les relations de la forme (6) (§ III) qui existent entre les substitutions d'un groupe donné et en particulier les *relations fondamentales* dont toutes les autres ne sont que des combinaisons.

Nous avons vu au paragraphe III qu'on obtenait les relations de la forme (6) de la manière suivante : on décrit à partir d'un point A intérieur à R_0 un contour fermé quelconque AMA ne sortant pas de la région du plan située au-dessus de X. Supposons que ce contour traverse successivement des régions R_0, R_{α_1}, R_{β_2}, ..., $R_{\beta_{\nu-1}}$, et enfin une région R_{β_ν} se confondant avec R_0, qu'il passe de la région $R_{\beta_{\nu-1}}$ dans la région R_{β_ν} en franchissant un côté de $R_{\beta_{\nu-1}}$ qui est l'homologue de celui des côtés de R_0 qui sert de frontière commune à cette région et à R_{α_ν}. Nous pourrons écrire la relation identique

$$z = f_{\alpha_1}\{f_{\alpha_2}(f_{\alpha_3}\dots(f_{\alpha_\nu}(z))\dots\}$$

qui est de la forme (6) et l'on obtiendra de la sorte toutes les relations de cette forme. Mais, si l'on ne veut écrire que les relations fondamentales, il ne sera pas nécessaire de décrire tous les contours AMA possibles; on se bornera aux contours infiniment petits qui enveloppent les sommets de R_0. Envisageons donc successivement les divers sommets de R_0 et décrivons autour de chacun d'eux un contour infinitésimal. Comme ce contour AMA ne devra pas sortir de la partie du plan située au-dessus de X, on ne pourra décrire de semblable contour autour des sommets de R_0 qui sont situés sur cet axe X lui-même. Les seuls sommets du polygone R_0 que nous ayons à envisager sont donc les sommets de la première catégorie.

Je suppose que les différents côtés de R_0 soient numérotés de telle sorte qu'en suivant, dans un sens convenable, le périmètre de ce polygone on rencontre successivement les côtés C_1, C_2, C_3, ..., C_q; q étant le nombre total des côtés; A_1 sera le sommet situé entre C_q et C_1; A_2 le sommet situé entre C_1 et C_2, etc. En général, A_i sera le sommet situé entre C_{i-1} et C_i. Si C_i est de la première sorte, la région limitrophe de R_0 le long de C_i s'appellera R_i et la substitution fondamentale correspondante sera

$$[z, f_i(z)].$$

Considérons l'un quelconque des sommets de la première catégorie que j'appelle A_{α_1}. Ce sommet fera partie d'un certain cycle de la première catégorie; on trouvera les autres sommets de ce cycle en appliquant la règle du paragraphe V. Supposons que cette règle donne successivement les sommets

$$A_{\alpha_1}, \quad A_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad A_{\alpha_p}$$

et précisément dans cet ordre. Supposons que la somme des angles correspondants à ces sommets soit $\frac{2\pi}{\lambda}$, λ sera un nombre entier. Posons, pour abréger,

$$F(z) = f_{\alpha_1}[f_{\alpha_2}[f_{\alpha_3} \ldots [f_{\alpha_p}(z)] \ldots],$$
$$F[F(z)] = F^2(z), \qquad F[F^2(z)] = F^3(z), \qquad \ldots,$$
$$F[F^{\lambda-1}(z)] = F^\lambda(z).$$

La relation fondamentale, à laquelle conduira, d'après la règle exposée plus haut, un contour infinitésimal décrit autour de A_{α_1}, sera

$$z = F^\lambda(z).$$

Les sommets A_{α_2}, A_{α_3}, ..., A_{α_p} qui appartiennent au même cycle que A_{α_1} conduisent à la même relation. Donc :

Le nombre des relations fondamentales qui existent entre les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien G est précisément celui des cycles de la première catégorie du polygone R_0 *correspondant.*

Or les polygones des deuxième, troisième et quatrième familles n'admettent pas de cycle de cette catégorie. Donc il n'y a aucune relation fondamentale entre les substitutions des groupes de ces familles, et les relations de la forme (6) que l'on pourrait trouver entre ces substitutions se réduisent toutes à des identités.

Voici une première conséquence que l'on peut tirer de ce fait : *Tout groupe H dérivé de n substitutions fondamentales est isomorphe à un groupe fuchsien G de la deuxième, de la troisième ou de la quatrième famille, pourvu que ce groupe soit également dérivé de n substitutions fondamentales.* En effet, la première condition de l'isomorphisme qui exige que le nombre des substitutions fondamentales soit le même est remplie, et la seconde qui exige que toute relation entre les substitutions de G subsiste entre celles de H est satisfaite d'elle-même, puisqu'il n'existe pas de pareille relation. Seulement une distinction est à faire. S'il y a des relations de la forme (6) entre les substitutions de H, G n'est pas isomorphe à H et par conséquent l'isomorphisme est mériédrique. Si, au contraire, il n'y a pas de semblable relation, l'isomorphisme est réciproque et par conséquent holoédrique. Il en résulte que *deux groupes fuchsiens de la deuxième, de la troisième ou de la quatrième famille sont holoédriquement isomorphes pourvu que le nombre des substitutions fondamentales soit le même, c'est-à-dire pourvu que les deux polygones R_0 correspondants aient un même nombre de côtés de la première sorte.*

Considérons maintenant deux polygones R_0 et R'_0 quelconques, mais dont les côtés de la première et de la deuxième sorte soient distribués de la même manière, de telle sorte qu'ils soient désignés par la même formule, si l'on emploie la notation exposée au commencement du paragraphe VII. Ces deux polygones appartiendront évidemment au même genre et à la même famille, et le nombre de cycles, formés par les sommets des deux polygones, est le même, de telle façon qu'à chaque cycle de R_0 corresponde un cycle de R'_0 et réciproquement. D'ailleurs, à un cycle fermé du premier polygone, correspondra dans le second polygone un cycle également fermé. Si, de plus, la somme des angles de chaque cycle fermé de R_0 est la même que la somme des angles du cycle correspondant de R'_0, les deux groupes fuchsiens engendrés par ces deux polygones seront holoédriquement isomorphes.

XI. Formation effective des groupes fuchsiens.

Un groupe fuchsien est complètement déterminé quand on connaît ses substitutions fondamentales, qu'il suffit de combiner de toutes les manières possibles pour obtenir toutes les substitutions du groupe. Former un groupe fuchsien, c'est donc calculer les coefficients de ses substitutions fondamentales. Ce problème ne présente aucune difficulté. Supposons, en effet, que l'on ait construit le polygone R_0 correspondant au groupe à former et que l'on ait calculé les coordonnées, et par conséquent les affixes de tous ses sommets. Les substitutions fondamentales cherchées sont celles qui changent chaque côté de la première sorte en son conjugué. Soient donc α, β et γ, δ les affixes des sommets de deux côtés conjugués de R_0. Supposons d'abord que les quantités α, β, γ, δ soient toutes quatre imaginaires, de telle façon qu'aucun de ces sommets ne soit situé sur X. On devra avoir, en appelant α', β', γ', δ' les quantités imaginaires conjuguées de α, β, γ, δ,

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha-\alpha' \;\; \beta-\beta'}{\alpha-\beta' \;\; \beta-\alpha'} = \frac{\gamma-\gamma' \;\; \delta-\delta'}{\gamma-\delta' \;\; \delta-\gamma'}. \tag{1}$$

La substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est alors parfaitement déterminée; pour l'écrire en mettant en évidence la réalité des coefficients, je poserai :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 + i\alpha_2, & \beta &= \beta_1 + i\beta_2, & \gamma &= \gamma_1 + i\gamma_2, & \delta &= \delta_1 + i\delta_2,\\
\alpha' &= \alpha_1 - i\alpha_2, & \beta' &= \beta_1 - i\beta_2, & \gamma' &= \gamma_1 - i\gamma_2, & \delta' &= \delta_1 - i\delta_2.
\end{aligned}$$

La substitution cherchée s'écrira alors

$$\left(z, \frac{Az+B}{Cz+D}\right)$$

où :

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \beta_1 & \delta_1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 & \delta_1 & 1 \\ \beta_2 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mais on peut faire encore deux hypothèses; supposons que α et γ soient réels, tandis que β et δ restent imaginaires; la condition (1) n'a plus alors de raison d'être; la substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est encore parfaitement déterminée et elle s'écrit

$$\left(z, \frac{Az+B}{Cz+D}\right);$$

les coefficients A, B, C, D ont la même expression que plus haut, mais il faut remarquer que α_2 et γ_2 sont nuls.

Supposons maintenant que les quatre quantités α, β, γ, δ soient réelles, la substitution qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ ne sera plus déterminée. Dans l'expression de ses coefficients entrera un paramètre arbitraire h. Elle s'écrira

$$\left(z, \frac{Az+B}{Cz+D}\right)$$

et les coefficients A, B, C, D auront pour expression :

$$A = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \gamma & 1 \\ \beta\delta & \delta & 1 \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & \gamma \\ \beta\delta & \beta & \delta \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 1 \\ \beta & \delta & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & 1 \\ \beta\delta & \beta & 1 \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

Les quantités réelles α, β, γ, δ pour pouvoir être les sommets d'un polygone R_0 sont assujetties à l'inégalité

$$\left[\frac{1}{\delta-\alpha} - \frac{1}{\gamma-\alpha}\right]\left[\frac{1}{\delta-\alpha} - \frac{1}{\beta-\alpha}\right] < 0.$$

Quant à h, c'est un paramètre arbitraire qui est supposé réel et assujetti à l'inégalité

$$(\gamma+h)(\delta+h)(\delta-\gamma)(\beta-\alpha) > 0$$

qui exprime que le déterminant $AD - BC$ est positif.

Ainsi, quand on connaît les affixes des sommets de R_0, on peut calculer les coefficients des substitutions fondamentales de G. Il s'agit donc de choisir ces affixes de telle façon que le polygone R_0 satisfasse aux conditions du paragraphe VI qui sont nécessaires pour qu'il donne naissance à un groupe fuchsien. C'est là un problème purement algébrique et qui ne présente aucune difficulté. La grande variété des cas possibles ne me permettra pas de les examiner tous en détail, ce qui m'entraînerait à des répétitions et à des longueurs inutiles. Je me bornerai donc à envisager quelques exemples.

PREMIER EXEMPLE.

Cherchons d'abord à former les groupes fuchsiens de la troisième famille dérivés de n substitutions fondamentales. Le polygone R_0 correspondant aura $2n$ cotés de la première sorte et $2n$ de la deuxième. Pour déterminer complètement un pareil polygone, il faut s'imposer arbitrairement $4n$ conditions. Mais nous avons vu au paragraphe IX qu'un même groupe G peut être engendré par une infinité de polygones R_0. Si l'on tient compte de cette circonstance, on reconnaîtra aisément que, pour déterminer complètement le groupe de la troisième famille dérivé de n substitutions fondamentales, il faut s'imposer arbitrairement $3n$ conditions. Or c'est là précisément le nombre total des coefficients de n substitutions réelles quelconques. Il ne s'ensuit pas qu'il suffise de prendre au hasard n substitutions réelles pour que le groupe qui en dérive soit un groupe fuchsien de la troisième famille; mais *les coefficients de ces substitutions ne seront assujettis à aucune condition d'égalité; ils devront seulement satisfaire à certaines inégalités.*

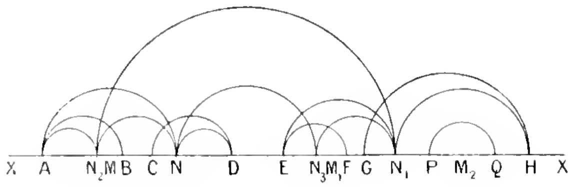
Quelles sont ces inégalités? tel est le problème qu'il nous reste à résoudre. On trouve d'abord sans peine que toutes les substitutions doivent être hyperboliques et par conséquent leurs points doubles doivent être réels et situés sur X. On peut énoncer un résultat général au sujet de la distribution de ces points doubles sur X. En effet, considérons deux côtés conjugués ab et cd de R_0 et supposons qu'ils soient de la première sorte et appartiennent à la même paire. Supposons de plus pour fixer les idées que le point ∞ fasse partie de R_0 de telle façon que ce polygone soit la région du plan située au-dessus de X et extérieure aux différents cercles qui forment ses côtés de la première sorte. Si cela n'était pas, on ferait un changement convenable de la variable. Il y aura une substitution fondamentale qui changera ab en cd et *ses deux points doubles seront situés l'un sur le segment ab de X, l'autre sur le segment cd.*

Pour pousser plus loin l'étude des inégalités qui ont lieu entre les coefficients des substitutions fondamentales d'un groupe de la troisième famille, je vais prendre un exemple particulier, à savoir l'octogone de l'exemple V du paragraphe V. La méthode que j'emploierai s'étendrait d'ailleurs au cas le plus général.

Les deux substitutions fondamentales changent AB en DC et EF en HG. Considérons d'abord la substitution S qui change AB en DC; ses deux points doubles M et N sont situés respectivement sur les segments AB et CD de l'axe X. Décrivons un cercle sur AN comme diamètre, et envisageons le triangle curviligne ABN; envisageons également le cercle décrit sur DN comme diamètre et le triangle curviligne DCN; la substitution S changera le triangle ABN en DCN; nous pouvons donc en vertu des principes du paragraphe IX remplacer l'octogone $R_0 = ABCDEFGH$ par l'heptagone $R'_0 = ANDEFGH$. Envisageons de même la substitution S_1 qui change HG en EF et ses deux points doubles M_1 et N_1 situés l'un sur le segment EF, l'autre sur le segment GH.

Par un raisonnement tout semblable à celui qui précède, on verrait que l'on peut remplacer l'heptagone R'_0 par l'hexagone $R''_0 = ANDEN_1H$. Remarquons que R''_0 est de la quatrième famille et du deuxième ordre de cette famille, tandis que R_0 était de la troisième famille. C'est là l'exception que j'avais annoncée aux principes du paragraphe IX; on peut simplifier le polygone générateur R_0 de façon à ramener un polygone de la troisième famille à un polygone du deuxième ordre de la quatrième ou même de la deuxième famille, mais jamais à un polygone du premier ordre de la quatrième ou de

Fig. 9.



la deuxième famille. Envisageons maintenant l'opération S_2 qui consiste à faire d'abord la substitution S, puis la substitution inverse de S_1. La substitution S change AN en DN, et la substitution inverse de S_1 change DN en un certain cercle QP intérieur à N_1H. La substitution S_2 change donc AN en QP et ses deux points doubles N_2 et M_2 sont situés, l'un sur le segment AN, l'autre sur le segment PQ. La substitution S change N_2 en un certain point N_3; la substitution S_1 devra changer aussi N_2 en N_3; N_3 est donc situé sur le segment M_1E. Décrivons des cercles sur N_2N, N_2N_1, N_1N_3, NN_3 comme diamètres; la substitution S change N_2N en N_3N, la substitution S_1 change N_2N_1 en N_3N_1 et cela nous permet, en vertu des principes du paragraphe IX de remplacer l'octogone R_0 par le quadrilatère $R'''_0 = N_1N_2NN_3$. Ce quadrilatère est de la deuxième famille et du deuxième ordre de cette famille [1].

Nous allons maintenant pouvoir trouver les inégalités qui ont lieu entre les coefficients de S et de S_1; on peut toujours supposer que les points doubles de S_1 sont o et ∞ de telle sorte que

$$N_1 = 0, \qquad M_1 = \infty,$$

car si cette condition n'était pas remplie, il suffirait d'un changement très simple de variable pour être ramené au cas où l'on a $N_1 = 0$, $M_1 = \infty$.

[1] *Voir* la Note à la fin du Volume. N. E. N.

Les deux substitutions s'écrivent alors :

$$S = \left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad S_1 = (z, Kz).$$

K est essentiellement positif et plus grand que 1. De plus, on peut toujours supposer que c est positif sans quoi on changerait tous les signes des quatre quantités a, b, c, d. Les points M et N sont les points doubles de S et par conséquent les racines de l'équation

$$(1) \qquad cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Les points M_2 et N_2 sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az+b}{K(cz+d)}\right)$$

ou les racines de l'équation

$$(2) \qquad cz^2 + \left(d - \frac{a}{K}\right)z - \frac{b}{K} = 0.$$

Le point N_3 et un autre point M_3 sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az+bK}{cz+dK}\right)$$

et les racines de l'équation

$$(3) \qquad cz^2 + (dK - a)z - bK = 0.$$

L'inspection de la figure montre que les quantités M, N, M_2, N_2, M_3, N_3 sont toutes réelles et de même signe; positives par exemple; d'où les relations

$$\begin{gathered}
b < 0, \qquad (d-a)^2 + 4bc > 0, \qquad a > d, \\
\frac{b}{K} < 0, \qquad (dK - a)^2 + 4Kbc > 0, \qquad a > dK, \\
bK < 0, \qquad (dK - a)^2 + 4Kbc > 0, \qquad a > dK
\end{gathered}$$

qui se réduisent à

$$\begin{gathered}
b < 0, \qquad a > dK, \qquad (a+d)^2 > 4, \qquad a > d, \\
\left(\frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K}\right)^2 > 4
\end{gathered}$$

en tenant compte de

$$ad - bc = 1.$$

Exprimons maintenant que M_2 et N_2 sont plus petits et que M_3 et N_3 sont plus grands que M et N. On trouve ainsi les conditions

$$\begin{gathered}
b < 0, \qquad a^2 + bc > 1 > d^2 + bc, \\
b < 0, \qquad \frac{a^2}{K} + bc < 1 < d^2K + bc, \qquad a - dK > a - d > \frac{a}{K} - d.
\end{gathered}$$

Toutes ces conditions se réduisent aux suivantes :

$$a > 0, \qquad b < 0, \qquad d < 0, \qquad a + d > 2,$$
$$\frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K} < -2.$$

Cette méthode s'applique à tous les groupes fuchsiens de la troisième famille. On peut toujours par ce procédé ramener le polygone R_0 à un polygone du deuxième ordre de la deuxième famille. Les sommets de ce nouveau polygone seront connus, car ce seront les points doubles des substitutions fondamentales ou de quelques-unes de leurs combinaisons. Pour trouver les inégalités cherchées, il suffit d'exprimer que ces sommets sont disposés d'une certaine manière.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Nous prendrons pour deuxième exemple les groupes de la première famille et du genre 0 et, pour particulariser encore, nous choisirons l'hexagone ABCDEF de l'exemple II du paragraphe VII.

Nous avons ici trois substitutions fondamentales :

S_1 qui change AB en AF,
S_2 qui change BC en FE,
S_3 qui change CD en ED.

Nous envisagerons en outre :

S_4 combinaison de S_2 et de S_1 pris en sens contraire,
S_5 combinaison de S_3 et de S_2 pris en sens contraire.

On peut considérer le groupe comme dérivé de S_1, S_4 et S_5.

Soient a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D; a', b', c' d' leurs quantités imaginaires conjuguées; α, β, γ, δ les angles A, B + F, C + E, D qui sont des parties aliquotes de 2π. Les substitutions S_1, S_4, S_5 et S_3^{-1} s'écriront :

$$\left(\frac{z-a}{z-a'},\; e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-a'}\right), \qquad \left(\frac{z-b}{z-b'},\; e^{i\beta}\frac{z-b}{z-b'}\right),$$
$$\left(\frac{z-c}{z-c'},\; e^{i\gamma}\frac{z-c}{z-c'}\right), \qquad \left(\frac{z-d}{z-d'},\; e^{i\delta}\frac{z-d}{z-d'}\right).$$

Exprimons que la combinaison des quatre substitutions S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1 faites successivement équivaut à la substitution identique (z, z); nous arriverons à trois relations entre a, b, c, d, α, β, γ, δ.

Supposons ces relations satisfaites. Suffiront-elles pour que le groupe dérivé des substitutions S_1, S_5, S_4 soit discontinu? Non, il faudra encore que les points A, B, C, D puissent former quatre sommets d'un hexagone ABCDEF où les angles

$$A = \alpha, \qquad B + F = \beta, \qquad C + E = \gamma, \qquad D = \delta.$$

Considérons les angles curvilignes du quadrilatère ABCD obtenu en joignant les quatre points A, B, C, D par des arcs de cercle ayant leurs centres sur X. Il faut que les quatre angles A, B, C, D de ce quadrilatère soient respectivement plus petits que α, β, γ, δ; d'où les inégalités

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & o < \arg \frac{d-a}{d-a'} \frac{b-a'}{b-a} < \alpha, \\ & o < \arg \frac{a-b}{a-b'} \frac{c-b'}{c-b} < \beta, \\ & o < \arg \frac{b-c}{b-c'} \frac{d-c'}{d-c} < \gamma, \\ & o < \arg \frac{c-d}{c-d'} \frac{a-d'}{a-d} < \delta. \end{aligned} \right.$$

Comment reconnaîtrons-nous maintenant si trois substitutions données S_1, S_4, S_5 peuvent être considérées comme les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien analogue à celui qui nous occupe. On formera la substitution $S_3{}^1$, combinaison de la substitution inverse de S_1, de l'inverse de S_4, et de l'inverse de S_5 faites successivement. On calculera les points doubles a, a'; b, b'; c, c'; d, d' de ces quatre substitutions et leurs multiplicateurs $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$. Deux conditions devront être remplies : 1° α, β, γ, δ devront être parties aliquotes de 2π; 2° les quantités a, a', b, b', c, c', d, d', α, β, γ, δ devront satisfaire aux inégalités (2).

TROISIÈME EXEMPLE.

Nous prendrons pour troisième exemple les groupes de la deuxième famille, du premier ordre et du genre o; et parmi ces groupes, nous choisirons encore celui qui est engendré par l'hexagone $R_0 = $ ABCDEF considéré dans l'exemple II du paragraphe VII. Seulement ici cet hexagone devant être de la deuxième famille, tous ses sommets seront sur X. Nous envisagerons, comme dans l'exemple précédent, les substitutions

S_1 qui change AB en AF,
S_2 qui change BC en FE,
S_3 qui change DC en DE,
S_4 combinaison de S_2 et de l'inverse de S_1,
S_5 combinaison de S_3 et de l'inverse de S_2.

Soient a, b, c, d, e, f les affixes des sommets de R_0; ces quantités seront essentiellement réelles. Les substitutions S_1, S_4, S_5 et S_3 devront être paraboliques, puisque le groupe est supposé du premier ordre, et elles s'écriront :

$$S_1 = \left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a}\right),$$
$$S_4 = \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{h-b} - \frac{1}{c-b}\right),$$
$$S_5 = \left(\frac{1}{z-c}, \frac{1}{z-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{k-c}\right),$$
$$S_3 = \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}\right),$$

où h et k sont deux quantités définies par les équations

$$\frac{1}{c-a} = \frac{1}{h-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a},$$
$$\frac{1}{f-d} = \frac{1}{k-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}.$$

Quelles sont maintenant les conditions pour que les trois substitutions S_1, S_4, S_5 donnent naissance à un groupe fuchsien? Il faut que les six quantités a, b, c, d, e, f se succèdent précisément dans cet ordre circulaire, ou bien dans l'ordre inverse de sorte qu'on doit avoir

$$(3) \qquad \frac{1}{b-a} < \frac{1}{c-a} < \frac{1}{d-a} < \frac{1}{e-a} < \frac{1}{f-a}$$

ou bien

$$\frac{1}{b-a} > \frac{1}{c-a} > \frac{1}{d-a} > \frac{1}{e-a} > \frac{1}{f-a}.$$

Exprimons maintenant que la combinaison des substitutions S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1 équivaut à la substitution identique, il viendra

$$(4) \qquad (b-a)(d-c)(f-e) = (c-b)(e-d)(f-a).$$

REMARQUE.

Dans les deux exemples qui précèdent, il est peut-être avantageux d'envisager, non l'hexagone ABCDEF de l'exemple II du paragraphe VII, qui serait noté (16, 25, 34), mais l'hexagone noté (12, 34, 56) qui lui est équivalent d'après ce qu'on a vu au paragraphe IX.

Soit ABCDEF cet hexagone, les côtés AB et BC, CD et DE, EF et FA seront conjugués. Envisageons les substitutions

S_1 qui change BA en BC,
S_2 qui change DC en DE,
S_3 qui change FE en FA,
S_4 combinaison de S_1, S_2 et S_3.

Ces quatre substitutions seront elliptiques et leurs multiplicateurs seront $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$; α, β, γ, δ étant des parties aliquotes de 2π.

B sera l'un des points doubles de S_1, D l'un des points doubles de S_2, F l'un des points doubles de S_3, A l'un des points doubles de S_4; quant aux autres points doubles de ces substitutions, ce seront respectivement les quantités imaginaires conjuguées de B, D, F, A; C sera le transformé de A par S_1, E celui de C par S_2. Pour que le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 soit discontinu, il suffit que l'hexagone curviligne normal ABCDEF soit convexe; d'où les conditions

$$(5)\quad \begin{cases} 0 < \arg \dfrac{d-b}{d-b'}\,\dfrac{f-b'}{f-b} < \alpha, \\ 0 < \arg \dfrac{f-d}{f-d'}\,\dfrac{b-d'}{b-d} < \beta, \\ 0 < \arg \dfrac{b-f}{b-f'}\,\dfrac{d-f'}{d-f} < \gamma. \end{cases}$$

Pour reconnaître si le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 est discontinu, on calculera les points doubles $b, b', d, d', f, f', a, a'$, et les multiplicateurs $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$ de S_1, S_2, S_3 et de leur combinaison S_4 et l'on recherchera si ces quantités satisfont aux inégalités (5) et si α, β, γ, δ sont des parties aliquotes de 2π.

Supposons maintenant que l'hexagone $abcdef$ ne soit plus de la première, mais de la deuxième famille et du premier ordre de cette famille, de telle façon que les quantités a, b, c, d, e, f soient réelles. Ces quantités devront satisfaire aux inégalités (3), pour que l'hexagone $abcdef$ soit convexe. Les substitutions S_1, S_2, S_3 s'écriront :

$$S_1 = \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{c-b} - \frac{1}{a-b}\right),$$
$$S_2 = \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}\right),$$
$$S_3 = \left(\frac{1}{z-f}, \frac{1}{z-f} + \frac{1}{a-f} - \frac{1}{e-f}\right).$$

Si nous exprimons que la combinaison S_4 de S_1, S_2, S_3 est une substitution parabolique, nous trouverons que les quantités a, b, c, d, e, f satisfont à l'égalité (4). Cette égalité jointe aux inégalités (3) est la condition pour que le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 soit discontinu.

QUATRIÈME EXEMPLE.

Comme quatrième exemple nous prendrons un quadrilatère $abcd$, dont les côtés opposés ab, dc et bc, ad sont conjugués; les quatre sommets forment un seul cycle et la somme des angles Σ est une partie aliquote de 2π. Ce quadrilatère engendre un groupe de la première famille et du genre 1. Joignons deux sommets opposés bd par un arc de cercle ayant son centre sur X. Nous obtiendrons ainsi un triangle abd sur les côtés duquel nous marquerons trois points α, β, γ, le premier sur bd, le second sur da, le troisième sur ab et de telle façon que

$$(b, \alpha) = (\alpha, d), \qquad (d, \beta) = (\beta, a), \qquad (a, \gamma) = (\gamma, b).$$

Il existera alors une substitution S_1 qui change αb en αd, une autre S_2 qui change βd en βa et une autre S_3 qui change γa en γb; toutes trois auront pour multiplicateur -1. Le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 sera discontinu et aura pour polygone générateur l'hexagone $b\alpha d\beta a\gamma$ dont les côtés $b\alpha$, αd; $d\beta$, βa; $a\gamma$, γb sont conjugués et situés dans le prolongement l'un de l'autre. C'est donc un cas particulier des groupes engendrés par un hexagone $abcdef$ et étudiés dans la remarque relative à l'exemple précédent.

Les substitutions fondamentales du groupe engendré par le quadrilatère $abcd$ sont S_5 qui change ab en dc et S_6 qui change bc en ad, et il est aisé de voir que S_5 est la combinaison de S_3 et de S_1; S_6 est la combinaison de S_2 et de S_1; d'où la règle suivante pour former tous les groupes fuchsiens dérivés d'un quadrilatère tel que $abcd$:

On prendra trois substitutions S_1, S_2, S_3 de multiplicateur -1 et satisfaisant aux conditions énoncées dans la remarque relative à l'exemple précédent; on combinera S_3 et S_1, ainsi que S_2 et S_1 et l'on aura les substitutions fondamentales du groupe cherché.

XII. — Généralisation.

Jusqu'ici nous avons supposé que toutes les substitutions étaient réelles; mais une première généralisation peut être faite immédiatement.

Soit

$$(1) \qquad \left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

une substitution réelle quelconque; et faisons-lui correspondre la substitution

$$(2) \qquad \left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{a\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d}\right),$$

où α, β, γ, δ sont des constantes imaginaires quelconques. Supposons que nous donnions à α, β, γ, δ des valeurs fixes et que l'on fasse parcourir aux quatre quantités a, b, c, d toutes les valeurs réelles telles que $ad - bc = 1$. Il est clair que les substitutions (2) formeront un groupe; et ce groupe jouira des propriétés suivantes :

1° Ses substitutions n'altéreront pas le cercle dont l'équation est

$$\text{partie imaginaire de } \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = 0$$

et que j'appellerai *cercle fondamental;*

2° Le transformé d'un point z par une des substitutions (2) sera intérieur ou extérieur au cercle fondamental selon que le point z sera lui-même intérieur ou extérieur à ce cercle.

Nous supposerons par exemple que, si z est intérieur au cercle fondamental, le point $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ sera au-dessus de X.

Supposons maintenant que l'on égale successivement les coefficients de (1) à ceux des diverses substitutions d'un groupe fuchsien G. On obtiendra ainsi une infinité de substitutions (2) qui formeront un groupe G', et ce groupe sera évidemment discontinu. A ce groupe G correspondra une décomposition de la partie du plan située au-dessus de X en une infinité de polygones normaux R_0, R_1, ..., R_i, ..., tous congruents entre eux. Supposons que $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ parcoure l'un de ces polygones R_i dont les côtés sont, on l'a vu, ou bien des segments de X ou bien des arcs de cercle ayant leurs centres sur X; le point z parcourra de son côté un certain polygone S_i dont les côtés seront, ou bien des arcs du cercle fondamental, ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Ainsi, de même qu'au groupe G correspondait une division de la partie du plan située au-dessus de X en une infinité de polygones normaux congruents, de même au groupe G' correspondra une division de l'intérieur du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux congruents, à la condition d'adopter les dénominations suivantes :

Un polygone normal est un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs du cercle fondamental ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Deux figures sont congruentes si l'on passe de l'une à l'autre par une substitution telle que (2), c'est-à-dire par une substitution qui conserve le cercle fondamental. Tout ce qu'on a dit de la distribution des côtés en paires et des sommets en cycles, et de la classification des polygones normaux en familles, en ordres et en genres, reste vrai comme dans le cas particulier auquel nous nous étions restreints jusqu'ici.

Quelles seront maintenant les conditions pour qu'un polygone normal donne naissance à un groupe discontinu G'? Ce seront les mêmes conditions que nous avons trouvées dans le cas particulier des groupes de substitutions réelles, mais l'énoncé de ces conditions doit être convenablement modifié :

1° La somme des angles des divers sommets correspondant à un même cycle doit être une partie aliquote de 2π;

2° Si ab et cd sont deux côtés conjugués, on devra avoir, comme dans le cas des substitutions réelles,

$$\frac{a-a'}{a-b'}\,\frac{b-b'}{b-a'}=\frac{c-c'}{c-d'}\,\frac{d-d'}{d-c'};$$

mais a', b', c', d' ne désigneront plus les quantités imaginaires conjuguées de a, b, c, d, mais les symétriques de a, b, c, d par rapport au cercle fondamental (*voir* la définition du paragraphe VII). En d'autres termes, si α est le centre du cercle fondamental et ρ son rayon,

$$a'=\alpha+\text{imaginaire conjuguée de }\frac{\rho^2}{a-\alpha}$$

et de même pour b', c', d'.

Nous appellerons *groupes fuchsiens* les groupes discontinus tels que G'; car ils ne diffèrent pas essentiellement des groupes de substitutions réelles et nous réserverons le nom de *groupes kleinéens* à ceux des groupes dont les substitutions ne conservent pas un même cercle fondamental. Nous ferons de ces groupes l'objet d'un Mémoire spécial.

Les particularités qui peuvent se présenter sont les mêmes que pour les groupes correspondants de substitutions réelles.

Si le polygone générateur R_0 est du deuxième ordre de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille, l'ensemble des polygones R_i ne recouvrira pas tout l'intérieur du cercle fondamental, mais l'intérieur d'un certain domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement ce cercle (¹).

Si le polygone R_0 est de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille, il a des côtés de la deuxième sorte. Nous avons vu au

(¹) *Voir* la note de la page 149. N. E. N.

commencement du paragraphe VIII que dans ce cas il y a avantage à adjoindre à chaque polygone R_i son symétrique R'_i par rapport à X; de telle façon que le plan tout entier se trouve divisé en une infinité de régions $R_i + R'_i$ limitées par une ou plusieurs périphéries séparées. Dans le cas qui nous occupe maintenant, nous adjoindrons à chaque polygone R_i son symétrique R'_i par rapport au cercle fondamental, de telle façon que le plan tout entier va se trouver encore divisé en une infinité de régions $R_i + R'_i$.

Laissons de côté pour le moment les régions que nous venons d'appeler R'_i et ne nous occupons que des polygones R_i eux-mêmes. La somme des surfaces de ces polygones, tous intérieurs au cercle fondamental, sera *finie*, ce qui est très important au point de vue des applications ultérieures. Il y aurait exception lorsque le cercle fondamental se réduit à une droite, ce qui arrive en particulier dans le cas des groupes de substitutions réelles; mais comme on l'a vu au commencement de ce paragraphe, un changement linéaire de variable suffirait pour ramener au cas général.

Dans mes travaux ultérieurs, je supposerai pour fixer les idees que le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Si l'on n'était pas placé dans ce cas, un changement très simple de variable y ramènerait aisément.

XIII. — Historique.

Le premier exemple de groupe discontinu formé de substitutions linéaires est celui que l'on rencontre en étudiant le module k d'une fonction elliptique (notation habituelle) ou le module J (notation de M. Klein) considérés comme fonctions du rapport des périodes. M. Hermite a fait une étude approfondie de cette sorte de transcendante et, en montrant qu'elle était uniforme, il faisait voir du même coup que le groupe correspondant était discontinu.

Les fonctions k et J ont été dans la suite, ainsi que le groupe discontinu correspondant, étudiées par MM. Dedekind, Fuchs et Klein et plus récemment par M. Hurwitz. Nous citerons en particulier les importants travaux de M. Klein que l'on trouve dans les *Mathematische Annalen* et un remarquable Mémoire de M. Fuchs inséré au Tome 83 du *Journal de Crelle*.

Il est évident qu'un groupe quelconque G en contient une infinité d'autres qui seront tous discontinus, si le groupe G l'est lui-même; de sorte que la connaissance d'un seul groupe discontinu permet d'en former très aisément une infinité d'autres. C'est cette remarque qui est le point de départ des belles recherches de M. Klein sur la transformation des fonctions elliptiques et sur les fonctions modulaires en général.

Outre ces groupes contenus dans le groupe modulaire dont la discontinuité était évidente, il y a encore un autre groupe dont la discontinuité avait été remarquée par M. Schwarz dans un Mémoire inséré au Tome 75 du *Journal de Crelle*: c'est l'exemple I du paragraphe VII. C'était la première fois qu'on arrivait à un pareil résultat sans prendre pour point de départ la théorie des fonctions elliptiques. Enfin M. Fuchs reprit une question analogue dans des travaux insérés au Tome 89 du *Journal de Crelle* et dans les Actes de la Société de Göttingen. Bien que les groupes étudiés dans ce dernier travail se ramenassent tous à des groupes déjà connus, c'est la lecture de ce remarquable Mémoire qui m'a guidé dans mes premières recherches et qui m'a permis de trouver la loi de génération des groupes fuchsiens et d'en donner une démonstration rigoureuse.

Je l'ai donnée d'abord dans un Mémoire que j'eus l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie des Sciences dans le concours pour le Grand Prix des Sciences mathématiques du 1^{er} juin 1880 et j'ai poursuivi l'étude des groupes dans une série de travaux insérés aux *Comptes rendus* de l'année 1881.

Le mode de représentation que j'ai employé, c'est-à-dire la division d'une portion du plan en une infinité de polygones curvilignes, peut être très utile pour l'étude des propriétés générales d'un groupe; c'est ce que j'ai cherché à faire voir. Aux géomètres qui désireraient poursuivre dans cet ordre d'idées l'étude d'un groupe fuchsien ou de tout autre groupe, je recommanderai la lecture de l'*Habilitationsschrift* de M. Walther Dyck de l'Université de Leipzig, qui emploie un mode de représentation analogue et en fait ressortir les nombreux avantages.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES [1]

Acta mathematica, t. I, p. 193-294 (1882).

I. — Séries thêtafuchsiennes.

Dans un Mémoire antérieur [2], j'ai montré comment il est possible de former des groupes discontinus avec des substitutions de la forme

$$(1)\qquad \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

en choisissant les coefficients α_i, β_i, γ_i, δ_i de telle façon que les diverses substitutions du groupe n'altèrent pas un certain cercle appelé *cercle fondamental*. Je supposerai, dans tout ce qui va suivre, que ce cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, de telle sorte que son équation soit

$$\operatorname{mod} z = 1.$$

Je considère un de ces groupes discontinus, dits *groupes fuchsiens*, que j'appelle G. A ce groupe correspondra une décomposition du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux R, tous congruents entre eux.

Je me propose de démontrer qu'il existe toujours un système de fonctions uniformes de z qui demeurent inaltérées par les diverses substitutions du groupe G et que j'appellerai *fonctions fuchsiennes*.

A cet effet, j'envisage les diverses substitutions de G comprises dans la for-

(1) Terminé le 23 octobre 1882, imprimé le 29 novembre 1882.

(2) *Théorie des groupes fuchsiens*, ce Tome, p. 108-168.

mule (1) et je pose, pour abréger,

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z)$$

comme je l'ai fait au paragraphe III du Mémoire cité. Je forme ensuite la série

$$(2) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_i \bmod \left[\frac{d f_i(z)}{dz}\right]^m,$$

où m est un entier positif plus grand que 1.

Je vais démontrer que cette série est convergente en faisant successivement diverses hypothèses :

1° Supposons d'abord que z soit intérieur au cercle fondamental : il sera alors intérieur à l'un des polygones R, par exemple au polygone R_h qui correspond à la substitution de G qui a pour indice h et qui s'écrit

$$[z, f_h(z)].$$

Soit

$$f_k(z) = f_i[f_h(z)].$$

La substitution

$$[z, f_k(z)]$$

fera partie du groupe G et correspondra à un certain polygone R_k. Puisque z est supposé intérieur à R_h, $f_i(z)$ sera intérieur à R_k.

Supposons qu'on décrive autour de z un contour très petit C_0, enveloppant le point z et étant situé tout entier à l'intérieur de R_h; le transformé de C_0 par la substitution $[z, f_i(z)]$ sera un certain contour très petit C_i, enveloppant le point $f_i(z)$ et situé tout entier à l'intérieur de R_k.

Afin d'établir la convergence de la série (2), nous allons démontrer successivement un certain nombre de lemmes.

Lemme I. — *La somme des surfaces de tous les contours C_i est égale à une quantité finie C.*

En effet, ces différents contours C_i en nombre infini sont tous intérieurs au cercle fondamental; de plus, ils n'ont aucune partie commune, puisque chacun d'eux est tout entier intérieur à l'un des polygones R. La somme de leurs surfaces est donc plus petite que la surface du cercle fondamental. Elle est donc finie. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Le rapport de la plus grande à la plus petite valeur que* *puisse prendre le module de* $\frac{df_i}{dz}$ *quand* z *reste intérieur à* C_0 *est plus petit qu'une certaine quantité* K *indépendante de* i.

En effet, on a

$$\frac{df_i}{dz} = \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}.$$

Le module de $\frac{df_i}{dz}$ est donc égal à $\frac{1}{\operatorname{mod}\gamma_i^2}$ divisé par le carré de la distance du point z au point $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$. Les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ sont les divers transformés du point ∞; ils sont donc tous extérieurs au cercle fondamental comme le point ∞ lui-même, et ils ne peuvent être infiniment voisins les uns des autres que dans le voisinage de ce cercle. Soient M_i et m_i la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre ce module quand z reste intérieur à C_0; soient a et b la plus grande et la plus petite distance du point $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ au contour C_0; nous aurons évidemment

$$\frac{M_i}{m_i} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Or tous les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ sont extérieurs au cercle fondamental. Soient donc A et B la plus grande et la plus petite distance de l'origine, centre du cercle fondamental, au contour C_0. Ces deux distances seront plus petites que 1, puisque C_0 est tout entier intérieur au cercle fondamental. On a alors

$$a < 1 + A \ (^1), \qquad b > 1 - B,$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{1+A}{1-B}\right)^2.$$

D'ailleurs $\left(\frac{1+A}{1-B}\right)^2 = K$ est indépendant de i. C. Q. F. D.

---

(1) Cette inégalité n'est pas satisfaite. Mais si l'on suppose, ce qui n'a pas d'inconvénient, que C_0 soit un cercle, on trouve $b > 1 - A$ et

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b} = 1 + \frac{A-B}{b} < 1 + \frac{A-B}{1-A} = \frac{1-B}{1-A},$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{1-B}{1-A}\right)^2 = K.$$

Si l'on veut que C_0 soit un contour très petit quelconque, on peut raisonner comme il suit. Les divers transformés du point ∞ sont à distance finie de l'origine. Supposons qu'ils soient tous intérieurs à un cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon R. On a alors

$$a < R + A, \qquad b > 1 - A,$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{R+A}{1-A}\right)^2 = K,$$

K étant indépendant de i. N. E. N.

Lemme III. — *On a, quel que soit i,*

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}.$$

En effet, soit $z = x + iy$; la surface du contour C_0 s'écrit alors

$$C_0 = \int\int dx\,dy,$$

et la surface du contour C_i

$$C_i = \int\int \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^2 dx\,dy,$$

les deux intégrales doubles étant prises à l'intérieur du contour C_0. On a donc

$$C_i > \int\int m_i^2\,dx\,dy = m_i^2 C_0,$$

ou bien

$$C_i > \frac{M_i^2}{K^2} C_0,$$

ou enfin

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Rien n'est plus aisé maintenant que d'établir la convergence de la série (2). Supposons, en effet, d'abord $m = 2$; nous aurons à envisager la série

$$(3) \qquad \sum \operatorname{mod} \left(\frac{df_i}{dz}\right)^2 = \sum \operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-4}.$$

Or nous aurons

$$\operatorname{mod} \left(\frac{df_i}{dz}\right)^2 < M_i^2 < \frac{K^2}{C_0} C_i.$$

Les termes de la série (3) sont donc plus petits respectivement que $\frac{K^2}{C_0}$ multiplié par le terme correspondant de la série $\sum C_i$, dont la somme est un nombre fini C, d'après le lemme I.

La série (3) aura donc aussi une somme finie S. On a par conséquent *a fortiori*, quel que soit i,

$$\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz} < \sqrt{S}.$$

On aura donc, pourvu que $m > 2$,

$$\left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^m < \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^2 S^{\frac{m-2}{2}}.$$

C'est-à-dire que chaque terme de la série $\sum \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^m$ est plus petit que la constante $S^{\frac{m-2}{2}}$ multipliée par le terme correspondant de la série $\sum \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^2$ qui est convergente.

La convergence de la série (2) est donc démontrée et il s'agit ici, non d'une semi-convergence, mais d'une convergence absolue, puisque tous les termes de la série sont positifs.

2° Supposons maintenant que le point z soit extérieur au cercle fondamental.

Si le point z est l'un des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, l'un des termes de la série est infini et la convergence est impossible. Supposons donc que le point z ne se confonde avec aucun des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$; je dis que la série (2) sera encore convergente.

Considérons, en effet, un autre point z_1, intérieur au cercle fondamental. La série

$$(2^a) \qquad \sum \operatorname{mod}\left[\frac{df_i(z_1)}{dz_1}\right]^m = \sum \operatorname{mod}(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m}$$

est convergente d'après ce qu'on vient de voir. Je dis qu'il en est de même de la série

$$(2) \qquad \sum \operatorname{mod}\left(\frac{df_i}{dz}\right)^m = \sum \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

En effet, nous pouvons trouver une limite supérieure R de $\operatorname{mod}\left(z_1 + \frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$ et une limite inférieure r de $\operatorname{mod}\left(z + \frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$; car les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ ont un module fini et limité, et ils ne sont pas infiniment rapprochés du point z.

On a donc

$$\frac{\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}}{\operatorname{mod}(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m}} < \frac{\mathrm{R}^{2m}}{r^{2m}}.$$

Chaque terme de la série (2) est donc plus petit que $\left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^{2m}$ multiplié par le terme correspondant de la série (2^a) qui est convergente.

La série (2) est donc aussi convergente.

3° Supposons maintenant que le point z soit sur la circonférence du cercle fondamental. La démonstration précédente sera encore applicable, pourvu que le point z ne soit pas infiniment rapproché d'une infinité de points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$. C'est ce qui arrivera si le point z appartient à l'un des côtés de la deuxième sorte de l'un des polygones R. La série (2) est alors convergente. Dans le cas contraire, les termes de la série (2) sont susceptibles de croître indéfiniment, de sorte que la convergence n'a pas lieu.

Les points de la circonférence du cercle fondamental se divisent en deux classes : les uns appartiennent à l'un des côtés de la deuxième sorte de l'un des polygones R; les autres, qui ne satisfont pas à cette condition, s'appelle-vont les *points singuliers essentiels du groupe* G, de sorte que la condition de convergence de la série (2) pourra s'énoncer ainsi : *Le point z devra ne se confondre ni avec aucun des points* $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, *ni avec aucun des points singuliers essentiels du groupe* G.

La série (2) définit une fonction de z, mais cette fonction n'est pas monogène, comme on le voit aisément d'après la forme même de la série. La somme de la série (2) dépend également du groupe G, et si l'on suppose que les coefficients des substitutions fondamentales de ce groupe sont des fonctions d'un certain paramètre t, la somme de la série (2) sera aussi une fonction de t.

Une petite digression est nécessaire pour me permettre d'exprimer plus nettement ma pensée. Reportons-nous au paragraphe XI du Mémoire sur les groupes fuchsiens, paragraphe intitulé : « Formation effective des groupes fuchsiens », et prenons, pour fixer les idées, l'exemple I de ce paragraphe. Dans cet exemple, il s'agissait de former les groupes fuchsiens de la troisième famille, engendrés par un polygone normal ayant $2n$ côtés de la première sorte et $2n$ côtés de la deuxième sorte. Nous avons vu que les coefficients des n substitutions fondamentales de ce groupe ne sont assujettis qu'à des inégalités. Il est donc possible de les exprimer en fonctions rationnelles de $3n$ paramètres arbitraires

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{3n}$$

assujettis seulement à être réels et à satisfaire à certaines inégalités. Les coefficients de toutes les substitutions du groupe sont alors, comme ceux des substitutions fondamentales, des fonctions rationnelles des paramètres u. De plus, il est évident que tous les groupes différents qu'on obtient en attribuant aux u différents systèmes de valeurs sont tous isomorphes entre eux.

Ce qui précède peut être étendu au cas le plus général et, pour énoncer plus facilement les résultats qui vont suivre, je vais introduire une définition nouvelle qui nous sera utile dans la suite. Considérons deux polygones normaux R_0 et R'_0 : je suppose qu'ils soient désignés par la même notation dans le système de notation du paragraphe VII du Mémoire cité. Les cycles de chaque catégorie seront en même nombre dans R_0 et R'_0 et ils se correspondront un à un. Je suppose de plus que la somme des angles de R_0 qui appartiennent à un même cycle de la première catégorie est la même que la somme des angles du cycle correspondant de R'_0. Je dirai alors que les deux polygones, ainsi que les deux groupes qu'ils engendrent, font partie de la même *classe*. Il est clair que, dans ce cas, les deux groupes sont isomorphes entre eux.

Considérons donc une infinité de groupes appartenant à la même classe C et dérivés de n substitutions fondamentales. Prenons n substitutions quelconques et cherchons si elles peuvent être prises pour les substitutions fondamentales d'un groupe discontinu appartenant à la classe C. Nous trouverons, en général, que leurs coefficients doivent satisfaire à certaines égalités et à certaines inégalités. Ces coefficients pourront alors s'exprimer rationnellement en fonctions de p paramètres arbitraires

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

assujettis seulement à rester réels et à satisfaire à certaines inégalités. La seule différence avec l'exemple I du paragraphe XI, c'est qu'on a en général

$$p < 3n,$$

au lieu de $p = 3n$.

Deux groupes qui sont de la même classe sont, en général, de la même famille. Il y a cependant des exceptions. Ainsi, reprenons l'exemple I du paragraphe XI que j'ai cité plus haut. Les groupes envisagés sont en général de la troisième famille; mais, dans certains cas limites, ils peuvent se réduire à des groupes de la deuxième ou de la quatrième famille. En général, un groupe de la deuxième ou de la quatrième famille peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la troisième famille qui ne se réduisent à la deuxième et à la quatrième famille que pour certaines valeurs particulières des paramètres u. De même, un groupe de la sixième ou de la septième famille peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la cinquième famille, qui ne se réduisent à la sixième ou à la septième famille que pour certaines valeurs particulières des paramètres u. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

Ainsi, il existe des classes de groupes fuchsiens qui sont tous isomorphes entre eux; les coefficients de leurs substitutions sont des fonctions rationnelles de certains paramètres réels u, assujettis à certaines inégalités. Si l'on forme la série (2) à l'aide des différents groupes appartenant à une même classe, la somme de cette série sera évidemment une fonction des u; je dis que ce sera une fonction *continue* de ces paramètres.

Il est clair que chaque terme de la série, étant rationnel par rapport aux u, sera une fonction continue de ces paramètres; mais cela ne suffit pas pour qu'il en soit de même de la somme de cette série. Si nous considérons, en effet, une série

$$S(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions continues de x et qui est convergente, la somme $S(x)$ de cette série peut être une fonction discontinue de x. Mais faisons une hypothèse de plus. Supposons que, quand on a

$$(3) \qquad x_1 \geq x \geq x_0,$$

on ait

$$\text{mod}\, F_n(x) < C_n,$$

et que la série

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots$$

soit convergente: on sait que $S(x)$ restera fonction continue de x tant que cette variable satisfera aux inégalités (3). Ce résultat est d'ailleurs facile à étendre au cas de plusieurs variables. Ainsi, pour démontrer que la série (2) est une fonction continue des u, il suffit de faire voir qu'on peut trouver une infinité de nombres positifs A_i (indépendants des u), tels que la série $\sum A_i$ soit convergente et que l'inégalité

$$\left(\text{mod}\,\frac{df_i}{dz}\right)^m < A_i$$

soit satisfaite quels que soient les u, pourvu que ces paramètres restent compris entre certaines limites qui peuvent d'ailleurs être aussi voisines qu'on veut du système de valeurs pour lequel on veut démontrer la continuité de la somme de la série (2).

Pour démontrer cette continuité, je vais faire usage de certaines considérations qui me fourniront en même temps une démonstration nouvelle de la convergence de cette série, ce qui ne sera pas inutile, vu l'importance de ce résultat. Je vais rappeler quelques-unes des définitions du paragraphe II du Mémoire sur les groupes fuchsiens. Dans ce paragraphe, j'avais appelé *figures congruentes* deux figures qui sont les transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire à coefficients réels. Posant ensuite

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

j'avais appelé L d'un arc l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod}\, dz}{y}$$

prise le long de cet arc et S d'une aire plane l'intégrale

$$\int\int \frac{dx\,dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire.

La L d'un arc et la S d'une aire sont des invariants pour ces figures, c'est-à-dire que deux arcs congruents ont même L et que deux aires congruentes ont même S.

Plus tard, au paragraphe XII du Mémoire cité, j'ai envisagé des groupes de substitutions qui n'étaient plus assujetties à être réelles, mais à conserver un certain *cercle fondamental*. Par une extension toute naturelle, deux figures seront dites *congruentes* lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire conservant le cercle fondamental. Il y aura pour les arcs et les aires deux invariants analogues à ceux que nous avons rencontrés dans le cas des substitutions réelles et que nous appellerons, par extension, L et S. Par exemple, dans le cas qui nous occupe, le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Posons

$$z = \rho e^{i\omega}.$$

J'appellerai L d'un arc l'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{1-\rho^2}$$

prise le long de cet arc et S d'une aire l'intégrale

$$\int\int \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{(1-\rho^2)^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire. On vérifie aisément que deux arcs congruents ont même L, pendant que deux aires congruentes ont même S.

Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ. Sa S sera

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho} \frac{\rho\, d\rho}{(1-\rho^2)^2} = \frac{\pi\rho^2}{1-\rho^2}.$$

La L de son rayon sera

$$R = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{1-\rho^2} = \frac{1}{2}\, \mathrm{L}\, \frac{1+\rho}{1-\rho};$$

nous appellerons cette quantité le R du cercle.

On a, en fonction de R,

$$\rho = \frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1},$$

$$S = \frac{\pi}{4}(e^{2R}+e^{-2R}-2).$$

Passons maintenant à la démonstration de la convergence de la série (2) et supposons, pour fixer les idées, que le point z est intérieur au cercle fondamental; la démonstration s'étendrait sans peine au cas général.

Nous décrirons autour de z un contour C_0 que nous pourrons prendre assez petit pour qu'il soit tout entier à l'intérieur de l'un des polygones R, de R_h par exemple. Quand les paramètres u varieront entre les limites que nous leur avons fixées, les polygones R varieront, mais nous pourrons toujours supposer que C_0 est assez petit pour rester constamment tout entier à l'intérieur de R_h. Si nous considérons maintenant les différents transformés du point z, c'est-à-dire les différents points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, chacun de ces points sera contenu à l'intérieur d'un petit contour C_i situé tout entier à l'intérieur d'un certain polygone R_k, ainsi qu'on l'a vu plus haut. Tous les contours C_i seront *congruents entre eux et extérieurs les uns aux autres.*

J'appellerai σ la S de C_0 qui sera celle de tous les C_i. Si je considère maintenant diverses circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental et les arcs de ces circonférences qui sont interceptés par C_0, la L de ces arcs restera inférieure à une certaine limite que j'appelle λ.

Démontrons maintenant quelques lemmes.

Lemme IV. — *Considérons les points transformés de z, c'est-à-dire les points*

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i},$$

qui sont intérieurs à un cercle C' qui a pour centre l'origine et pour rayon

$$\rho' = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1};$$

le nombre de ces points est plus petit que

$$\frac{\pi}{4\sigma}\left(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2\right).$$

En effet, soit N ce nombre.

Si un point $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ est intérieur au cercle C', le contour C_i correspondant sera évidemment tout entier à l'intérieur du cercle C'' qui a pour centre l'origine et dont le R surpasse de λ celui du cercle C', c'est-à-dire dont le R est égal à $R' + \lambda$.

Il y a donc à l'intérieur du cercle C'' au moins N contours C_i dont la S totale est égale à $N\sigma$.

Or la S du cercle C'' est

$$\frac{\pi}{4}\left(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2\right).$$

On a donc

$$N < \frac{\pi}{4\sigma}\left(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME V. — *On a identiquement*

$$\operatorname{mod} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \operatorname{mod}\left(\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \operatorname{mod} z^2}.$$

En effet, envisageons un contour infiniment petit C_0 décrit autour du point z et le transformé C_i de ce contour par la substitution

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Soient ω_0 et ω_i leurs surfaces, on aura

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \operatorname{mod}\left[\frac{d\,\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}}{dz}\right]^2 = \operatorname{mod}\frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^4}.$$

Les S de ω_0 et ω_i seront

$$\int\!\!\int \frac{dx\,dy}{(1 - \operatorname{mod} z^2)^2} = \frac{\omega_0}{(1 - \operatorname{mod} z^2)^2},$$

$$\int\!\!\int \frac{dx\,dy}{\left[1 - \operatorname{mod}\left(\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2\right]^2} = \frac{\omega_i}{\left[1 - \operatorname{mod}\left(\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2\right]^2}.$$

Or ces figures sont congruentes et ont même S.

On a donc

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \left[\frac{1 - \operatorname{mod}\left(\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \operatorname{mod} z^2}\right]^2,$$

d'où

$$\operatorname{mod}\frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \operatorname{mod}\left(\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \operatorname{mod} z^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons deux cercles ayant pour centre l'origine et passant, l'un par le point z et l'autre par le point $\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$.

Soient A le R du premier cercle et R' le R du second cercle. On aura

$$\operatorname{mod} z = \frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1}, \qquad \operatorname{mod}\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1}$$

et enfin

$$\operatorname{mod}\frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2B'} + e^{-2B'} + 2}.$$

Théorème. — *La série* (2) *est convergente.*

Décrivons, en effet, une infinité de cercles ayant pour centre commun l'origine et dont les R croissent en progression arithmétique. Soient K_1, K_2, ..., K_n, ... ces cercles, et soit nr le R du cercle K_n.

Écrivons la série (2) sous la forme suivante :

$$(2\,bis) \qquad \Sigma = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots.$$

On obtient le terme U_n de la série (2 *bis*) en groupant tous les termes de la série (2) qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ compris dans la couronne circulaire située entre les deux cercles K_{n-1} et K_n.

Comme les termes de la série (2) sont positifs, un pareil groupement est licite et la convergence de la série (2 *bis*) entraîne celle de la série (2).

Le nombre des termes de (2) groupés ensemble dans le terme U_n est, en vertu du lemme IV, plus petit que

$$\frac{\pi}{4\sigma}\left(e^{2(nr+\lambda)} + e^{-2(nr+\lambda)} - 2\right) < \frac{\pi}{4\sigma} e^{2(nr+\lambda)}.$$

Chacun d'eux est, en vertu du lemme V, plus petit que

$$\left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr-r)} + e^{-2(nr-r)} + 2}\right)^m < \left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr-r)}}\right)^m.$$

On a donc

$$U_n < \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda+2mr} e^{-2n(m-1)r}.$$

Posons

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda+2mr} = K,$$

on aura

$$(4) \qquad U_n < \frac{K}{e^{2n(m-1)r}};$$

K sera une constante indépendante de n et le second membre de l'inégalité (4) sera, puisque $m > 1$, le $n^{\text{ième}}$ terme d'une progression géométrique décroissante. La série (2 *bis*), et par conséquent la série (2), est donc convergente.

C. Q. F. D.

Voyons quelle erreur on commet quand on se restreint dans la série (2) aux termes qui correspondent aux points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ intérieurs à un cercle ayant pour centre l'origine et dont le R est $(n-1)r$. La somme des termes négligés est égale à

$$U_n + U_{n+1} + \ldots$$

et par conséquent plus petite que

$$\frac{K\, e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2r(1-m)}}.$$

Théorème. — *La somme* Σ *de la série* (2) *est une fonction continue des paramètres* u.

En effet soit Σ la valeur de cette somme pour certaines valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

de ces paramètres u.

Soit $\Sigma + \Delta\Sigma$ la valeur de cette même somme pour des valeurs voisines

$$u_1 + \Delta u_1, \quad u_2 + \Delta u_2, \quad \ldots, \quad u_p + \Delta u_p$$

de ces mêmes paramètres. Je dis qu'on peut prendre les Δu assez petits pour que

$$|\Delta\Sigma| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée.

Soit Σ_0 la somme des $n-1$ premiers termes de la série (2 *bis*)

$$\Sigma_0 = U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}.$$

Soit

$$\Sigma_1 = U_n + U_{n+1} + \ldots,$$
$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1.$$

Soit de même $\Sigma_0 + \Delta\Sigma_0$, $\Sigma_1 + \Delta\Sigma_1$ la somme des termes correspondants de la série $\Sigma + \Delta\Sigma$; de telle sorte que

$$\Sigma + \Delta\Sigma = (\Sigma_0 + \Delta\Sigma_0) + (\Sigma_1 + \Delta\Sigma_1).$$

On aura

$$\Sigma_1 < \frac{K\, e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2r(1-m)}}, \qquad \Sigma_1 + \Delta\Sigma_1 < \frac{K\, e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2r(1-m)}}.$$

Nous pourrons donc prendre n assez grand pour que

$$\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \Sigma_1 + \Delta\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3},$$

Or, une fois n choisi, Σ_0 sera fonction continue des u; on pourra donc prendre les Δu assez petits pour que

$$|\Delta\Sigma_0| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et par conséquent pour que

$$|\Delta\Sigma| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons maintenant la série suivante

$$(5) \qquad \Theta(z) = \sum \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Je suppose :

1° Que l'algorithme $\mathrm{H}(z)$ représente une fonction rationnelle de z dont aucun infini n'est situé sur le cercle fondamental, mais qui est d'ailleurs quelconque ;

2° Que le nombre m est un entier plus grand que 1. La fonction $\mathrm{H}(z)$ aura un certain nombre d'infinis

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p.$$

Si le point z se confond avec un des points

$$\frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i}$$

l'un des termes de la série est infini et, par conséquent, la série ne peut être convergente.

Supposons au contraire que cela n'ait pas lieu. Nous pourrons trouver un nombre positif M tel qu'on ait, quel que soit i,

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) < \mathrm{M},$$

on pourra même choisir M assez grand pour que cette inégalité subsiste quand on fait varier les paramètres u entre certaines limites.

Je dis maintenant que la série $\Theta(z)$, que j'appellerai *série thétafuchsienne*, est convergente. En effet, nous aurons

$$\mathrm{mod}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}\right] < \mathrm{M}\,\mathrm{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Le module de chaque terme de la série (5) est donc plus petit que le terme correspondant d'une série convergente à termes positifs. C'est-à-dire que la série (5) est convergente et que sa somme est indépendante de l'ordre des termes.

D'ailleurs on démontrerait, comme pour la somme de la série (2), que la somme de la série (5) est une fonction *continue* des paramètres u.

II. — Classification et propriétés générales.

Ainsi la série (5) est convergente, sauf pour certains points singuliers ; dans ces conditions elle définit une fonction $\Theta(z)$ holomorphe. La fonction $\Theta(z)$ est essentiellement uniforme, mais elle cesse d'être holomorphe aux points singuliers pour lesquels la série (5) cesse d'être convergente.

Ces points singuliers sont :

1° Les points

$$\frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i},$$

c'est-à-dire les divers transformés des infinis de $H(z)$: ces points sont des pôles dans le voisinage desquels $\Theta(z)$ est méromorphe ;

2° Les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, c'est-à-dire les divers transformés du point ∞. Ces points sont encore des pôles dans le voisinage desquels $\Theta(z)$ est méromorphe.

On démontrerait ce double fait en remarquant que, dans le voisinage de ces points, un des termes de la série (5) devient infini et que si l'on supprime ce terme, la série reste convergente.

3° Nous avons enfin les points singuliers essentiels du groupe G, c'est-à-dire les points du cercle fondamental qui n'appartiennent pas à un côté de la deuxième sorte de l'un des polygones R. Ce sont aussi, pour la fonction $\Theta(z)$, des points singuliers essentiels.

Voici maintenant la propriété fondamentale de cette fonction. Considérons une substitution quelconque du groupe G, par exemple

$$\left(z, \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right); \tag{6}$$

cherchons quelle relation il y a entre

$$\Theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) \quad \text{et} \quad \Theta(z).$$

Le système des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

formant un groupe dont fait partie la substitution (6) sera identique au système des substitutions

$$\left[z, \frac{\alpha_i\left(\dfrac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) + \beta_i}{\gamma_i\left(\dfrac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) + \delta_i}\right] = \{z, f_i[f_k(z)]\},$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z), \qquad \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} = f_k(z),$$

ce qui permet d'écrire

$$\Theta(z) = \sum H\{f_i[f_k(z)]\}\left(\frac{d\{f_i[f_k(z)]\}}{dz}\right)^m,$$

ou

$$\Theta(z) = \sum H[f_i(f_k)]\left[\frac{df_i(f_k)}{df_k}\right]^m\left(\frac{df_k}{dz}\right)^m.$$

On a d'ailleurs

$$\Theta(f_k) = \sum H[f_i(f_k)]\left[\frac{df_i(f_k)}{df_k}\right]^m.$$

On a donc

$$\Theta(f_k) = \Theta(z)\left(\frac{df_k}{dz}\right)^{-m},$$

ou bien

$$(7)\qquad \Theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \Theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}$$

Nous appellerons *fonction thétafuchsienne* toute fonction uniforme de z jouissant de la propriété (7). Nous classerons les fonctions thétafuchsiennes de la même façon que les groupes fuchsiens, à l'aide des propriétés du polygone normal R_0 correspondant.

On a vu que les polygones R_0 pouvaient se distribuer en sept familles et que la première, la deuxième, la quatrième, la sixième et la septième de ces familles se subdivisent en deux ordres. Mais tout groupe du deuxième ordre de la deuxième, de la quatrième, de la sixième et de la septième famille est identique à un groupe de la troisième ou de la cinquième famille, ou à un groupe du premier ordre de la sixième ou de la septième famille (*voir* § IX et XI du Mémoire sur les groupes fuchsiens). Nous pouvons donc toujours supposer que le groupe G n'appartient pas au deuxième ordre de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille.

Cela posé, je dirai que la fonction $\Theta(z)$ fait partie de la première, de la troisième et de la cinquième famille si le groupe G fait partie de l'une de ces familles, et que la fonction $\Theta(z)$ fait partie de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille si le groupe G appartient au premier ordre de l'une de ces familles.

De même je dirai qu'une fonction thetafuchsienne est du genre p, si le groupe G correspondant est de ce genre.

Je puis également étendre aux fonctions thétafuchsiennes la classification des groupes fuchsiens en classes dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent.

Envisageons d'abord les fonctions de la première, de la deuxième et de la sixième famille. Les polygones R correspondants n'ont pas de côtés de la deuxième sorte, de telle manière que tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels. Le plan se trouve divisé en deux parties, à savoir l'intérieur et l'extérieur de ce cercle, par une ligne singulière essentielle; il faut en conclure, conformément aux principes actuellement admis dans la théorie des fonctions, et mis en lumière par les travaux de M. Weierstrass, que le développement (5) représente deux fonctions distinctes, selon que z est intérieur ou extérieur au cercle fondamental. La première de ces fonctions n'existera qu'à l'intérieur de ce cercle et admettra comme espace lacunaire toute la partie du plan qui lui est extérieure; la seconde, au contraire, n'existera qu'à l'extérieur du cercle fondamental. Dans ce qui va suivre, nous n'envisagerons jamais que la première de ces fonctions; en effet, la seconde d'entre elles, c'est-à-dire celle qui n'existe qu'à l'extérieur du cercle fondamental, peut aisément par un changement de z en $\frac{1}{z}$ se ramener à une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Considérons donc une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et définie par une série telle que (5); nous pouvons faire deux hypothèses :

Nous pouvons supposer qu'un ou plusieurs des infinis de $H(z)$ sont intérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\Theta(z)$ aura des infinis (sauf dans certains cas exceptionnels où plusieurs infinis de cette fonction se détruisent mutuellement) et nous dirons qu'elle est de la *première espèce;* nous serons certains alors que la somme de la série (5) n'est pas identiquement nulle, puisque cette somme peut croître indéfiniment.

On peut supposer, au contraire, que tous les infinis de $H(z)$ sont extérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\Theta(z)$ n'a pas d'infinis et nous dirons qu'elle est de la *deuxième espèce*. La fonction $\Theta(z)$ peut alors se développer en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z et qui reste convergente tant que z reste intérieur au cercle fondamental, c'est-à-dire tant que la fonction $\Theta(z)$ existe.

Rien n'empêche dans ce cas que la somme de la série (5) ne soit identiquement nulle, et nous démontrerons en effet plus loin que toutes les fonctions Θ de *deuxième espèce* s'expriment linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Passons maintenant aux fonctions de la troisième, de la quatrième, de la cinquième et de la septième famille; les polygones R ont alors des côtés de la deuxième sorte, tous les points du cercle fondamental ne sont plus des points singuliers essentiels; nous n'avons plus une ligne singulière essentielle, mais une infinité de points singuliers isolés. Il résulte de là que la série (5) au lieu représenter deux fonctions distinctes selon que z est intérieur ou extérieur au cercle fondamental, représente une seule et même transcendante qui est partout holomorphe, sauf en certains points isolés. La fonction $\Theta(z)$ est donc une transcendante uniforme existant dans toute l'étendue du plan et présentant une infinité de points singuliers essentiels.

On peut se demander quelle place elle occupe dans la classification que M. Mittag-Leffler a donné de pareilles fonctions dans sa communication du 3 avril 1882 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*.

Les points singuliers essentiels étant en nombre infini seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de deuxième espèce; ceux-ci à leur tour, s'ils sont en nombre infini, seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de troisième espèce, et ainsi de suite.

Je dis que nous ne serons jamais arrêtés et que nous trouverons ainsi une infinité de points singuliers de toutes les espèces. En effet, si nous avons une infinité de points singuliers de la $(n-1)^{\text{ième}}$ espèce, il y aura au moins un point singulier de la $n^{\text{ième}}$ espèce; mais s'il y en a un, il y en aura une infinité, car tous ses transformés par les diverses substitutions du groupe G devront aussi être des points singuliers de la $n^{\text{ième}}$ espèce. C. Q. F. D.

Nous avons donc affaire à une de ces fonctions que M. Mittag-Leffler a appelées du *deuxième genre*.

Il semble d'abord que toutes les fonctions aient des infinis, car elles existent dans tout le plan et elles doivent avoir pour pôles ceux de la fonction rationnelle $H(z)$ qui doit devenir infinie en quelque point du plan. Mais il peut arriver que plusieurs des infinis de la fonction $\Theta(z)$ se détruisent mutuellement; de sorte qu'on peut construire, comme dans le cas précédent, des fonctions thêtafuchsiennes de la deuxième espèce; on en verra un exemple au paragraphe VIII.

Parmi les points singuliers de nos fonctions thêtafuchsiennes, il en est qui doivent particulièrement attirer notre attention : ce sont les sommets des polygones R qui sont de la deuxième catégorie et qui appartiennent à un cycle de la troisième sous-catégorie (*voir* le paragraphe V du Mémoire sur les groupes fuchsiens).

Soit α un pareil sommet; il y aura parmi les substitutions du groupe G une substitution parabolique de la forme

$$\left(\frac{1}{z-\alpha}, \frac{1}{z-\alpha}+\beta\right).$$

C'est là la définition même des cycles de la troisième sous-catégorie.

Posons

$$\frac{2i\pi}{\beta}\frac{1}{z-\alpha}=t, \qquad \frac{2i\pi}{\beta}\frac{1}{f_i(z)-\alpha}=\varphi_i(t),$$

en conservant pour le symbole $f_i(z)$ la signification qu'on lui a donnée plus haut, c'est-à-dire

$$f_i(z)=\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}.$$

Définissons maintenant un symbole H_1 de la façon suivante :

$$\mathrm{H}_1(t)=\mathrm{H}\left(\alpha+\frac{2i\pi}{\beta t}\right)\left(\frac{-2i\pi}{\beta t^2}\right)^m.$$

Il est clair que H_1 sera l'algorithme d'une fonction rationnelle. On trouvera alors identiquement

$$\Theta(z)=\sum \mathrm{H}[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m=\sum \mathrm{H}_1[\varphi_i(t)]\left[\frac{d\varphi_i(t)}{dt}\right]^m\left(\frac{dt}{dz}\right)^m.$$

Mais, la série $\Theta(z)$ étant absolument convergente, on peut en ordonner les termes comme on le veut. Voici comment nous allons les ordonner :

Parmi les fonctions $\varphi_i(t)$ on peut en choisir une infinité

$$\theta_0(t)=t, \qquad \theta_1(t), \quad \theta_2(t), \quad \ldots$$

de telle façon que toute fonction $\varphi_i(t)$ puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\varphi_i(t)=\theta_k(t+2hi\pi),$$

h étant un entier positif ou négatif; ce qui permet d'écrire

$$\Theta(z)=\left(\frac{dt}{dz}\right)^m\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}\mathrm{H}_1[\theta_k(t+2hi\pi)]\left[\frac{d\theta_k(t+2hi\pi)}{dt}\right]^m$$

Considérons un nouvel algorithme $\mathrm{H}'_k(t)$ défini comme il suit :

$$\mathrm{H}'_k(t)=\mathrm{H}_1[\theta_k(t)]\left(\frac{d\theta_k}{dt}\right)^m,$$

d'où

$$\Theta(z)=\left(\frac{dt}{dz}\right)^m\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}\mathrm{H}'_k(t+2hi\pi)$$

Il faut d'abord effectuer la sommation par rapport à h; or $H'_k(t)$ est une fonction rationnelle de t qui tend vers zéro quand t tend vers l'infini. On aura donc

$$\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H'_k(t+2hi\pi) = H''_k(e^t),$$

$H''_k(e^t)$ désignant une fonction rationnelle de e^t qui tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Il vient donc

$$\Theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_k H''_k(e^t).$$

La convergence de cette série est évidente, puisqu'on l'a obtenue en groupant d'une certaine manière les termes de la série (5) qui est absolument et uniformément convergente. De plus, les termes sont rationnels en e^t et leurs infinis ne sont pas infiniment rapprochés dans le voisinage de

$$e^t = 0 \qquad \text{ou de} \qquad e^t = \infty,$$

de telle sorte qu'on peut trouver une limite supérieure et inférieure des modules des valeurs de e^t qui rendent infinie l'une des fonctions H''_k.

Il suit de là que, dans le voisinage du point singulier $z = \alpha$, la fonction $\Theta(z)(z-\alpha)^{2m}$ est holomorphe en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(z-\alpha)}}$ ou en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ selon qu'on approche du point α par l'intérieur ou par l'extérieur du cercle fondamental.

En d'autres termes, α est pour la fonction Θ un *point singulier logarithmique*.

Ainsi, si l'on envisage les différents sommets des polygones R, on reconnaîtra :

1° Que les sommets qui font partie d'un cycle de la première et de la troisième catégorie sont pour la fonction Θ des points ordinaires ou des pôles ;

2° Que les sommets qui font partie d'un cycle de la troisième sous-catégorie sont des points singuliers logarithmiques;

3° Que les sommets qui font partie d'un cycle de la quatrième sous-catégorie sont des points singuliers d'une nature plus élevée.

III. — Zéros et infinis.

Nous allons maintenant étudier la distribution des zéros et des infinis de la fonction Θ. Il est clair que, si un point z est pour cette fonction un zéro ou un infini, il en sera de même de tous les points correspondant à z, c'est-à-dire de tous les points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$. De cette façon, à tout zéro contenu à l'intérieur du polygone R_0, correspondra un zéro contenu dans chacun des polygones R, et que nous ne regarderons pas comme *réellement distinct* du premier. De sorte que le nombre des zéros et des infinis *réellement distincts* de la fonction Θ sera le nombre des zéros et des infinis contenus à l'intérieur de R_0 si la fonction n'existe que dans le cercle fondamental, et à l'intérieur de $R_0 + R'_0$ si elle existe dans tout le plan. Je rappelle que R'_0 est le polygone symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental.

Cependant, quelques conventions spéciales sont nécessaires, si l'on veut pouvoir énoncer simplement le résultat auquel nous allons arriver au sujet du nombre des zéros et des infinis. Il est d'abord évident qu'un zéro double ou un infini double doit compter pour deux zéros ou pour deux infinis; de même pour les zéros et les infinis multiples. Mais, outre les zéros contenus à l'intérieur de R_0, il peut y en avoir qui se trouvent sur le périmètre de ce polygone. Supposons qu'il y en ait un sur un côté ab de la première sorte, il y en aura un autre, correspondant au premier sur le côté conjugué de ab. Ces deux zéros ne seront pas réellement distincts et l'on ne devra les compter que pour un seul zéro, ou, si l'on veut, on devra compter chacun d'eux pour un demi-zéro. Supposons maintenant qu'un sommet de la première catégorie soit un zéro d'ordre p; les sommets qui font partie du même cycle seront au nombre de n par exemple et chacun d'eux sera un zéro d'ordre p comme le premier. Supposons que la somme des angles qui correspondent à ces sommets soit $\frac{2\pi}{k}$; chacun d'eux appartiendra à $n.k$ polygones différents, de manière qu'on devra en quelque sorte le partager entre ces $n.k$ polygones et que la part du polygone R_0 sera un zéro d'ordre $\frac{p}{n.k}$. Il résulte de là que les différents sommets du cycle représenteront seulement $\frac{p}{k}$ zéros distincts.

Il est facile d'étendre cette convention au cas où l'un des zéros est un des sommets de la deuxième catégorie et appartenant à un cycle de la troisième sous-catégorie. Nous avons vu que si α est un pareil sommet, la fonction Θ peut se mettre sous la forme

$$(z-\alpha)^{-2m}\,\Phi\left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}\right],$$

Φ étant une fonction holomorphe de $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ s'annulant pour

$$z=\alpha,$$

c'est-à-dire pour

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}=0.$$

$u=0$ sera alors un zéro de la fonction $\Phi(u)$. Supposons que ce soit un zéro d'ordre p. Nous dirons alors que les différents sommets du cycle auquel appartient α représentent p zéros distincts de la fonction Θ.

Ce qui précède s'applique évidemment aux infinis.

Occupons-nous d'abord des infinis. La série (5) devient infinie quand $H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ ou $\frac{1}{\gamma_i z+\delta_i}$ devient infini. Supposons d'abord que la fonction Θ n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Alors $\frac{1}{\gamma_i z+\delta_i}$ ne peut devenir infini; de plus, à chaque infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspondra en général un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ qui sera intérieur à R_0.

Donc :

Le nombre des infinis distincts de Θ est égal au nombre des infinis de H intérieurs au cercle fondamental.

Supposons maintenant que Θ existe dans tout le plan.

A tout infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ intérieur à R_0.

A tout infini de $H(z)$ extérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ intérieur à R'_0.

A l'intérieur de chacun des polygones R'_i et par conséquent à l'intérieur de R'_0, nous trouverons un des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ qui sont pour Θ des infinis d'ordre $2m$. Il y a cependant une exception : les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ sont les différents points correspondants de l'infini; la surface de l'un des polygones R' contient le point ∞ et ne contient pas de point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; le point ∞ n'est pas en général un infini de Θ. Nous supposerons, pour éviter cette difficulté, que le polygone R'_0 ne contient pas le point ∞ et nous pourrons énoncer le résultat suivant :

Le nombre des infinis de Θ contenus à l'intérieur de $R_0+R''_0$, c'est-à-dire *le nombre des infinis distincts de Θ est égal au nombre des infinis de H augmenté de $2m$.*

Passons à la recherche des zéros. Parmi eux, il y en a qui doivent d'abord attirer l'attention : je veux parler des sommets de la première catégorie qui dans certains cas sont forcément des zéros d'ordre déterminé.

Soient α un sommet de la première catégorie et α' son symétrique par rapport au cercle fondamental. Supposons que α fasse partie d'un cycle et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{k}$. L'une des substitutions de G sera

$$\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'},\ e^{\frac{2i\pi}{k}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right) = [z, f_1(z)].$$

Nous aurons

$$\Theta[f_1(z)] = \Theta(z)\left(\frac{df_1}{dz}\right)^{-m},$$

ou

$$\Theta(f_1)(f_1-\alpha')^{2m} = \Theta(z)(z-\alpha')^{2m}\left[\frac{d\left(\frac{f_1-\alpha}{f_1-\alpha'}\right)}{d\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)}\right]^{-m}. \tag{8}$$

Mais

$$\frac{f_1-\alpha}{f_1-\alpha'} = e^{\frac{2i\pi}{k}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}.$$

Remarquons de plus que nous pouvons développer $\Theta(z)(z-\alpha')^{2m}$ suivant les puissances de $\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}$, de façon à poser

$$\Theta(z)(z-\alpha')^{2m} = \Theta_1\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right) = \sum A_p\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p.$$

L'équation (8) devient alors

$$\sum A_p e^{\frac{2ip\pi}{k}}\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p = \sum A_p e^{-\frac{2mi\pi}{k}}\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p.$$

Cette identité exige qu'on ait

$$A_p = 0,$$

ou bien

$$e^{\frac{2i\pi p}{k}} = e^{-\frac{2mi\pi}{k}},$$

c'est-à-dire

$$p+m \equiv 0 \pmod{k}. \tag{9}$$

Donc le développement de Θ_1 ne contient que des termes dont l'ordre p satisfait à la congruence (9). Si donc k ne divise pas m, $z=\alpha$ est un zéro pour Θ_1 et par conséquent pour Θ.

Ce zéro est d'ordre au moins égal au reste de la division de $m(k-1)$ par k; et si l'ordre de ce zéro diffère de ce reste c'est d'un multiple de k. Il y a exception évidemment si α est un infini de Θ.

De même nous avons vu que les sommets qui appartiennent à un cycle de la troisième sous-catégorie sont, en général, des zéros de la fonction Θ.

Nous allons maintenant chercher quel est le nombre des zéros réellement distincts de notre fonction Θ et, pour fixer les idées, nous supposerons qu'il s'agit d'une fonction de la première famille. Soit q le nombre des infinis distincts, soit p le nombre des zéros réellement distincts, c'est-à-dire le nombre cherché; soit maintenant p_0 le nombre des zéros situés à l'intérieur de R_0 en laissant de côté les zéros qui pourraient se trouver sur le périmètre et sur les sommets. Nous supposerons, ce qui arrivera en général, qu'il n'y a pas de zéro sur le périmètre en dehors de ceux qui sont sur les sommets; s'il y en avait, on n'aurait qu'à considérer les zéros situés sur les côtés comme des sommets séparant deux côtés consécutifs du polygone situés dans le prolongement l'un de l'autre. Supposons maintenant que les sommets se répartissent en un certain nombre de cycles de la première catégorie $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$. Supposons que tous les sommets du cycle C_i soient des zéros d'ordre p_i et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{k_i}$ de telle sorte que l'ensemble de ces zéros doivent être comptés, d'après la convention faite plus haut, pour $\frac{p_i}{k_i}$ zéros distincts. On devra avoir

$$p_i + m \equiv 0 \pmod{k_i},$$
$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i}.$$

Le problème consiste à évaluer p_0. Pour cela il faut prendre l'intégrale

$$\int \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)} \tag{10}$$

le long du périmètre de R_0. La partie réelle de cette intégrale sera nulle et la partie imaginaire s'écrira

$$2i\pi(p_0 - q).$$

L'évaluation de l'intégrale (10) présente ici une difficulté spéciale.

En effet la fonction sous le signe $\int$ devient infinie en divers points du contour d'intégration, puisque nous avons vu qu'un certain nombre de sommets de R_0 étaient des zéros de Θ. On tournera cette difficulté en décrivant autour de chacun de ces sommets comme centre des arcs de cercle infiniment petits, raccordant les deux côtés qui aboutissent au sommet considéré; il faudra décrire ces arcs de cercle à l'intérieur de R_0, de façon à laisser les sommets en dehors du contour, puisque nous voulons évaluer p_0, c'est-à-dire le nombre des zéros *intérieurs* à R_0.

Il faudra donc évaluer l'intégrale (10) :

1° Le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets;

2° Le long des côtés de la première sorte;

3° Le long des côtés de la deuxième sorte.

Il suffira d'ailleurs de calculer la partie imaginaire de l'intégrale, car nous savons d'avance que la partie réelle est nulle, et cette partie imaginaire n'est autre chose que la variation de l'argument de Θ.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une fonction de la première famille, de telle façon que nous n'ayons que des sommets de la première catégorie et des côtés de la première sorte. Soit $2n$ le nombre de ces côtés.

Considérons d'abord un des petits arcs de cercle décrit autour d'un sommet; supposons que ce sommet appartienne au cycle C_i dont la somme des angles est $\frac{2\pi}{k_i}$ et dont tous les sommets sont des zéros d'ordre p_i. Soit λ l'angle du sommet considéré. L'intégrale prise le long du petit arc de cercle correspondant sera $-\sqrt{-1}\,p_i\lambda$; prise le long de tous les arcs de cercle décrits autour des divers sommets du cycle, elle sera

$$-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k_i}p_i.$$

Enfin, l'intégrale (10), prise le long de tous les arcs infiniment petits décrits autour des sommets de R_0, sera

$$-2\pi\sqrt{-1}\sum\frac{p_i}{k_i}.$$

Il reste à évaluer notre intégrale le long des côtés de la première sorte. Soient donc ab, $a'b'$ deux côtés conjugués de R_0. Il faut calculer

$$J=\int_a^b\frac{\Theta'\,dz}{\Theta}+\int_{b'}^{a'}\frac{\Theta'\,dz}{\Theta}=\int_a^b\frac{\Theta'\,dz}{\Theta}-\int_{a'}^{b'}\frac{\Theta'\,dz}{\Theta}.$$

Soit $[z, f_i(z)]$ celle des substitutions du groupe G qui change $a'b'$ en ab. Nous aurons, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$\Theta(f_i)=\Theta(z)\left(\frac{df_i}{dz}\right)^{-m},$$

ou

$$L\,\Theta(f_i)=L\,\Theta(z)-m\,L\,\frac{df_i}{dz}.$$

Donc

$$J=\int_{a'}^{b'}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)}-\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}\right]dz=-m\int_{a'}^{b'}d\left[L\,\frac{df_i}{dz}\right]\quad(^1).$$

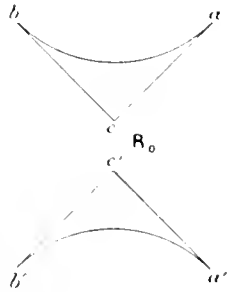
(1) $$\Theta'(f_i)=\frac{d\Theta[f_i(z)]}{dz}.$$

N. E. N.

Il reste donc à chercher comment varie la partie imaginaire de $L\frac{df_i}{dz}$ ou l'argument de $\frac{df_i}{dz}$ quand z varie de a' à b'.

Je rappelle que les côtés de R_0, ab, $a'b'$ sont des arcs de cercle; je vais mener aux points a, b, a', b', les tangentes aux arcs de cercle ab, $a'b'$; soient ac, bc; $a'c'$, $b'c'$ ces tangentes. Soient maintenant $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ les arguments des quantités imaginaires $(c-a)$, $(b-c)$, $(c'-a')$, $(b'-c')$.

Fig. 10.



Supposons qu'on opère de la même manière pour tous les côtés du polygone curviligne R_0; on obtiendra un polygone rectiligne P_0 de $4n$ côtés, dont les côtés seront les tangentes menées aux côtés de R_0 par les sommets de R_0 et dont les sommets seront ceux de R_0 et les points tels que c, c'; je désignerai simplement par les lettres c et c' les angles du polygone P_0 qui correspondent aux sommets c et c'. Outre les sommets tels que c, le polygone P_0 admet $2n$ angles qui lui sont communs avec R_0 et dont la somme est $\sum \frac{2\pi}{k_i}$, d'où la relation

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{k_i} = (4n-2)\pi.$$

Nous pouvons écrire maintenant

$$\arg.\frac{df_i}{dz} = \omega_1 - \omega_3, \qquad \text{pour } z = a,$$

$$\arg.\frac{df_i}{dz} = \omega_2 - \omega_4, \qquad \text{pour } z = b',$$

$$\text{partie imag. de } J = -m(\omega_2 - \omega_1 - \omega_4 + \omega_3)\sqrt{-1},$$

$$c = \omega_1 - \omega_2 + \pi,$$

$$c' = \pi + \omega_3 - \omega_4,$$

$$\text{partie imag. de } J = m(c + c' - 2\pi)\sqrt{-1}.$$

L'intégrale (10) prise le long de tous les côtés de la première sorte aura donc pour valeur la partie imaginaire de $\sum J$ ou bien

$$\sqrt{-1}\, m \sum c - 2nm\pi\sqrt{-1}$$

ou

$$(4n-2)m\pi\sqrt{-1} - 2\pi\sqrt{-1}\sum \frac{m}{k_i} - 2nm\pi\sqrt{-1} = (n-1)2m\pi\sqrt{-1} - 2\pi\sqrt{-1}\sum \frac{m}{k_i}.$$

L'intégrale (10) se réduit alors à

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i+m}{k_i}\right],$$

d'où la relation

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum \frac{p_i+m}{k_i}.$$

Ce nombre p_0 des zéros intérieurs à R_0 est entier à cause des congruences

$$p_i + m \equiv 0 \pmod{k_i}.$$

Exprimons maintenant le nombre p des zéros réellement distincts, défini par les conventions faites plus haut; nous trouverons

$$p = q + m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Ainsi, l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre m, du nombre $2n$ des côtés de R_0 et de la somme $\sum \frac{2\pi}{k_i}$ des angles de ce polygone.

Cette somme satisfait à l'inégalité

$$\sum \frac{2\pi}{k_i} < \pi(2n-2),$$

d'où

$$\sum \frac{1}{k_i} < n-1,$$

et par conséquent $p > q$. L'expression $\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right)$ est proportionnelle à la S du polygone R_0.

Supposons maintenant que la fonction Θ soit de la deuxième ou de la sixième famille. Nous n'aurons toujours que des côtés de la première sorte; mais, outre les cycles de la première catégorie $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$, que nous avions rencontrés dans le premier cas, nous aurons des cycles $C'_1, C'_2, \ldots, C'_i$ de la deuxième catégorie et de la troisième sous-catégorie. Considérons le cycle C'_i; les divers sommets de ce cycle seront des zéros; je suppose d'après la convention faite plus haut qu'ils comptent pour h_i zéros distincts. On aura alors

(11) $$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i} + \sum h_i.$$

Il faut évaluer l'intégrale (10) :

1° Le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la première catégorie;

2° Le long des côtés de la première sorte;

3° Le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la deuxième catégorie.

La première partie de l'intégrale se réduit, comme plus haut, à $-2\pi\sqrt{-1}\sum \frac{p_i}{k_i}$; la seconde à

$$\sum J = 2\pi m \sqrt{-1}\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Pour évaluer la troisième, il suffit d'étudier comment varie l'argument de Θ dans le voisinage des sommets de la deuxième catégorie; à cet effet, il faut mettre la fonction Θ sous la forme

$$(z - \alpha)^{-2m}\,\Phi\left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha - z)}}\right]$$

(Φ étant l'algorithme d'une fonction holomorphe), ce qui est possible, ainsi qu'on l'a vu plus haut. On reconnaîtra alors que cette troisième partie de l'intégrale se réduit à $-2\pi\sqrt{-1}\sum h_i$.

Il restera donc, pour l'expression de l'intégrale (10),

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum h_i\right],$$

d'où

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum h_i$$

et

$$p = q + m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Nous sommes conduits, pour l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts, à la même expression que dans le cas précédent. Cet excès est proportionnel au nombre m et dépend en outre du nombre des côtés du polygone R_0 et de la somme de ses angles, ou bien encore il est proportionnel à la fois à m et à la S de R_0.

Supposons enfin que la fonction Θ soit de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille, c'est-à-dire existe dans tout le plan.

Nous aurons alors des côtés de la première et de la deuxième sorte, des sommets de la première et de la troisième catégorie et des sommets de la deuxième catégorie appartenant à des cycles de la troisième sous-catégorie. Nous allons chercher le nombre des zéros et des infinis distincts; ce nombre sera défini comme précédemment. Cependant il y a une remarque à faire au sujet du nombre des infinis distincts; ce sera en général le nombre des infinis intérieurs à R_0 et à R'_0, mais une difficulté se présentera si le point ∞ fait partie de la région R'_0. Dans ce cas il peut se faire que ∞ ne soit pas un infini de Θ, mais que tous les transformés du point ∞ par les substitutions du groupe G soient des infinis de Θ. Le nombre des infinis réellement distincts sera égal alors au nombre des infinis intérieurs à $R_0 + R_0$ *plus* $2m$. Pour éviter cette difficulté, je supposerai que le polygone R_0 ait été choisi de telle sorte que le point ∞ ne fasse pas partie de la région R_0.

Cela posé reprenons l'intégrale (10); il va falloir l'évaluer le long du contour de R_0, puis le long du contour de R'_0 et ajouter. Soient $2n$ le nombre des côtés de la première sorte; l celui des côtés de la deuxième sorte; conservons d'ailleurs les notations employées plus haut : p_0 et q représenteront alors le nombre des zéros et des infinis intérieurs à $R_0 + R'_0$.

Il faut évaluer l'intégrale :

1° Le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la première catégorie;

2° Le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la troisième sous-catégorie;

3° Le long des côtés de la première sorte;

4° Le long des côtés de la deuxième sorte.

La première et la deuxième partie de l'intégrale seront égales à

$$-2i\pi\left(\sum \frac{p_i}{k_i} + \sum h_i\right).$$

La troisième partie sera égale, comme plus haut, à la partie imaginaire de $\sum J$. Construisons un polygone P_0 en menant, par les différents sommets de R_0, des tangentes aux côtés de la première sorte. Le polygone rectiligne ainsi obtenu aura $4n + l$ côtés ; ses angles seront de deux sortes : les uns seront analogues aux angles que nous avons appelés plus haut c, c'; les autres lui seront communs avec les angles de R_0, mais parmi ceux-ci les uns, dont la somme sera $\sum \frac{2\pi}{k_i}$, correspondront aux sommets de la première catégorie; les autres, qui seront nuls, correspondront aux sommets de la deuxième catégorie; les autres enfin, qui seront droits et au nombre de $2l$, correspondront aux sommets de la troisième catégorie; d'où la relation

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{k_i} + l\pi = (4n + l - 2)\pi.$$

Or on a trouvé, plus haut,

$$\text{partie imag. de} \sum \mathrm{J} = m\sqrt{-1}\left(\sum c - 2n\pi\right);$$

on aura donc

$$\text{partie imag. de} \sum \mathrm{J} = 2\pi m\sqrt{-1}\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Appelons enfin $2\pi \mathrm{I}\sqrt{-1}$ la partie imaginaire de l'intégrale prise le long des côtés de la deuxième sorte; nous trouverons pour l'intégrale (10) prise le long de R_0:

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum h_i + \mathrm{I}\right].$$

Il faut prendre maintenant l'intégrale (10) le long de R'_0. Supposons que, d'après les conventions faites plus haut, les sommets de la première catégorie de R_0 comptent pour $\sum \frac{p'_i}{k_i}$ zéros distincts et ceux de la deuxième catégorie pour $\sum h'_i$ zéros distincts. Nous trouverons pour la valeur de l'intégrale prise le long de R_0, en raisonnant comme plus haut,

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum h'_i - \mathrm{I}\right],$$

ou en ajoutant les deux intégrales

$$2\pi\sqrt{-1}\left[2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum h_i - \sum h'_i\right],$$

d'où

$$p_0 = q - 2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum (h_i + h'_i).$$

Mais, si p désigne, comme plus haut, le nombre des zéros distincts, on aura

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i} + \sum \frac{p'_i}{k_i} + \sum h_i + \sum h'_i,$$

d'où

$$p = q - 2m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Ainsi, l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre m, du nombre $2n$ des côtés de la première sorte et de la somme des angles de la première catégorie.

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que, dans tous les cas possibles, le nombre des zéros et celui des infinis distincts sont toujours finis.

IV. — Fonctions fuchsiennes.

Si une fonction $F(z)$ est uniforme, si elle se reproduit par toutes les substitutions d'un groupe fuchsien G, de telle sorte que, si

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

est une substitution de ce groupe, on ait identiquement

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z),$$

si enfin la fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et d'infinis réellement distincts, je dirai que cette fonction est une *fonction fuchsienne*. Existe-t-il de pareilles fonctions? Il est aisé d'en former.

Considérons, en effet, deux fonctions thêtafuchsiennes correspondant à un même groupe G et à une même valeur de l'entier m, leur quotient sera une fonction fuchsienne. Il est aisé de généraliser ce procédé. Nous dirons que le nombre m est le *degré* de la serie Θ. Si nous envisageons ensuite un produit de plusieurs séries telles que Θ, le degré de ce monome sera la somme des degrés de tous les facteurs. Si nous considérons un polynome entier par rapport à diverses séries Θ, nous dirons que ce polynome est homogène et de degré k si tous ses termes sont d'un même degré k; le quotient de deux polynomes homogènes de degrés k et k' sera une fonction rationnelle homogène de degré $k-k'$. Il est clair que toute fonction rationnelle, homogène de degré 0 par rapport à diverses séries Θ, est une fonction fuchsienne. Nous verrons plus tard comment toute fonction fuchsienne peut s'exprimer de cette façon.

Quelles sont les propriétés des fonctions fuchsiennes?

1° *Les singularités sont les mêmes que celles des fonctions thêtafuchsiennes;* nous avons par conséquent des fonctions fuchsiennes n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et pour lesquelles toute la circonférence de cercle est une ligne singulière essentielle, et d'autres qui existent dans tout le plan et dont les points singuliers essentiels, situés tous sur le cercle fondamental, sont isolés quoique en nombre infini.

2° Le nombre des zéros distincts d'une fonction fuchsienne $F(z)$ est égal à celui de ses infinis distincts; il est égal, d'autre part, au nombre des zéros distincts de la fonction fuchsienne $F(z)-a$, c'est-à-dire au nombre des points réellement distincts pour lesquels $F(z)$ prend la valeur a. En conséquence, le nombre des points intérieurs à R_0 (ou à $R_0+R'_0$) et pour lesquels $F(z)$ reprend une même valeur est *constant* et *fini*.

3° Soient deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ correspondant à un même groupe fuchsien G, et supposons que la première reprenne p fois, et la seconde p_1 fois, la même valeur à l'intérieur de R_0; je dis qu'il y aura entre F et F_1 une relation algébrique. En effet, à chaque valeur de F correspondent p_1 valeurs de F_1: toute fonction symétrique de ces p_1 valeurs est méromorphe en F pour toutes les valeurs de F finies ou infinies. Toutes ces fonctions symétriques sont donc des fonctions rationnelles de F; donc F_1 elle-même est fonction algébrique de F. C. Q. F. D.

4° Considérons maintenant toutes les fonctions fuchsiennes qui correspondent à un même groupe G. Entre deux quelconques d'entre elles nous venons de voir qu'il y a une relation algébrique. Il suit de là que toutes ces fonctions s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y. Nous aurons d'ailleurs entre x et y une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0. \tag{1}$$

Quel est le genre de la relation (1) ou, ce qui revient au même, celui de la surface de Riemann correspondante? Pour résoudre cette question, il faut se reporter au paragraphe VIII du Mémoire sur les groupes fuchsiens, paragraphe intitulé *Classification en genres;* dans ce paragraphe, je supposais que l'on découpait la région R_0 (ou $R_0+R'_0$), puis qu'on la repliait en la déformant de manière à recoller ensemble les côtés conjugués et à obtenir ainsi une surface fermée. Il est clair qu'au point de vue de la géométrie de situation la surface fermée ainsi obtenue ne diffère pas de la surface de Riemann qui nous occupe. Il en résulte que le genre de la relation (1) est précisément ce que j'ai appelé, dans le Mémoire en question, *le genre du groupe* G. Si donc le groupe G est de genre zéro, il en sera de même de la relation (1) et, par conséquent, toutes les fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide d'*une seule* d'entre elles que j'appellerai x.

On peut éviter ces considérations empruntées à la géométrie de situation. C'est ce que j'ai fait dans un travail inséré dans les Mémoires de l'Académie de Caen [1], où je détermine le genre de la relation (1) par le nombre des cycles distincts que l'on peut faire décrire au point analytique (x, y), mais on est conduit ainsi à une discussion assez longue.

5° Considérons la fonction fuchsienne que nous venons d'appeler x et formons les deux fonctions suivantes :

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}}, \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}}. \tag{2}$$

Il est clair que l'on aura

$$\frac{1}{v_1}\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2}\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{2\dfrac{d^3 x}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - 3\left(\dfrac{d^2 x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^4}.$$

On vérifie aisément que le troisième membre de cette double égalité est une fonction fuchsienne de z : c'est donc, d'après ce que nous venons de voir, une fonction rationnelle de x et de y, que j'appellerai $\varphi(x, y)$.

Les deux intégrales de l'équation linéaire

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y) \tag{3}$$

sont donc

$$v = v_1, \qquad v = v_2.$$

Ainsi la considération de la fonction fuchsienne x permet d'intégrer l'équation linéaire (3) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du point analytique (x, y). On voit que la variable indépendante x s'exprime par une fonction fuchsienne de z, c'est-à-dire du rapport des intégrales. Quand on connaît cette fonction fuchsienne on en déduit les intégrales elles-mêmes à l'aide des formules (2).

Dans le cas particulier où le groupe G est de genre zéro, l'équation (3) pourra s'écrire

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x), \tag{3 bis}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle de x seulement; dans ce cas, en effet, nous venons de voir que toute fonction fuchsienne s'exprime rationnellement en x.

---

[1] Ce Tome, p. 75.

Cherchons maintenant quels sont les points singuliers de l'équation (3) et comment se comportent les intégrales dans le voisinage de chacun d'eux. En général, les intégrales seront des fonctions holomorphes de x; il y aura deux exceptions qui nous donnent deux sortes de points singuliers :

1° Pour les points singuliers de la relation (1), y cesse d'être fonction holomorphe de x, et il en est de même des intégrales v_1 et v_2; mais v_1 et v_2 restent *fonctions holomorphes du point* analytique (x, y). Nous n'avons donc pas ainsi un véritable point singulier.

2° Pour les points (x, y) qui correspondent aux divers sommets du polygone R_0. Dans cette seconde espèce de points singuliers, nous distinguerons :

1° Ceux qui correspondent à des sommets de la première catégorie. Dans le voisinage d'un pareil point singulier, les intégrales de l'équation (3) sont régulières, pour employer l'expression de M. Fuchs. Si nous formons maintenant l'équation déterminante correspondant à ce point singulier, la différence des racines de cette équation est l'inverse d'un nombre entier. En effet, le point singulier correspond à un sommet de R_0 qui fait partie d'un cycle de la première catégorie, et la somme des angles de ce cycle est égale à $\frac{2\pi}{p}$, p étant un nombre entier; on voit aisément que la différence des racines de l'équation déterminante est précisément $\frac{1}{p}$.

Dans le cas particulier où le sommet de R_0 envisagé appartient à un cycle de la première sous-catégorie, on a $p = 1$, d'après la définition même de cette sous-catégorie. Par conséquent, la différence des racines de l'équation déterminante est l'unité. Un semblable point n'est donc pas un point singulier.

2° Considérons maintenant un point singulier qui corresponde à un sommet de R_0 appartenant à un cycle de la deuxième catégorie. Ce cycle sera de la troisième sous-catégorie, puisque, d'après ce que nous avons vu plus haut, on peut toujours supposer qu'il n'y a pas de cycle de la quatrième sous-catégorie. Formons l'équation déterminante correspondant à un pareil point singulier; les racines de cette équation seront égales et les intégrales de l'équation (3) seront *logarithmiques*, mais *régulières*.

3° Il faudrait envisager enfin les points analytiques (x, y) qui correspondent à des sommets de la troisième catégorie, mais on reconnaîtrait aisément que ce ne sont pas des points singuliers.

En résumé, les intégrales de l'équation (3) sont partout régulières et [si on laisse de côté les points singuliers de la relation (1)] le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (3) est égal à celui des cycles de la deuxième ou de la troisième sous-catégorie que présente le polygone R_0 (ou les deux polygones R_0 et R'_0).

V. — Première famille; genre zéro.

Après avoir étudié les propriétés des fonctions fuchsiennes en général, nous allons nous occuper, séparément, des diverses familles et des divers genres entre lesquels se répartissent ces fonctions; nous commencerons par l'étude spéciale des fonctions les plus simples; celles de la première famille et du genre zéro.

Je rappelle d'abord quelle est, pour de semblables fonctions, la forme du polygone R_0. Les côtés sont tous de la première sorte et au nombre de $2n$; les côtés de rang p et $2n+1-p$ sont conjugués et, par conséquent, congruents. Les cycles sont au nombre de $n+1$; deux d'entre eux ne contiennent qu'un seul sommet, le premier le sommet de rang 1; le second le sommet de rang $n+1$. Les $n-1$ autres cycles sont formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang p et $2n+2-p$. (C'est l'exemple II du paragraphe VII du Mémoire sur les groupes fuchsiens.)

Un cas particulier remarquable est celui où le polygone R_0 est symétrique par rapport à l'arc de cercle qui coupe orthogonalement le cercle fondamental et qui joint les sommets de rang 1 et $n+1$. Je dirai alors simplement que ce polygone est symétrique.

Dans le cas qui nous occupe, le genre est égal à 0, et par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles, que j'appellerai x ou bien $f(z)$. Cette condition ne détermine pas complètement la fonction $x=f(z)$. Si, en effet, toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de x, elles s'expriment aussi rationnellement à l'aide de $\frac{ax+b}{cx+d}$, a, b, c, d étant des constantes quelconques. Il faut donc, pour définir complètement la fonction $x=f(z)$, s'imposer encore trois conditions. Voici celles que nous choisirons. Soient α_1, α_2, α_{n+1} les sommets de rang 1, 2 et $n+1$; nous supposerons que l'on a

$$f(\alpha_1)=0, \qquad f(\alpha_2)=1, \qquad f(\alpha_{n+1})=\infty.$$

La fonction $f(z)$ sera alors entièrement déterminée. A l'égard de cette fonction, je remarquerai ce qui suit : Si le polygone R_0 est symétrique, la fonction $f(z)$ est réelle et positive sur tout le périmètre de ce polygone.

J'appellerai α_i le sommet de rang i; ce sommet formera avec α_{2n+2-i} un cycle dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{\beta_i}$, β_i étant un nombre entier. Enfin je poserai

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i}),$$

d'où

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = \infty.$$

Pour $z = \alpha_i$, les $\beta_i - 1$ premières dérivées de $f(z)$ s'annulent de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = a_i + b_1(z - \alpha_i)^{\beta_i} + b_2(z - \alpha_i)^{\beta_i+1} + \ldots.$$

Pour $z = \alpha_{n+1}$, $f(z)$ est un infini d'ordre β_{n+1}, de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}}} + \frac{b_2}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}+1}} + \ldots.$$

Nous avons vu que si l'on pose

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

la fonction v ainsi définie satisfait à une équation

$$(3\ bis) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en x. Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$? On trouve aisément :

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)},$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ et $P(x)$ étant un polynome en x de degré $2n - 2$.

Le polynome $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$P(a_i) = Q'^2(a_i)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2}\right).$$

Nous désignons par la notation $Q'(x)$ la dérivée de $Q(x)$. De plus, le coefficient de x^{2n-2} dans $P(x)$ doit être égal à

$$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2}\right).$$

Voilà donc $n + 1$ conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire le polynome $P(x)$ pour que l'équation (3 *bis*) soit intégrable de la façon que nous avons dite. Ces conditions ne sont pas suffisantes. En effet, le polynome $P(x)$ étant de degré $2n-2$, il reste dans ce polynome $n-2$ paramètres arbitraires; mais, dans ces $n-2$ paramètres, qui sont des quantités *complexes*, je dois distinguer les parties réelles et imaginaires de telle façon qu'ils équivalent à $2n-4$ paramètres *réels*. Or, combien avons-nous de paramètres arbitraires dans le groupe G? Le groupe G est défini par un polygone R_0 de $2n$ côtés. Pour définir un pareil polygone il faut, en général, $4n-3$ conditions. Mais notre polygone n'est pas quelconque : en effet, les côtés conjugués doivent être congruents, ce qui fait n conditions; la somme des angles des divers cycles doit être respectivement égale à $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\beta_{n+1}}$, ce qui fait $n+1$ conditions. Il reste donc, en tout, dans notre groupe G, $2n-4$ paramètres arbitraires. Dans notre fonction $\varphi(x)$, au contraire, nous avons $2n-4$ paramètres qui restent arbitraires dans $P(x)$; nous avons en outre, dans $Q(x)$, $n-2$ paramètres complexes arbitraires, à savoir $a_3, a_4, \ldots, a_n$; cela équivaut à $2n-4$ paramètres réels. Donc, dans la fonction $\varphi(x)$, il y a $2n-4$ paramètres arbitraires de plus que dans le groupe G. Donc, pour que l'équation (3 *bis*) s'intègre de la façon que j'ai dite, il faut, outre les conditions énoncées plus haut, que $2n-4$ autres conditions soient remplies. Ces conditions sont transcendantes et très compliquées; leur étude trouvera place dans un autre Mémoire [1].

Supposons maintenant que l'on se donne $a_3, a_4, \ldots, a_n$, c'est-à-dire les points singuliers de l'équation (3 *bis*), $Q(x)$ sera déterminé et il nous restera les $2n-4$ paramètres de $P(x)$. Le nombre des paramètres restés arbitraires est alors précisément le nombre des conditions à remplir. Dans une question où n'entreraient que des fonctions algébriques ou des transcendantes simples, on pourrait conclure de là que l'on peut toujours disposer de ces paramètres pour satisfaire à ces conditions, et par conséquent qu'*il existe toujours une équation de la forme (3 bis) intégrable par les fonctions fuchsiennes seules et où les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sont donnés à l'avance.* Mais ici, nous ne pouvons nous contenter d'un pareil aperçu, et ce théorème, fort important, exigera une démonstration spéciale que je donnerai dans un Mémoire ultérieur [1].

---

[1] *Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. IV, p. 201-312 et plus loin). N. E. N.

Dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique, les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ ainsi que les coefficients de $P(x)$, sont réels.

Dans le cas plus particulier encore où $n = 2$, l'équation (3 *bis*) se ramène aisément à l'équation hypergéométrique de Gauss. De plus, nous avons

$$2n - 4 = 0,$$

de telle sorte que le nombre des conditions transcendantes dont il a été question plus haut est nul. Alors, pour que x soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut et il suffit que

$$P(0) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_1^2}\right),$$

$$P(1) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_2^2}\right),$$

et que le coefficient de x^2 dans $P(x)$

$$= -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_3^2}\right),$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ étant entiers.

Étudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes.

Soit $\Theta(z)$ une fonction thétafuchsienne jouissant de la propriété caractéristique

$$\Theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \Theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

Reprenons la fonction fuchsienne $f(z) = x$ et sa dérivée $f'(z)$, il est clair que la fonction

$$\frac{\Theta(z)}{[f'(z)]^m}$$

sera une fonction fuchsienne et par conséquent une fonction rationnelle de x. Nous avons donc pour l'expression générale des fonctions $\Theta(z)$:

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x),$$

F étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Parmi les fonctions thétafuchsiennes, nous avons vu qu'il y en avait de deux espèces : les unes devenant infinies, les autres ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

Quelle sera la forme générale de celles de la seconde espèce? L'expression (1) ne doit devenir infinie pour aucune valeur de x. Dans ce cas $F(x)$ ne pourra devenir infini que si $\frac{dx}{dz}$ devient nul, c'est-à-dire si x vient en l'un des points singuliers $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_n$.

Il suit de là que l'on doit avoir

$$\Theta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{\theta_p(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}}, \tag{2}$$

$\theta_p(x)$ désignant un polynome d'ordre p. Exprimons maintenant que $\Theta(z)$ ne devient infini ni pour $x = a_1$, ni pour $x = a_2$, ..., ni pour $x = a_n$, ni pour $x = \infty$; il viendra

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_i &< m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right), \\ p &< \sum \lambda_i - m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right). \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Ces $n+1$ inégalités sont compatibles.

Ces inégalités ne permettent pas de donner à p des valeurs aussi grandes que l'on veut, de sorte qu'il existera toujours un nombre q tel que l'on ait constamment $p < q$ et que les inégalités (3) permettent à p d'atteindre la limite $q-1$.

Supposons le nombre m donné; le nombre q sera alors déterminé, et il est clair qu'entre q fonctions thétafuchsiennes de la seconde espèce, il y aura toujours une relation linéaire identique.

Si l'on se rapporte à l'expression que nous avons donnée de ces transcendantes dans le paragraphe I, on verra qu'il y entre une fonction rationnelle $H(z)$ renfermant un nombre infini de paramètres arbitraires. Il suit de là qu'il y a une infinité de fonctions rationnelles H telles que la série thétafuchsienne correspondante soit identiquement nulle.

Il existe donc une infinité de relations identiques linéaires entre ces séries thétafuchsiennes. Nous les étudierons plus loin.

Revenons à l'expression (2). Jusqu'ici nous avons supposé que les nombres $m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ qui y entrent étaient entiers. S'ils ne l'étaient pas, la fonction définie par cette expression ne jouirait plus de la propriété fondamentale des fonctions thétafuchsiennes, mais elle pourrait rester uniforme. Pour cela il suffit que les nombres

$$m(\beta_i - 1) - \lambda_i\beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$m(\beta_{n+1} + 1) - \Sigma\lambda_i\beta_{n+1}$$

soient entiers.

Il est clair que les $n+1$ équations

$$\left\{ \begin{aligned} m(\beta_i - 1) - \lambda_i\beta_i &= \varepsilon_i, \\ m(\beta_{n+1} + 1) - \Sigma\lambda_i\beta_{n+1} &= \varepsilon_{n+1}, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

où les ε sont des nombres entiers donnés, fourniront toujours des valeurs pour les λ et pour m, car ce sont des équations linéaires dont le déterminant n'est pas nul.

Supposons donc que, dans les équations (4), on donne à tous les ε la valeur zéro excepté à ε_k auquel on donne la valeur 1. Portons ensuite dans l'expression (2) les valeurs de m et des λ tirées des équations (4) et remplaçons dans cette même expression θ_p par une constante. Nous aurons défini une fonction X_k qui est holomorphe dans tout le cercle fondamental, et qui n'a d'autres zéros que le point α_k et les points correspondants. Tous ces zéros sont d'ailleurs simples.

Ces fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$, dont le rôle est très important, ont été découvertes par M. Halphen dans le cas particulier de $n = 2$. On peut trouver entre elles et x certaines relations intéressantes. Considérons en effet les séries X_1 et X_{n+1}. Soient m_1 et m_{n+1} les valeurs correspondantes du nombre m. Ces valeurs seront fractionnaires.

Soit, en effet, Y une fonction uniforme quelconque susceptible d'être mise sous la forme

$$\text{(2 bis)} \qquad Y = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{M} \frac{K}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}},$$

K désignant un facteur numérique. Cette fonction n'a d'autres zéros ou infinis que les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ et leurs correspondants. Supposons que ces zéros soient respectivement d'ordre $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}$; il va sans dire que, si α_i par exemple était un infini, γ_i serait négatif. On aura

$$Y = K X_1^{\gamma_1} X_2^{\gamma_2} \ldots X_{n+1}^{\gamma_{n+1}},$$

K étant un facteur numérique. On aura, en particulier,

$$x = K_1 X_1^{\beta_1} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}},$$

et

$$x - a_i = K_i X_i^{\beta_i} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}},$$

les K étant toujours des facteurs numériques : d'où les relations identiques

$$K_1 X_1^{\beta_1} = K_i X_i^{\beta_i} + a_i X_{n+1}^{\beta_{n+1}}.$$

Nous avons exprimé les fonctions thétafuchsiennes de deux manières tout à fait différentes : soit par la série (5) (§ I), soit par la formule (1) de ce paragraphe.

Nous savons donc *a priori* qu'il existe une infinité d'identités de la forme

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x),$$

où H et F sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles.

Écrire effectivement ces identités et en particulier reconnaître dans quel cas la fonction F est identiquement nulle, tel est le problème dont il s'agit maintenant de donner une solution aussi complète que possible.

Mais, pour y arriver, il est nécessaire d'avoir recours à des considérations d'un ordre un peu différent.

Jusqu'ici nous avons toujours regardé le nombre m comme positif; supposons-le maintenant entier, mais négatif. Considérons en particulier la fonction suivante :

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{[f(z)-a_1]^{\mu_1}[f(z)-a_2]^{\mu_2}\ldots[f(z)-a_n]^{\mu_n}}{[f(z)-f(z_1)][f(z)-f(z_2)]\ldots[f(z)-f(z_p)]}.$$

Je suppose que h est un entier positif ainsi que les exposants $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ et que ces nombres entiers satisfont, ainsi que le nombre p des facteurs du dénominateur, aux inégalités suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu_i > h\left(1-\dfrac{1}{\beta_i}\right), \\ \sum \mu_i < h\left(1-\dfrac{1}{\beta_{n+1}}\right)+p. \end{cases}$$

D'après ces inégalités, la fonction $\Lambda(z)$ ne peut devenir infinie que si l'un des facteurs du dénominateur s'annule. Il en résulte que les infinis de cette fonction sont tous simples et qu'ils sont compris dans l'une des formules

$$(6)\qquad \frac{\alpha_i z_1+\beta_i}{\gamma_i z_1+\delta_i},\quad \frac{\alpha_i z_2+\beta_i}{\gamma_i z_2+\delta_i},\quad \ldots,\quad \frac{\alpha_i z_p+\beta_i}{\gamma_i z_p+\delta_i},$$

où

$$\left(z, \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$$

représente une des substitutions du groupe G.

Posons

$$\mathrm{F}(z) = [f(z)-a_1]^{\mu_1}[f(z)-a_2]^{\mu_2}\ldots[f(z)-a_n]^{\mu_n}$$

et

$$\frac{1}{[f(z)-f(z_1)][f(z)-f(z_2)]\ldots[f(z)-f(z_p)]} = \frac{\mathrm{A}_1}{f(z)-f(z_1)}+\frac{\mathrm{A}_2}{f(z)-f(z_2)}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_p}{f(z)-f(z_p)},$$

de telle sorte que

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_p = 0, \\ \mathrm{A}_1\, f(z_1) + \mathrm{A}_2\, f(z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p\, f(z_p) = 0, \\ \mathrm{A}_1\, f^2(z_1) + \mathrm{A}_2\, f^2(z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p\, f^2(z_p) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{A}_1 f^{p-2}(z_1) + \mathrm{A}_2 f^{p-2}(z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p f^{p-2}(z_p) = 0, \\ \mathrm{A}_1 f^{p-1}(z_1) + \mathrm{A}_2 f^{p-1}(z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p f^{p-1}(z_p) = 1. \end{cases}$$

Le résidu correspondant à l'infini

$$\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}$$

s'écrira

$$\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}.$$

Il en résulte que l'on aura identiquement

$$(8) \qquad \Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. Plus généralement, si $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle de z n'ayant pas d'infini intérieur au cercle fondamental, on aura

$$(9) \qquad \Lambda(z)\varphi(z) = \sum_0^{\infty}{}_i \sum_1^{p}{}_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z).$$

Je dis que, dans les formules (8) et (9), la fonction holomorphe $G(z)$ est identiquement nulle.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION.

Considérons un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon r; concentrique par conséquent au cercle fondamental.

Envisageons les différents polygones R_i qui sont, tout entièrement ou en partie, à l'intérieur de ce cercle.

L'ensemble de ces polygones formera une figure polygonale S ne dépendant que du rayon r du cercle C. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{\Lambda(z)\varphi(z)\,dz}{z - x}$$

prise le long du contour de cette figure S. Le théorème que j'ai énoncé pourra être regardé comme démontré si j'établis que cette intégrale tend vers 0 quand r tend vers 1, c'est-à-dire vers le rayon du cercle fondamental.

Pour cela je vais faire voir :

1° Que le périmètre de S reste fini, quel que soit r;

2° Que le module de la fonction sous le signe $\int$ reste plus petit qu'une certaine quantité M quand la variable reste sur le contour d'intégration;

3° Que M tend vers 0 quand r tend vers 1.

En vertu du lemme IV du paragraphe I, le nombre des polygones R_i qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle C est plus petit que

$$N = \frac{\pi}{\sqrt{\sigma}}\left(e^{2(R+\lambda)} + e^{-2(R+\lambda)} - 2\right),$$

σ et λ étant des quantités constantes et R étant défini par l'égalité

$$r = \frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1}.$$

Donc, *a fortiori*, le nombre des côtés de S sera plus petit que $2n$ N. Considérons l'un de ces côtés appartenant à un polygone R_i et soient l_i la longueur de ce côté, l_0 celle du côté correspondant de R_0; soit enfin $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ celle des substitutions de G qui correspond à R_i, on aura

$$l_i \leq l_0 H,$$

H étant la plus grande valeur que puisse prendre

$$\operatorname{mod} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

quand la variable z décrit le côté l_0.

Supposons que le polygone R_0 soit tout entier contenu dans un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon

$$\frac{e^{2A}-1}{e^{2A}+1}.$$

En vertu du lemme V du paragraphe I on aura

$$H < \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R} + e^{-2R} + 2}.$$

Soit L le plus grand côté de R_0. Le périmètre de S sera plus petit que

$$2n\,\mathrm{N.H.L}$$

ou *a fortiori* que

$$\frac{2n\pi L}{\sigma}\left(e^{2A} + e^{-2A} + 2\right)\frac{2\,e^{2(R+\lambda)}}{e^{2R}}.$$

Il sera donc fini. C. Q. F. D.

Nous devons évidemment supposer que x ne se trouve sur aucun des contours d'intégration. La fonction $\frac{\varphi(z)}{z-x}$ est alors une fonction rationnelle bien déterminée et ne devenant infinie pour aucune des valeurs de la variable situées sur les divers contours d'intégration. On peut donc aisément trouver une limite supérieure M_1 que son module ne peut dépasser.

Nous pourrons supposer aussi que la fonction $A(z)$ ne devient pas infinie le long du périmètre de R_0 et nous pourrons trouver une limite supérieure M_2 que son module ne peut dépasser quand z décrit le contour de R_0. Mais on aura identiquement

$$A\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right) = A(z)\frac{1}{(\gamma_i z+\delta_i)^{2h}}.$$

On en conclut que, quand z décrit le contour de S, le module de $A(z)$ est plus petit que

$$M_2 H^h,$$

et celui de la fonction sous le signe $\int$ plus petit que

$$M = M_1 M_2 H^h.$$

D'ailleurs, quand r tend vers 1, M tend vers 0, puisque M_1 et M_2 sont des constantes et que H tend vers 0.

Le théorème énoncé est donc démontré.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION.

Posons

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}\right)}{z-\dfrac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}}\,\frac{1}{(\gamma_i a+\delta_i)^{2(h+1)}};$$

Si, dans cette expression, on regarde z comme une constante, $\Phi(z, a)$ sera une fonction thétafuchsienne de a. Supposons d'abord que z et a soient tous deux intérieurs au cercle fondamental; cette fonction thétafuchsienne ne deviendra infinie que pour $a = z$ et pour les points correspondants, c'est-à-dire pour $f(a) = f(z)$. Le résidu correspondant à l'infini $z = a$ sera égal à $-\varphi(z)$. On aura donc

$$(10)\qquad \Phi(z, a) = \frac{[f'(a)]^{h+1}}{f(z)-f(a)}\,\frac{\theta_q[f(a)]}{F_1(a)}\,\frac{F_1(z)\varphi(z)}{\theta_q[f(z)][f'(z)]^h}.$$

Dans cette expression (10), $F_1(a)$ désigne le produit suivant :

$$[f(a)-a_1]^{\lambda_1}[f(a)-a_2]^{\lambda_2}\ldots[f(a)-a_n]^{\lambda_n},$$

$\theta_q[f(a)]$ désigne un polynome entier de degré q en $f(a)$ dont les coefficients peuvent être des fonctions de z.

Enfin les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et q doivent satisfaire aux inégalités (3)

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda_i < (h+1)\left(1-\dfrac{1}{\beta_i}\right), \\ q < \sum \lambda_i - (h+1)\left(1+\dfrac{1}{\beta_{n+1}}\right)+1. \end{cases}$$

On voit aisément en effet que telle doit être la forme de toute fonction thétafuchsienne de a n'admettant aucun infini distinct de l'infini $a = z$.

En comparant les inégalités (3) et (11), on trouve

$$\lambda_i \geq \mu_i, \qquad q < p.$$

Je me propose maintenant d'établir l'égalité (9) en montrant que $G(z)$ est identiquement nul, c'est-à-dire de démontrer l'identité

$$\varphi(z)\Lambda(z) = \sum_1^p {}_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k),$$

ou bien

$$\varphi(z)\Lambda(z) = \sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)} \frac{F(z_k)}{F_1(z_k)} \theta_q[f(z_k)] \frac{F_1(z)\varphi(z)}{\theta_q[f(z)][f'(z)]^h}.$$

Nous pouvons simplifier le second membre en supposant qu'on a

$$\lambda_i = \mu_i.$$

Si cela n'avait pas lieu, on multiplierait $F_1(a)$ et $\theta_q[f(a)]$ par

$$[f(a)-a_1]^{\mu_1-\lambda_1}[f(a)-a_2]^{\mu_2-\lambda_2}\ldots[f(a)-a_n]^{\mu_n-\lambda_n}.$$

Le degré du polynome $\theta_q[f(a)]$ serait alors augmenté, mais il resterait inférieur à p.

On peut donc toujours supposer

$$\lambda_i = \mu_i,$$

et, par conséquent,

$$F(z) = F_1(z),$$

tout en continuant à supposer

$$p > q.$$

L'identité à démontrer se simplifie alors et s'écrit

$$\sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)} \frac{F(z)\varphi(z)}{[f'(z)]^h} = \sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)} \frac{\theta_q[f(z_k)]}{\theta_q[f(z)]} \frac{F(z)\varphi(z)}{[f'(z)]^h}.$$

Si nous posons maintenant

$$\frac{\theta_q[f(z_k)]-\theta_q[f(z)]}{f(z)-f(z_k)} = P[f(z_k)],$$

P représentera un polynome en $f(z_k)$ dont le degré sera égal à $q-1$ et ne pourra, par conséquent, surpasser $p-2$. L'identité à démontrer se réduit alors à

$$\Sigma A_k P[f(z_k)] = 0,$$

et, sous cette forme, elle est évidente en vertu des relations (7). Le théorème énoncé est donc encore démontré.

Cette seconde démonstration nous conduit tout naturellement à un théorème important relatif aux fonctions thétafuchsiennes de seconde espèce. Soit

$$(12) \qquad \Sigma H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2(h+1)}$$

une série où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. On a vu que cette série représente une fonction thétafuchsienne sans infini et peut être égalée à une expression de la forme

$$(13) \qquad [f'(z)]^{h+1}\frac{\theta_{q-1}[f(z)]}{F(z)},$$

θ_{q-1} étant un polynome de degré $q-1$ en $f(z)$ et q étant le plus grand nombre entier satisfaisant aux inégalités (11).

Toute expression telle que (13) peut s'exprimer linéairement à l'aide de q d'entre elles; donc toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de q d'entre elles. Mais on peut faire deux hypothèses.

Ou bien toute expression telle que (13) peut être mise sous la forme (12) et alors toute expression telle que (12) ne peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles.

Ou bien il n'est pas possible de mettre toute expression (13) sous la forme (12), et alors toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles.

Cette deuxième hypothèse doit être rejetée.

Supposons-la, en effet, satisfaite et soient

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_{q-1}$$

les $q-1$ fonctions telles que (12), à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement.

Soient maintenant

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_q$$

q valeurs quelconques de z. On pourra toujours trouver q nombres

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_q$$

satisfaisant aux conditions

$$
\begin{aligned}
&A_1\Theta_1(z_1)+A_2\Theta_1(z_2)+\ldots+A_q\Theta_1(z_q)=0,\\
&A_1\Theta_2(z_1)+A_2\Theta_2(z_2)+\ldots+A_q\Theta_2(z_q)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1\Theta_{q-1}(z_1)+A_2\Theta_{q-1}(z_2)+\ldots+A_q\Theta_{q-1}(z_q)=0.
\end{aligned}
$$

On aura alors, quelle que soit la fonction H qui entre dans l'expression (12),

$$
(14)\qquad \sum_1^q{}_k \sum{}_i A_k H\left(\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right)(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2(h+1)}=0.
$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe G; on démontre aisément l'identité suivante en reprenant la fonction $\Phi(z, z_k)$ définie plus haut et y faisant $\varphi(z)=1$:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, z_k\right)-(\gamma z+\delta)^{-2h}\Phi(z, z_k)\\
&=\Sigma_i(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2h-2}\frac{\left\{\dfrac{(\gamma z+\delta)^{2h+1}-\left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right)+\delta\right]^{2h+1}}{z-\dfrac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}}\right\}}{(\gamma z+\delta)^{2h}\left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right)+\delta\right]^{2h+1}}\\
&=\Sigma_i(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2h-2}H\left(\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right),
\end{aligned}
$$

$H(z)$ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental.

Posons maintenant

$$A(z)=\Sigma_k A_k\Phi(z, z_k).$$

Des formules (14) et (15), nous déduisons

$$A\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)-(\gamma z+\delta)^{-2h}A(z)=0.$$

Comme cela a lieu quelle que soit la substitution $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ qu'on ait choisie dans le groupe G, il faudrait qu'on eût

$$A(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}F(x),$$

$F(x)$ étant rationnel en x.

Mais $A(z)$ n'aurait que q infinis distincts, $z_1, z_2, \ldots, z_q$. Or, il est aisé de voir qu'une fonction de la forme $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}F(x)$ doit toujours avoir plus de q infinis distincts.

Donc l'hypothèse faite au début est absurde.

Donc toute expression de la forme (15) peut toujours être mise sous la forme (12).

Donc toute fonction de la forme (1) peut toujours être exprimée par une série de la forme (5) (I, p. 182), pourvu que $m > 1$.

Comment maintenant, étant donnée une série de la forme (5) (I), pourrons-nous la mettre effectivement sous la forme (1)?

On donne une série $\Theta(z)$ de la forme (5) du paragraphe I, et il s'agit de la mettre sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x).$$

Nous connaissons d'abord les infinis de $\Theta(z)$ et les résidus correspondants; mais cela ne suffit pas pour déterminer complètement $F(x)$; il reste dans cette fonction rationnelle un certain nombre de coefficients indéterminés. On peut d'abord calculer un nombre suffisant de valeurs de la série $\Theta(z)$ pour avoir des équations qui permettent de déterminer ces coefficients. Il est plus simple d'opérer de la manière suivante. Considérons la fonction

$$\Theta(z)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m} = F(x).$$

Elle devient infinie, non seulement quand $\Theta(z)$ est infinie, mais quand $\frac{dx}{dz}$ est nul, c'est-à-dire pour

$$z = \alpha_1, \qquad z = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad z = \alpha_n.$$

On développera alors la série $\Theta(z)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m}$ suivant les puissances croissantes de $z - \alpha_i$ et l'on calculera les coefficients de toutes les puissances négatives. Quand ces coefficients seront connus, ainsi que les premiers coefficients du développement de x suivant les puissances de $z - \alpha_i$, la fonction $F(x)$ sera aussi connue.

Mais pour trouver ces coefficients eux-mêmes, il faut calculer un certain nombre de valeurs de la série $\Theta(z)$ et de séries analogues. Il est pourtant des cas où cette difficulté peut être évitée.

Reprenons la fonction

$$X(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^h \frac{F(z)}{[f(z)-f(z_1)][f(z)-f(z_2)]\ldots[f(z)-f(z_p)]},$$

que nous avons étudiée plus haut ; nous avons démontré l'identité suivante :

$$(8)\qquad \Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k\,\mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}.$$

Différentions cette identité $2h+1$ fois par rapport à z ; il viendra

$$(16)\qquad \frac{1}{(2h+1)!}\frac{d^{2h+1}\Lambda}{dz^{2h+1}} = -\sum_i \sum_k \frac{A_k\,\mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)^{2(h+1)}};$$

le second membre peut s'écrire

$$-\sum_i \sum_k \frac{A_k\,\mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z - \alpha_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \dfrac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)^{2(h+1)}}.$$

Remarquons que, si, dans le groupe G, nous avons la substitution $\left(z, \dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$, nous aurons également la substitution inverse $\left(z, \dfrac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)$. C'est-à-dire que l'expression précédente peut s'écrire

$$-\sum_i \sum_k \frac{A_k\,\mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}.$$

Le second membre de l'identité (16) est donc une série de la forme (5) (I, p. 182); il reste à mettre le premier membre sous la forme (1). C'est là un calcul qui ne présente pas de difficultés. J'en indique le résultat dans le cas de $h=1$ et dans celui de $h=2$. Soit

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \Lambda_0(x),$$

et soient $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ les dérivées successives de Λ_0 par rapport à x. Reprenons maintenant l'équation

$$(3\ bis)\qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x),$$

et soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ les dérivées successives de φ par rapport à x. On aura, dans le cas de $h=1$,

$$(17)\qquad \frac{d^3\Lambda}{dz^3} = (\Lambda_3 - 2\Lambda_0\varphi_1 - 4\Lambda_1\varphi)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2,$$

et, dans le cas de $h=2$,

$$(18)\qquad \frac{d^5\Lambda}{dz^5} = (\Lambda_5 - 20\Lambda_3\varphi - 30\Lambda_2\varphi_1 - 18\Lambda_1\varphi_2 - 4\Lambda_0\varphi_3 + 64\Lambda_1\varphi^2 + 64\Lambda_0\varphi\varphi_1)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

On peut trouver une infinité de relations analogues à la relation (16) par divers procédés; par exemple en différentiant cette relation par rapport aux divers paramètres $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Je vais maintenant poser un dernier problème que je ne résoudrai que partiellement.

Considérons la série (5) (§ I),

$$\Sigma \, \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m};$$

elle dépend de la fonction rationnelle H et je la représenterai pour cette raison par la notation

$$\Theta[z, \mathrm{H}].$$

Comment faut-il choisir la fonction rationnelle H *pour que* Θ *soit identiquement nul?*

La solution complète de ce problème serait sans doute très compliquée; mais on peut s'aider, dans chaque cas particulier, des considérations suivantes :

1° Si l'on a identiquement

$$\Theta(z, \mathrm{H}_1) = \Theta(z, \mathrm{H}_2) = 0,$$

on aura également

$$\Theta(z, \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2) = 0.$$

2° Si la fonction rationnelle H peut se développer en une série convergente de la forme suivante :

$$(\mathrm{S}) \qquad k_1 \mathrm{H}_1 + k_2 \mathrm{H}_2 + \ldots + k_n \mathrm{H}_n + \ldots,$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont des coefficients constants et où $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_n$ sont des fonctions rationnelles telles que

$$\Theta(z, \mathrm{H}_n) = 0,$$

et si la série (S) est convergente toutes les fois que z est intérieur au cercle fondamental, on aura identiquement

$$\Theta(z, \mathrm{H}) = 0.$$

3° Si l'on a identiquement

$$\Theta(z, \mathrm{H}) = 0.$$

et si, $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ désignant une des substitutions de G, on pose

$$\mathrm{H}_1(z) = \mathrm{H}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m},$$

on aura identiquement

$$\Theta(z, \mathrm{H}_1) = 0.$$

En effet, posons pour abréger

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z), \qquad \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = f_1(z), \qquad \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha} = f_1^{-1}(z),$$

la série (5) pourra se mettre sous la forme

$$\Theta(z, \mathrm{H}) = \Sigma\, \mathrm{H}\big[f_1[f_i[f_1^{-1}(z)]]\big]\left[\frac{df_1[f_i[f_1^{-1}(z)]]}{dz}\right]^m.$$

Remplaçons maintenant z par $f_1(z)$ dans l'équation identique

$$\Theta(z, \mathrm{H}) = 0,$$

il viendra

$$0 = \Sigma\, \mathrm{H}\big[f_1[f_i(z)]\big]\left[\frac{df_1[f_i(z)]}{df_i(z)}\right]^m\left[\frac{df_i}{dz}\right]^m\left[\frac{dz}{df_1(z)}\right]^m = \Theta(z, \mathrm{H}_1)\left[\frac{dz}{df_1(z)}\right]^m,$$

ce qui démontre l'identité annoncée.

4° Soit, pour reprendre les notations employées au début de ce paragraphe, α_r l'un des sommets du polygone R_0, α'_r son symétrique par rapport au cercle fondamental. Une des substitutions de G s'écrira

$$\left(\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r},\ e^{\frac{2i\pi}{\beta_r}}\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r}\right),$$

β_r étant un nombre entier connu. Si nous posons

$$\mathrm{H}(z) = \left(\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r}\right)^p \frac{1}{(z-\alpha'_r)^{2m}},$$

on aura identiquement

$$\Theta(z, \mathrm{H}) = 0,$$

à moins que

$$p - m \equiv 0 \pmod{\beta_r}.$$

En effet, considérons les diverses substitutions (z, f_i) du groupe G, on peut en choisir une infinité

$$(z, \varphi_0),\quad (z, \varphi_1),\quad (z, \varphi_2),\quad \ldots,\quad (z, \varphi_n),\quad \ldots,$$

et de telle sorte que chacune des fonctions $f_i(z)$ puisse être définie, d'une manière et d'une seule, par une relation de la forme suivante :

$$\frac{f_i - \alpha_r}{f_i - \alpha'_r} = e^{\frac{2hi\pi}{\beta_r}}\frac{\varphi_k - \alpha_r}{\varphi_k - \alpha'_r},$$

h étant un entier égal ou inférieur à β_r. On aura alors

$$\Theta(z, \mathrm{H}) = \sum_i \frac{(f_i - \alpha_r)^p}{(f_i - \alpha'_r)^{p+2m}}\left(\frac{df_i}{dz}\right)^m$$

ou

$$\Theta(z, \mathrm{H}) = \sum_{0}^{\infty}{}_k \sum_{1}^{\beta_r}{}_h \frac{(\varphi_k - \alpha_r)^p}{(\varphi_k - \alpha_r)^{p+2m}} \left(\frac{d\varphi_k}{dz}\right)^m e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}}.$$

Or, si l'on n'a pas

$$p + m \equiv 0 \pmod{\beta_r},$$

on aura

$$\sum_{1}^{\beta_r}{}_h e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}} = 0.$$

On aura donc

$$\Theta(z, \mathrm{H}) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5° Reprenons l'identité

$$(9) \qquad \varphi(z)\mathrm{X}(z) = \sum_k \frac{\mathrm{A}_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k)$$

où

$$\Phi(z, z_k) = \sum_i \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}}.$$

Faisons-y successivement

$$\varphi(z) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(z) = \frac{1}{z - b},$$

b étant une quantité constante extérieure au cercle fondamental, nous obtiendrons deux identités de la forme (9).

Multiplions la première par $\dfrac{1}{z - b}$ et retranchons-en la seconde : il viendra

$$(19) \qquad \sum_k \frac{\mathrm{A}_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Psi(b, z_k) = 0,$$

en posant

$$\Psi(b, a) = \sum_i \frac{1}{b - \dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+1}}.$$

Posons encore

$$\Theta(b, a) = \frac{d^{2h+1}\Psi}{db^{2h+1}} \frac{1}{(2h+1)!},$$

il viendra, en différentiant $2h + 1$ fois la relation (19) par rapport à b,

$$(20) \qquad \sum_k \frac{\mathrm{A}_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Theta(b, z_k) = 0.$$

Or, $\Theta(b, z_k)$ est une fonction thêtafuchsienne de b. Le premier membre de l'identité (20) est donc une série de la forme (5) (§ I). Nous obtenons donc ainsi une série de cette forme qui est identiquement nulle quand b, qui est ici la variable indépendante, reste *extérieure* au cercle fondamental.

Mais ce que nous cherchons, c'est une série de la forme (5) (§ I) qui reste identiquement nulle quand la variable indépendante reste *intérieure* au cercle fondamental. Heureusement il est facile de passer d'un cas à l'autre. Posons en effet

$$h = \frac{1}{z}.$$

On aura

$$\frac{\alpha_i h + \beta_i}{\gamma_i h + \delta_i} = \frac{1}{\dfrac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}},$$

$\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$ désignant les quantités imaginaires conjuguées de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$; de sorte que les substitutions $\left(z, \dfrac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)$ forment un groupe G' conjugué de G.

De même, en posant

$$h_i = \frac{\alpha_i h + \beta_i}{\gamma_i h + \delta_i}, \qquad z_i = \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i},$$

on aura

$$\frac{dh_i}{dh} = \frac{z^2}{z_i^2}\frac{dz_i}{dz}.$$

Nous aurons donc

$$\Theta(h, a) = \sum_i \frac{1}{(h_i - a)^{2h+2}}\left(\frac{dh_i}{dh}\right)^{h+1} = \sum_i \frac{z^{2h+2}}{(1 - a z_i)^{2h+2}}\left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1}$$

ou enfin

$$\Theta(h, a) = z^{2h+2}\Theta'(z, a),$$

en posant

$$\Theta'(z, a) = \sum_i \frac{1}{(1 - a z_i)^{2h+2}}\left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1}.$$

Nous arrivons à l'identité suivante :

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\Theta'(z, z_k) = 0.$$

Les fonctions Θ' sont des fonctions thétafuchsiennes de z, de sorte que nous avons bien une identité de la forme cherchée. Mais le groupe des fonctions Θ' n'est pas le groupe G, mais le groupe conjugué G'. Passons donc du groupe G' au groupe G en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; il viendra

$$\sum_k \left\{\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right\}' \Theta_1(z, z'_k) = 0.$$

Dans cette formule, $\left\{\dfrac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right\}'$ et z'_k désignent les quantités imaginaires conjuguées de $\dfrac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}$ et de z_k et l'on a posé

$$\Theta'_1(z, a) = \sum \frac{1}{\left(1 - a\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2h+2}} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h+2}};$$

de sorte que, si nous posons

$$H(z) = \sum_k \left(\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right)' \frac{1}{(1 - z'_k z)^{2h+2}},$$

nous aurons identiquement

$$\Theta(z, H) = 0,$$

tant que z restera intérieur au cercle fondamental.

6° Supposons qu'on ait identiquement

$$\Theta(z, H) = 0,$$

et que H dépende d'un paramètre arbitraire λ; on aura également

$$\Theta\left(z, \frac{dH}{d\lambda}\right) = 0.$$

En combinant de diverses manières les six principes qui précèdent, on obtiendra une infinité de relations de la forme

$$\Theta(z, H) = 0.$$

VI. — Première famille; genre quelconque.

Nous nous sommes étendus sur les fonctions de la première famille et du genre zéro, parce qu'elles sont les plus simples de toutes et parce que les principes généraux, une fois démontrés dans ce cas particulier, s'étendent sans trop de peine aux fonctions de toutes les familles et de tous les genres. Nous insisterons moins sur les autres fonctions fuchsiennes et nous nous bornerons à faire connaître les particularités les plus remarquables qui les concernent.

Lorsque le polygone R_0, tout en restant de la première famille, n'est pas de la forme simple étudiée dans le paragraphe précédent, ou n'est pas susceptible d'y être ramené, les fonctions fuchsiennes correspondantes sont de la première famille et de genre plus grand que zéro.

Commençons par un exemple simple. Soit un polygone R_0 de $4n$ côtés et tel que les côtés opposés soient conjugués. Tous les sommets forment alors un seul cycle, de sorte que la somme de tous les angles du polygone R_0 est une partie aliquote de 2π. Supposons d'abord qu'elle soit précisément égale à 2π. On pourra alors exprimer toutes les fonctions fuchsiennes dérivées du polygone R_0 à l'aide de deux d'entre elles que nous appellerons x et y, et entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$(1) \qquad \psi(x, y) = 0,$$

qui est de genre n.

Reprenons l'équation (3) du paragraphe IV. Elle s'écrit

$$(3) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y),$$

et l'on a identiquement

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\frac{x'''x'}{(x')^4} - \frac{3}{4}\frac{(x'')^2}{(x')^4},$$

en désignant par x', x'', x''' les dérivées successives de x par rapport à z.

Quelle est la forme de la fonction $\varphi(x, y)$? Pour simplifier, je vais supposer que la fonction y de x définie par l'équation (1) ne présente que des points singuliers de la nature la plus simple ; c'est-à-dire que toutes les fois qu'on a

$$\frac{d\psi}{dy} = 0,$$

on a ou bien

$$\frac{d\psi}{dx} \gtrless 0, \qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0$$

[ce qui correspond, pour la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$, à une tangente parallèle à l'axe des y et n'ayant avec la courbe qu'un contact du premier ordre], ou bien

$$\frac{d\psi}{dx} = 0, \qquad \left(\frac{d^2\psi}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dy^2} > 0, \qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0$$

[ce qui correspond pour la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$ à un point double ordinaire].

Nous supposerons en outre que, si l'équation (1) est d'ordre r, on a, pour x infini, r valeurs finies et distinctes du rapport $\frac{y}{x}$ [ce qui correspond pour la courbe $\psi(x, y) = 0$ à r directions asymptotiques distinctes].

Ces hypothèses ne restreignent pas la généralité ; en effet, on peut, parmi les fonctions fuchsiennes correspondant au groupe G, choisir d'une infinité de manières les fonctions x et y de telle sorte que toutes les autres s'expriment rationnellement en x et y, et ce choix peut toujours se faire de façon à satisfaire aux hypothèses précédentes.

Reprenons maintenant notre fonction $\varphi(x, y)$. Il est clair que, pour les valeurs infinies de x, elle reste finie ; qu'elle est finie également toutes les fois que x' n'est pas nul. Or, x' ne peut s'annuler que si l'on a à la fois

$$\frac{d\psi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ sont donc les points singuliers de l'équation (1) en n'y comprenant que les points singuliers ordinaires et non les points doubles de la courbe (1).

Considérons l'un de ces infinis, et soient α, β, γ les valeurs correspondantes de x, de y et de z. On voit aisément que le développement de $x - \alpha$ commence par un terme en $(z - \gamma)^2$, celui de $y - \beta$ par un terme en $z - \gamma$ et l'on en conclut qu'on a

$$\lim (y - \beta)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x = \alpha,\ y = \beta).$$

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer complètement la fonction $\varphi(x, y)$. Celle-ci est assujettie en outre à un certain nombre de conditions transcendantes dont l'étude approfondie fera l'objet d'un Mémoire ultérieur. Nous démontrerons de plus, dans un autre Mémoire, que si ces conditions ne sont pas remplies, mais si les coefficients de $\varphi(x, y)$ satisfont à certaines inégalités, x n'est plus, il est vrai, fonction fuchsienne de z, mais en est encore fonction uniforme (kleinéenne).

De combien de paramètres distincts dépend notre groupe G ?

Pour définir un polygone de $4n$ côtés, il faut $8n - 3$ conditions ; mais notre polygone R_0 n'est pas arbitraire. Il est assujetti à $2n + 1$ conditions, à savoir que les côtés opposés soient congruents et que la somme des angles soit égale à 2π. Il reste donc $6n - 4$ paramètres arbitraires. Mais on a vu, au paragraphe IX du Mémoire sur les groupes fuchsiens, qu'un même groupe G pouvait être considéré comme dérivé d'une infinité de polygones différents et, en effet, dans le cas qui nous occupe, on peut remplacer le polygone R_0 par un autre R'_0 ayant ses côtés en même nombre et disposés de la même manière, mais ayant pour sommet un point quelconque du plan ; de sorte qu'à un même groupe G correspond une double infinité de polygones R_0 et que le nombre des paramètres de G est de deux unités inférieur à celui des paramètres de R_0. *Le groupe G dépend donc de $6n-6$ paramètres.*

De combien de paramètres dépend la relation (1)? Bien entendu, je ne considère pas comme distinctes deux relations

$$\psi(x,y)=0, \qquad \psi_1(\xi,\eta)=0,$$

si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation uniforme, c'est-à-dire en remplaçant ξ et η par des fonctions rationnelles de x et de y. La théorie des fonctions abéliennes nous apprend que ces paramètres sont, pour une relation du genre n, au nombre de $3n-3$. Mais il s'agit de $3n-3$ paramètres *complexes* qui correspondent à $6n-6$ paramètres *réels*; c'est-à-dire que le nombre des paramètres dont dépend la relation (1) est précisément le même que celui des paramètres du groupe G. S'ensuit-il qu'on puisse disposer des paramètres du groupe G de telle sorte qu'on ait entre x et y telle relation algébrique que l'on veut? C'est ce que nous démontrerons dans un Mémoire ultérieur.

Dans le cas particulier de $n=1$, nous n'avons plus affaire à des fonctions fuchsiennes proprement dites. En effet, dans les polygones curvilignes R_0, dont tous les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental, la somme des angles est toujours plus petite que celle d'un polygone rectiligne d'un même nombre de côtés. Pour un quadrilatère, la somme des angles devrait être plus petite que 2π. Mais ici nous avons supposé que la somme des angles de notre polygone curviligne de $4n$ côtés était précisément 2π. Si l'on veut faire $n=1$, le polygone R_0 devra devenir rectiligne, le rayon du cercle fondamental deviendra infini et le quadrilatère R_0 se réduira à un simple parallélogramme rectiligne; le groupe G se réduira alors à des substitutions de la forme $(z, z+\alpha)$ et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent se réduiront à des fonctions doublement périodiques. C'est dans ce sens qu'on peut dire que les fonctions elliptiques sont des cas particuliers des fonctions fuchsiennes.

Supposons donc $n>1$. Le polygone R_0 peut présenter différentes sortes de symétrie. Il peut d'abord être symétrique par rapport à un cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental; dans ce cas, les coefficients des fonctions $\psi(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ sont réels. Supposons maintenant qu'il soit symétrique par rapport à un point, ou qu'il puisse être ramené, soit par un changement convenable de la variable z, soit par l'application de la règle du paragraphe IX du Mémoire sur les groupes fuchsiens, à être symétrique par rapport à un point : dans ce cas, la relation (1) se ramène à la relation hyperelliptique

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_{2n}).$$

Mais la réciproque n'est pas vraie.

Considérons maintenant une intégrale abélienne de première espèce

$$\int g(x, y)\,dx, \tag{4}$$

et remplaçons x et y par leurs valeurs en z ; il viendra

$$\int g(x, y)\,dx = \int g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = G(z),$$

$g(z)$ désignant une fonction fuchsienne de z et $G(z)$ une fonction uniforme de z, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental et cessant d'exister à l'extérieur de ce cercle.

Soit $\left(z, \dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ une des substitutions du groupe fuchsien ; on aura identiquement

$$G\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = G(z) + K_i,$$

K_i étant l'une des périodes de l'intégrale abélienne. Ainsi, à chaque substitution de notre groupe correspond une des périodes de l'intégrale (4).

Mais on peut se placer à un autre point de vue. Soit ab un des côtés du polygone R_0 ; on aura

$$\int_a^b g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = G(b) - G(a),$$

$G(b) - G(a)$ sera alors une des périodes de l'intégrale (4), de sorte qu'à chaque côté de R_0 correspond une de ces périodes.

Si cd est le côté conjugué de ab, on aura évidemment

$$G(b) - G(a) = G(c) - G(d).$$

Il en résulte qu'à deux côtés conjugués correspond la même période prise en sens contraire et qu'aux $2n$ paires de côtés conjugués de notre polygone correspondra un système fondamental de $2n$ périodes de l'intégrale (4). Mais ces périodes ne seront pas les périodes normales.

Mais, parmi les polygones équivalents à R_0, en vertu de la règle du paragraphe IX du Mémoire sur les groupes fuchsiens, il en est un qui présente à cet égard une particularité remarquable. Considérons un polygone R_0 de $4n$ côtés dont les sommets soient, en suivant le périmètre, dans le sens positif :

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n.$$

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment ce dernier sommet par les lettres d_n et d_0. Je suppose que le côté $d_{i-1}a_i$ soit conjugué de $c_i b_i$ et que le côté $a_i b_i$ soit conjugué de $d_i c_i$. En d'autres termes, le côté de rang $4p+1$ est conjugué du côté de rang $4p+3$, et le côté de rang $4p+2$ conjugué du côté de rang $4p+4$. On voit sans peine que tous les sommets d'un pareil polygone appartiennent à un même cycle et que le polygone R'_0 appartient au genre n. Je suppose, de plus, que la somme des angles soit égale à 2π; on voit alors facilement qu'il peut être ramené à un polygone tel que R_0 par l'application de la règle du paragraphe IX.

Envisageons maintenant deux intégrales abéliennes de première espèce,

$$\int g(x, y)\,dx = \int g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = G(z), \tag{4}$$

$$\int g_1(x, y)\,dx = \int g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz = G_1(z). \tag{5}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\int_{d_{i-1}}^{a_i} g(z)\frac{dx}{dz}\,dz &= -\int_{b_i}^{c_i} g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = G(a_i) - G(d_{i-1}) = A_i,\\
\int_{a_i}^{b_i} g(z)\frac{dx}{dz}\,dz &= -\int_{c_i}^{d_i} g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = G(b_i) - G(a_i) \quad = B_i,\\
\int_{d_{i-1}}^{a_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz &= -\int_{b_i}^{c_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz = G_1(a_i) - G_1(d_{i-1}) = A'_i,\\
\int_{a_i}^{b_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz &= -\int_{c_i}^{d_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz = G_1(b_i) - G_1(a_i) \quad = B'_i.
\end{aligned}$$

Les périodes A_i, B_i, A'_i, B'_i des intégrales (4) et (5) correspondront ainsi aux divers côtés du polygone R'_0.

Si, maintenant, nous prenons l'intégrale

$$\int G_1(z)\,g(z)\frac{dx}{dz}\,dz$$

le long du périmètre de R_0, cette intégrale doit être nulle, et, en développant l'intégrale, on trouve sans peine l'identité bien connue

$$\sum_i (A_i B'_i - B_i A'_i) = 0,$$

ce qui prouve que les périodes A_i, B_i, ... sont les périodes normales, Je n'insiste pas sur ces considérations qui montrent quel parti on pourra tirer des fonctions fuchsiennes pour l'étude des intégrales abéliennes.

Je suppose maintenant que la somme des angles de R_0 soit, non plus 2π, mais $\frac{2\pi}{\beta}$, β étant un entier.

Voyons quel changement cette hypothèse apportera dans ce qui précède. La relation (1) sera toujours de genre n. La fonction $\varphi(x, y)$ jouira des mêmes propriétés que dans le cas précédent, avec cette seule différence qu'elle deviendra infinie pour $x = a$, $y = b$; c'est-à-dire pour les valeurs de x et de y qui correspondent aux sommets du polygone R_0.

On aura alors

$$\lim (x-a)^2 \varphi(x, y) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \qquad (\text{pour } x = a,\ y = b).$$

Les points singuliers de l'équation (3) sont alors ceux de la relation (1) et le point a, b.

Considérons maintenant un polygone R_0 de la première famille, mais d'ailleurs tout à fait quelconque; soit $2n$ le nombre des côtés et p le nombre des cycles. Supposons que, si l'on calcule la somme des angles appartenant aux différents cycles, on trouve respectivement $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \dots, \frac{2\pi}{\beta_p}$, pour le premier, le second, etc., et le $p^{\text{ième}}$ de ces cycles. Les fonctions fuchsiennes dérivées de ce polygone R_0 s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, que j'appellerai x et y et entre lesquelles il y aura une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

de genre

$$P = \frac{n - p + 1}{2}.$$

Soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_p, b_p) les valeurs que prennent x et y quand la variable z vient en l'un des sommets du premier, du second, etc., ou du $p^{\text{ème}}$ cycle.

J'appelle (c_i, d_i) les points analytiques pour lesquels on a

$$\frac{d\psi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

J'appelle (e_i, f_i) les points analytiques pour lesquels on a

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} = 0.$$

Je conserve d'ailleurs, pour la fonction $\psi(x, y)$, que je suppose d'ordre r, les hypothèses faites plus haut. Le nombre des points c_i, d_i est alors

$$r(r-1)+2\mathrm{P}-(r-1)(r-2)=2r+2\mathrm{P}-2,$$

et celui des points e_i, f_i est

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2}-\mathrm{P}.$$

L'équation (3) s'écrira

$$\frac{d^2 v}{dx^2}=v\,\varphi(x, y).$$

La fonction $\varphi(x, y)$, rationnelle en x et en y, devient infinie :

1° Pour $x=c_i$, $y=d_i$; on a alors

$$\lim (y-d_i)^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y)=-\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x=c_i,\ y=d_i).$$

2° Pour $x=a_i$, $y=b_i$; on a alors

$$\lim (x-a_i)^2 \varphi(x, y)=\frac{1-\beta_i^2}{4\beta_i^2} \qquad (\text{pour } x=a_i,\ y=b_i).$$

Les conditions auxquelles on doit assujettir le groupe G pour que l'on ait entre x et y une relation (1) donnée et pour que les quantités (a_i, b_i) et les nombres entiers β_i aient des valeurs données sont au nombre de $6\mathrm{P}-6+2p$. Le nombre des paramètres dont dépend le groupe G est aussi de $6\mathrm{P}-6+2p$. Il ne s'ensuit pas immédiatement que l'on puisse disposer de ces $6\mathrm{P}-6+2p$ paramètres de façon à satisfaire à ces $6\mathrm{P}-6+2p$ conditions. Mais je démontrerai, dans un Mémoire ultérieur, qu'il en est effectivement ainsi, et qu'il existe *toujours* deux fonctions fuchsiennes x et y qui correspondent à un même groupe G, entre lesquelles il y a une relation algébrique *donnée*

$$\psi(x, y)=0,$$

et qui, pour p systèmes *donnés* de valeurs $(x=a_1, y=b_1)$, $(x=a_2, y=b_2)$, …, $(x=a_p, y=b_p)$, voient leurs dérivées des β_1-1, β_2-1, …, β_p-1 premiers ordres s'annuler (β_1, β_2, …, β_p étant des nombres entiers *donnés*).

Etudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes. Leur forme générale sera

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{F}(x, y), \tag{6}$$

F désignant une fonction rationnelle de x et de y.

Quelles sont les conditions pour que cette fonction thétafuchsienne soit de seconde espèce, c'est-à-dire reste holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. La fonction $F(x, y)$ pourra toujours s'écrire :

$$\frac{P(x, y)}{\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^m (x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\cdots(x-a_p)^{\lambda_p}},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ étant les plus grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités

$$\lambda_i \quad m\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right).$$

On reconnaîtra ensuite aisément quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction (6) soit de seconde espèce :

1° La fonction rationnelle $P(x, y)$ devra se réduire à un polynome entier.

2° Les $p(r-1)$ points d'intersection de la courbe $\psi(x, y) = 0$, avec les droites $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_p$ [en exceptant les points singuliers $(x = a_1, y = b_1)$, $(x = a_2, y = b_2)$, ..., $(x = a_p, y = b_p)$] devront appartenir à la courbe $P(x, y) = 0$; cette dernière devra avoir un contact d'ordre $\lambda_i - 1$ avec la courbe $\psi(x, y) = 0$, aux points où cette courbe rencontre la droite $x = a_i$ (en exceptant toujours le point singulier $x = a_i$, $y = b_i$).

Cela équivaut, pour le polynome $P(x, y)$, à

$$(r-1)(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p) = (r-1)\sum\lambda_i$$

conditions.

3° Le degré du polynome $P(x, y)$ devra être au plus égal à

$$\sum\lambda_i + m(r-3).$$

4° Considérons maintenant les points $x = e_i$, $y = f_i$, c'est-à-dire les points doubles de la courbe $\psi(x, y) = 0$; ils devront appartenir à la courbe $P(x, y) = 0$, et même (puisque $m > 1$) être pour cette courbe un point double. Enfin, les deux branches de la courbe $P = 0$ devront avoir respectivement, avec les deux branches de la courbe $\psi = 0$, un contact d'ordre $m - 2$. Cela équivaut, pour le polynome $P(x, y)$, à $2m - 1$ conditions pour chacun des points doubles $x = e_i$, $y = f_i$, c'est-à-dire, en tout, à

$$(2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - p\right]$$

conditions.

Un polynome de degré $\sum\lambda + m(r-3)$ dépend de

$$\frac{1}{2}\left[\sum\lambda + m(r-3)+1\right]\left[\sum\lambda + m(r-3)+2\right]$$

paramètres. Mais, si l'on tient compte de la relation (1) et si l'on a

$$(7) \qquad \sum \lambda + m(r-3) \geqq r,$$

ce nombre se réduit à

$$r\sum \lambda + \left(m - \frac{1}{2}\right) r(r-3).$$

Mais notre polynome est assujetti, d'une part, à $(r-1)\sum\lambda$, d'autre part, à $(2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - \mathrm{P}\right]$ conditions. Il reste donc, dans ce polynome,

$$(8) \qquad \sum \lambda + (2m-1)(\mathrm{P}-1)$$

paramètres arbitraires. Mais ce n'est là qu'une limite inférieure du nombre des paramètres arbitraires restant réellement dans notre polynome. Car il peut se faire :

1° Que la condition (7) ne soit pas remplie. Alors, l'expression du nombre des paramètres arbitraires restant dans notre polynome n'est plus

$$\sum \lambda + (2m-1)(\mathrm{P}-1)$$

mais

$$\frac{1}{2}\left[\sum \lambda + m(r-3) + 1\right]\left[\sum \lambda + m(r-3) + 2\right] - (r-1)\sum\lambda - (2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - \mathrm{P}\right].$$

Cette seconde expression diffère de la première de

$$\frac{1}{2}\left[\sum \lambda + m(r-3) - r + 1\right]\left[\sum \lambda + m(r-3) - r + 2\right].$$

Il en résulte que les deux expressions ne diffèrent pas si l'on a

$$\sum \lambda + m(r-3) - r = -1 \text{ ou } -2.$$

L'expression (8) ne cesse, par conséquent, de représenter le nombre des paramètres restés arbitraires que si l'on a

$$\sum \lambda - (m-1)r - 3m < -2.$$

Or, cette inégalité, jointe à $m \geqq 2$, $r \geqq 3$, entraine les égalités suivantes :

$$r = 3, \qquad \sum \lambda = 0.$$

Mais ce cas, où l'on a $r = 3$, $P = 1$, $\sum \lambda = 0$, et où, par conséquent, tous les λ sont nuls, est précisément celui des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à nous occuper.

2° On peut se demander aussi si les

$$(r-1)\sum \lambda + (2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right]$$

conditions auxquelles nous avons assujetti notre polynome sont toutes distinctes. Voici comment on peut tourner la difficulté. Soit N le nombre des zéros distincts de l'expression (6); le nombre $N + 1$ sera évidemment une limite supérieure du nombre des paramètres restés arbitraires dans cette expression. Mais cette limite peut encore être abaissée. En effet, l'expression (6) s'annule quand la variable z vient en l'un des sommets de R_0; ce sont là des zéros qui ne sont pas arbitraires. Si donc N' est le nombre des zéros réellement distincts qui coïncident avec les sommets de R_0, nous devons prendre pour notre limite supérieure $N - N' + 1$. Ce n'est pas tout. Si l'on considère une expression rationnelle en x et y, admettant q zéros et q infinis, la théorie des intégrales abéliennes nous apprend qu'on ne peut pas choisir arbitrairement les q zéros et les q infinis, mais que la connaissance des q infinis et de $q - P$ des zéros suffit pour déterminer les P derniers zéros. Or, les $N - N'$ zéros qui restent de notre expression (6) sont ceux de la fonction rationnelle

$$\frac{P(x, y)}{[F'(y)]^m (x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\cdots(x-a_p)^{\lambda_p}}$$

dont nous connaissons les infinis. Il en résulte que $N - N' - P$ d'entre eux suffisent pour déterminer tous les autres et que nous devons prendre finalement pour notre limite supérieure $N - N' - P + 1$.

Or, les principes du paragraphe III nous donnent

$$N = m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_i}\right),$$

$$N' = \sum \frac{m(\beta_i - 1) - \lambda_i \beta_i}{\beta_i} = mp - m\sum \frac{1}{\beta_i} - \sum \lambda,$$

$$N - N' - P + 1 = \sum \lambda + (2m-1)(P-1),$$

c'est-à-dire que notre limite supérieure coïncide avec la limite inférieure trouvée plus haut. Il y aurait exception dans le cas $\sum \lambda = 0$, $P = 1$, c'est-à-dire dans le cas des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à parler.

Il résulte de là que toutes les fonctions thétafuchsiennes de la seconde espèce [aussi bien celles qui peuvent s'exprimer par une série de la forme (5) (§ I), que celles qui ne peuvent s'exprimer par une pareille série] peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum \lambda + (2m-1)(P-1)$ d'entre elles.

Considérons maintenant une fonction de la forme

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y),$$

F désignant une fonction rationnelle en x et en y, et cherchons quel est le minimum du nombre des infinis distincts d'une pareille expression.

Nous supposerons que les sommets de R_0 ne sont pas des infinis de notre fonction $\Lambda(z)$. Pour que le nombre des infinis soit minimum, il faut que celui des zéros le soit aussi; il faut, par conséquent, que les sommets de R_0 soient des zéros d'un ordre aussi peu élevé que possible et qu'en dehors de ces sommets, il y ait aussi peu de zéros que possible. Pour réaliser cela, posons, ce qui est toujours possible,

$$F(x, y) = \frac{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\cdots(x-a_p)^{\lambda_p}\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^{m-1}}{P(x, y)},$$

les λ étant précisément les nombres entiers définis plus haut. Nous reconnaîtrons que, pour que le nombre des zéros distincts soit un minimum, il faut et il suffit : 1° que $P(x, y)$ soit un polynome entier de degré

$$\sum \lambda + (m-1)(r-3);$$

2° que la courbe $P=0$ passe par tous les points d'intersection de la courbe $\psi=0$ avec les droites $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_p$ autres que les points singuliers $(x=a_i, y=b_i)$ et que les deux courbes aient en ces points un contact d'ordre λ_i-1; 3° enfin que la courbe $P=0$ admette les mêmes points doubles que $\psi=0$, et de façon que les branches qui se croisent en ces points doubles aient avec celles de $\psi=0$ des contacts d'ordre $m-2$.

En effet, il est possible de satisfaire à ces conditions, car le polynome $P(x, y)$ contient, comme on l'a vu,

$$r\sum \lambda + \left(m-\frac{3}{2}\right)r(r-3)$$

paramètres et nous n'avons à remplir que

$$(r-1)\sum\lambda + \left(m - \frac{3}{2}\right)[(r-1)(r-2)-2P]$$

conditions.

Il reste donc

$$\sum\lambda + (2m-3)(P-1)$$

paramètres arbitraires dans notre polynome $P(x, y)$. De plus, on voit aisément que, si nos conditions sont remplies, le nombre des zéros distincts, et, par conséquent, celui des infinis, est minimum, car le nombre des zéros distincts qui se confondent avec les sommets de R_0 est aussi petit que possible, et il n'y a pas de zéro en dehors de ces sommets. On trouve, en appliquant la règle du paragraphe III, que le nombre minimum des infinis est

$$J = \sum\lambda + (2m-2)(P-1).$$

Comme le polynome $P(x, y)$ ne dépend que de $\sum\lambda + (2m-3)(P-1)$ paramètres, il s'ensuit que nos J infinis distincts ne peuvent pas être choisis arbitrairement, mais que la connaissance de $J - P$ d'entre eux suffit pour déterminer les P autres. On ne peut donc, en général, déterminer la fonction Λ, de telle sorte qu'elle ait J infinis donnés et qu'elle n'en ait pas d'autres.

Quel est le plus petit nombre J' tel que l'on puisse toujours déterminer la fonction Λ, de telle sorte qu'elle ait J' infinis donnés et n'en ait pas d'autres? La fonction Λ admettra alors $J' - J$ zéros et $J' - J$ infinis distincts de plus que les fonctions de même forme qui n'ont que J infinis et, par conséquent, elle contiendra $2J' - 2J$ paramètres de plus qu'elles, ou en tout

$$2J' - 2J + \sum\lambda + (2m-3)(P-1)$$

ou, en remplaçant J par sa valeur

$$2J' - \sum\lambda - (2m-1)(P-1);$$

on doit donc avoir

$$2J' - \sum\lambda - (2m-1)(P-1) \geqq J' + 1$$

ou

(9) $$J' \geqq \sum\lambda + (2m-1)(P-1) + 1.$$

Voilà donc la limite inférieure cherchée du nombre J'.

Maintenant, nous allons pouvoir résoudre une question importante qui se pose tout naturellement. Nous avons vu que toutes les expressions de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda+(2m-1)(P-1)$ d'entre elles. Les séries thétafuchsiennes de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce pouvant toutes se mettre sous la forme (6), pourront donc s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda+(2m-1)(P-1)$ d'entre elles. Mais nous ne savons pas encore si toutes les expressions de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer par une série (5) (§ I). Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, toutes les séries de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce s'exprimeraient linéairement à l'aide de

$$\sum\lambda+(2m-1)(P-1)-1$$

d'entre elles. Je vais démontrer que cette hypothèse est impossible.

En effet, nous avons vu, dans le paragraphe précédent (p. 214 et suiv.), que, si toutes les séries de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce s'expriment linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles, on pourrait construire une fonction

$$\Lambda(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m}F(z),$$

$F(z)$ représentant une fonction fuchsienne de z admettant q infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Donc, si l'hypothèse faite au début était possible, on pourrait construire une fonction $\Lambda(z)$ admettant

$$J=\sum\lambda+(2m-1)(P-1)$$

infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Le nombre J' ne satisferait pas alors à l'inégalité (9), ce qui est contraire à ce qu'on a vu plus haut.

En conséquence, toute expression de la forme (6) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme d'une série (5) (§ I) de la seconde espèce; donc *toute expression de la forme* (6) avec ou sans infinis, *pourra se mettre sous la forme d'une série* (5) (§ I) de la première ou de la seconde espèce.

Passons à une propriété importante des fonctions de la forme $\Lambda(z)$. Ces fonctions auront toujours une infinité d'infinis; soient $z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots$ ces infinis, que nous supposerons tous simples pour fixer les idées, $A_1, A_2, \ldots, A_i$ les résidus correspondants. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle n'ayant pas d'infinis à l'intérieur du cercle fondamental. On aura, identiquement,

$$\Lambda(z)\varphi(z) = \sum_i \frac{A_i \varphi(z_i)}{z - z_i}.$$

Cela se démontre de la même manière que dans le paragraphe précédent : la première démonstration peut se répéter sans qu'on y change un mot ; la seconde demanderait, pour être appliquée, quelques modifications légères.

Les divers termes du second membre de l'identité précédente peuvent être groupés d'une manière plus avantageuse. Soient, en effet, q le nombre des infinis distincts de $\Lambda(z)$; $z_1, z_2, \ldots, z_q$ ces infinis ; $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les résidus correspondants ; nous pourrons écrire

$$(10) \qquad \Lambda(z)\varphi(z) = \sum_k A_k \sum_i \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{\left(z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2m}}.$$

Dans cette formule, on désigne par la notation $\left(z, \dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ les diverses substitutions du groupe G. En différentiant la relation (10) $2m - 1$ fois par rapport à z, on arrive à une formule tout à fait analogue à la formule (16) du paragraphe précédent. Le premier membre est une expression de la forme (6) et le second membre est une série de la forme (5) (§ I).

VII. — Deuxième famille : genre zéro.

Considérons un polygone R_0 dont les sommets, au nombre de $2n$, sont tous situés sur le cercle fondamental, et dont les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental. Tous les angles de notre polygone sont donc formés par deux arcs de cercle tangents l'un à l'autre, et, par conséquent, ils sont tous nuls. Je supposerai que les côtés de rang p et $2n + 1 - p$ sont conjugués ; les cycles seront alors au nombre de $n + 1$, dont deux formés d'un seul sommet, le premier du sommet de rang 1 ; le second du sommet de rang $n + 1$. Les $n - 1$ autres cycles seront formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang p et $2n + 2 - p$.

J'appelle S_p la substitution qui change le côté de rang p en celui de rang $2n + 1 - p$. Nous aurons ainsi n substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_n$ qui seront les substitutions fondamentales de notre groupe G.

Je définis ensuite les substitutions $S'_2, \ldots, S'_n$ par les égalités suivantes :

$$S'_2 = S_2 S_1^{-1}, \quad S'_3 = S_3 S_2^{-1}, \quad \ldots, \quad S'_n = S_n S_{n-1}^{-1}$$

et je pose, pour plus de symétrie dans les notations,

$$S'_1 = S_1, \quad S'_{n+1} = S_{n+1}.$$

J'appelle maintenant α_i le sommet de rang i; il est clair que α_i sera l'un des points doubles de S'_i. Je supposerai que *les $n+1$ substitutions* $S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n+1}$ *sont paraboliques*. Cela ne serait pas possible si les $2n$ points α_i étaient choisis arbitrairement sur le cercle fondamental. Il faut qu'il y ait entre eux la relation

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_3)\ldots(\alpha_{2p} - \alpha_{2p-1})\ldots(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) \\ &= (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_5 - \alpha_4)\ldots(\alpha_{2p+1} - \alpha_{2p})\ldots(\alpha_{2n} - \alpha_1). \end{aligned}$$

Dans ces conditions, notre polygone R_0 est du genre zéro et du premier ordre de la deuxième famille; notre groupe G et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent sont du genre zéro et de la deuxième famille. Nous pourrons, comme dans le paragraphe V, choisir, parmi ces fonctions fuchsiennes, une d'entre elles que j'appellerai $x = f(z)$, et en fonction de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Pour achever de la définir, je supposerai que l'on a

$$f(\alpha_1) = 0, \quad f(\alpha_2) = 1, \quad f(\alpha_{n+1}) = \infty.$$

Je poserai, en outre, comme dans le paragraphe V,

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i}),$$

d'où

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \infty.$$

Si l'on pose

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

v satisfait à une équation linéaire

$$(3\ bis) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en x. Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$? On trouve aisément :

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{[Q(x)]^2},$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ et $P(x)$ étant un polynome entier de degré $2n-2$. Le polynome $\mathrm{P}(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\mathrm{P}(a_i) = \frac{1}{4}\mathrm{Q}'^2(a_i)$$

et

$$\text{coefficient de } x^{2n-2} \text{ dans } \mathrm{P}(x) = -\frac{1}{4}.$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation (3 *bis*). Il faut, en outre, assujettir $\mathrm{P}(x)$ à $2n-4$ conditions transcendantes.

Nous démontrerons, dans un autre Mémoire, que l'on peut toujours choisir le groupe G, de telle sorte que les nombres $a_3, a_4, \ldots, a_n$ aient des valeurs données quelconques.

Dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique par rapport au cercle qui joint α_1 à α_{n+1} en coupant orthogonalement le cercle fondamental, les coefficients de la fonction rationnelle $\varphi(x)$ sont tous réels.

Si, de plus, $n=2$, $f(z)$ se réduit à la fonction modulaire k^2.

Voyons comment se comportent les intégrales de l'équation (3 *bis*) dans le voisinage de l'un des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Les intégrales seront *régulières et logarithmiques*, pour employer les expressions de M. Fuchs et de ses disciples. Les deux racines de l'équation déterminante seront $\frac{1}{2}$; de telle sorte que les intégrales pourront se mettre sous la forme

$$v_1 = (x-a_i)^{\frac{1}{2}}[\mathrm{P}_i + \mathrm{Q}_i \log(x-a_i)]$$

et

$$v_2 = (x-a_i)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}_i,$$

P_i et Q_i étant des fonctions holomorphes en $x-a_i$, dont la première s'annule et la deuxième ne s'annule pas pour $x=a_i$.

Pour $x=\infty$, on a de même

$$v_1 = x^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}_{n+1} + \mathrm{Q}_{n+1}\log x), \qquad v_2 = x^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}_{n+1},$$

P_{n+1} et Q_{n+1} étant des fonctions holomorphes en $\frac{1}{x}$, dont la première s'annule et la seconde ne s'annule pas pour $x=\infty$.

Exprimons maintenant, dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, z en fonction de x. On devra avoir, dans le voisinage de $x=a_i$,

$$z = \frac{\lambda\mathrm{Q}_i + \mu[\mathrm{Q}_i\log(x-a_i) + \mathrm{P}_i]}{\lambda'\mathrm{Q}_i + \mu'[\mathrm{Q}_i\log(x-a_i) + \mathrm{P}_i]},$$

λ, μ, λ', μ' étant des constantes convenablement choisies. Supposons que la substitution S'_i s'écrive

$$\left(\frac{1}{z-\alpha_i}, \frac{1}{z-\alpha_i}+\beta_i\right)$$

et posons

$$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i}} = t_i;$$

exprimons ensuite que z se réduit à α_i pour $x = a_i$ et subit la substitution S_i quand $\log(x-a_i)$ se change en $\log(x-a_i)+2\pi\sqrt{-1}$. Nous verrons que la relation qui précède peut s'écrire

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i} = P'_i + \log(x-a_i),$$

P'_i étant une fonction holomorphe en $x-a_i$. On tire de là

$$t_i = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i}} = Q'_i,$$

Q'_i étant une fonction holomorphe en $(x-a_i)$; le développement de Q'_i suivant les puissances de $(x-a_i)$ commence par un terme en $(x-a_i)$ dont le coefficient ne peut jamais être nul. On tire de là

$$x = a_i + \Phi_i(t_i),$$

Φ_i désignant une fonction holomorphe en t_i et dont le développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du premier degré dont le coefficient n'est jamais nul. Telle est la forme de l'expression de x en fonction de z dans le voisinage du point singulier $x = a_i$. De même, dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, $x = \infty$, on aura

$$\frac{1}{x} = \Phi_{n+1}(t_{n+1}),$$

Φ_{n+1} désignant une fonction holomorphe en t_{n+1} dont le développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du premier degré qui n'est jamais nul. On peut encore écrire la relation précédente sous la forme

$$x = \frac{1}{t_{n+1}}\Psi(t_{n+1}),$$

Ψ désignant une fonction holomorphe de t_{n+1} ne s'annulant pas avec cette variable. Quant à la dérivée $\frac{dx}{dz}$, elle pourra se mettre sous une forme analogue.

Dans le voisinage de $z = \alpha_i$, on aura

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z-\alpha_i)^2} t_i \Phi_i(t_i),$$

Φ_i étant une fonction holomorphe de t_i qui ne s'annule pas avec cette variable. De même, dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, on aura

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z-\alpha_{n+1})^2} \frac{\Psi'(t_{n+1})}{t_{n+1}},$$

Ψ' désignant une fonction holomorphe de t_{n+1} ne s'annulant pas avec cette variable.

Passons maintenant à l'étude des fonctions thétafuchsiennes.

Toute fonction représentée par une série de la forme (5) (§ I) pourra toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{F}(x), \tag{2}$$

F désignant une fonction rationnelle de x. Mais la réciproque n'est pas vraie. En effet, nous avons vu au paragraphe 2 que toute série de la forme (5) (§ I) peut, dans le voisinage de $z = \alpha_i$, se mettre sous la forme

$$\frac{1}{(z-\alpha_i)^{2m}} \mathrm{R}(t_i),$$

R désignant une fonction holomorphe de t_i qui s'annule avec cette variable. Il en résulte que, pour $x = a_i$, la fonction $(x-a_i)^m \mathrm{F}(x)$ doit s'annuler et que, quand x augmente indéfiniment, $x^m \mathrm{F}(x)$ doit tendre vers zéro. Telles sont les conditions *nécessaires* auxquelles doit satisfaire l'expression (2) pour pouvoir représenter une série de la forme (5) (§ I).

Nous les appellerons les conditions A.

Supposons maintenant que la fonction (2) n'admette pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. F(x) devra être de la forme

$$\frac{\mathrm{H}(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}},$$

H(x) désignant un polynome entier en x. Mais, à cause des conditions A, les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont au plus égaux à $m-1$ et le degré de H(x) au plus égal à $n(m-1)-m-1$. Par conséquent, toutes les séries thétafuchsiennes de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce s'expriment linéairement au moyen de $n(m-1)-m$ d'entre elles.

Mais nous ne savons pas encore si toute expression de la forme (2) n'ayant pas d'infini et satisfaisant aux conditions A peut se mettre sous la forme d'une série (5) (§ I); ni, par conséquent, si toutes les séries de cette forme et de la seconde espèce ne peuvent pas s'exprimer linéairement à l'aide de $n(m-1)-m-1$ d'entre elles.

Pour reconnaître s'il en est ainsi, considérons une fonction de la forme

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x),$$

F désignant une fonction rationnelle, et cherchons quel est le minimum du nombre J' de ses infinis distincts, à supposer qu'elle tende vers zéro quand z tend vers α_i.

Nous pourrons écrire

$$F(x) = \frac{(x-a_1)^{m-1}(x-a_2)^{m-1}\cdots(x-a_n)^{m-1}H(x)}{\Phi(x)},$$

$H(x)$ et $\Phi(x)$ désignant deux polynomes en x. Pour que $A(z)$ tende vers zéro quand z tend vers α_i, il faut et il suffit que

$$\Phi(a_1), \quad \Phi(a_2), \quad \ldots, \quad \Phi(a_n)$$

ne soient pas nuls et que le degré du numérateur surpasse au plus de $m-1$ celui du dénominateur. Or, le degré de $\Phi(x)$ est le nombre J' des infinis distincts de $A(z)$. On a donc

$$J' \geqq n(m-1) - m + 1.$$

Je dis alors qu'il est impossible d'exprimer linéairement toutes les séries de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce à l'aide de $n(m-1)-m+1$ d'entre elles; car, si cela avait lieu, on pourrait construire une fonction de la forme $A(z)$ ayant $n(m-1)-m$ infinis distincts, ce qui ne se peut pas comme nous venons de le voir. On en conclura donc (comme dans les deux paragraphes précédents) que toute expression de la forme (2) satisfaisant aux conditions A peut être exprimée par une série de la forme (5) (§ I).

La formule (10) du paragraphe précédent s'applique aussi aux fonctions qui nous occupent. On la démontrerait comme dans les deux paragraphes précédents; la première démonstration demanderait quelques modifications légères, la seconde peut s'appliquer sans qu'on y change rien. Toutes les conséquences que nous avons déduites de cette formule (10) dans les deux paragraphes précédents, et entre autres la formule (16) du paragraphe V, sont encore vraies dans le cas qui nous occupe.

On voit aisément comment on étendrait les principes qui précèdent aux fonctions de la seconde et de la sixième familles et de genre quelconque.

Nous pouvons donc passer à l'étude des fonctions fuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan.

VIII. — Troisième famille.

Parmi celles-ci, les plus simples sont celles de la troisième famille dont nous allons parler d'abord.

Supposons qu'on nous donne n paires de cercles (c_1 et c'_1), (c_2 et c'_2), ..., (c_n et c'_n).

Je suppose que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres, qu'ils coupent orthogonalement le cercle fondamental et soient, par conséquent, symétriques par rapport à ce cercle. Je suppose que l'on considère n substitutions S_1, S_2, ..., S_n, telles que S_i, tout en conservant le cercle fondamental, change c_i en c'_i. Le groupe dérivé des substitutions S_i sera un groupe fuchsien G dont le polygone générateur R_0 se composera de la partie du plan qui est intérieure au cercle fondamental et extérieure aux divers cercles c et c'. Le polygone R_0 aura $2n$ côtés de la première sorte, formés par les arcs des cercles c et c' intérieurs au cercle fondamental et $2n$ côtés de la seconde sorte formés par les arcs du cercle fondamental extérieurs aux différents cercles c et c'. Tous les sommets de R_0 sont de la troisième catégorie. Quant au polygone R'_0, symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental, ce sera la partie du plan qui est extérieure à la fois au cercle fondamental et aux cercles c et c'. Le groupe G et, par conséquent, les fonctions fuchsiennes qui en dérivent seront de la troisième famille et du genre n.

Toutes ces fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y et entre lesquelles il y aura une relation algébrique de genre n

$$\psi(x, y) = 0. \tag{1}$$

Si l'on pose de plus

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

la fonction v satisfera à l'équation (3) du paragraphe IV, à savoir :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y), \tag{3}$$

φ étant rationnel en x et en y.

Le groupe G ne dépendant que de $3n - 3$ paramètres réels distincts, on ne peut en disposer de manière que la relation $\psi(x, y) = 0$ soit quelconque. Combien, en effet, reste-t-il de paramètres arbitraires dans une relation algébrique de genre n

$$\psi(x, y) = 0, \tag{1}$$

lorsque l'on convient de ne pas regarder comme distinctes de cette relation celles qu'on en déduit en y remplaçant x et y par des fonctions rationnelles de x' et de y'. On sait qu'il reste $3n - 3$ paramètres qu'on appelle les *modules* de la relation (1) et qui sont pour ainsi dire des invariants à l'égard de cette relation et des opérations qui consistent à y remplacer x et y par des fonctions rationnelles de x' et de y'. En nous proposant d'obtenir entre nos deux fonctions fuchsiennes x et y une relation algébrique *donnée*, nous nous imposons donc $3n - 3$ conditions *complexes* qui équivalent à $6n - 6$ conditions *réelles*. Ce nombre surpasse de $3n - 3$ celui des paramètres dont nous disposons. Ainsi, le premier membre de la relation (1) est assujetti à $3n - 3$ conditions réelles; il est aisé de les trouver.

En effet, on peut supposer qu'on fasse une opération qui consiste à changer z en son symétrique par rapport au cercle fondamental. Cela revient à changer $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ et à faire ensuite un changement linéaire de variable. On change ainsi R_0 en R'_0 et réciproquement, de sorte que le groupe G et le système des fonctions fuchsiennes qui en dérivent ne changent pas. Les $3n - 3$ modules de la relation (1) ne changent donc pas non plus. Mais quand on a changé $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, ces modules ont dû se changer en leurs imaginaires conjugués; puis, quand on a fait un changement linéaire de variable, ils n'ont pas changé. Par conséquent, les $3n - 3$ *modules de la relation* (1) ne diffèrent pas de leurs imaginaires conjugués, *ils sont donc réels*.

Il en résulte qu'on pourra toujours choisir x et y parmi les fonctions fuchsiennes dérivées du groupe G, de telle sorte que *tous les coefficients de la relation* (1) *soient réels*. Alors les coefficients de $\varphi(x, y)$ seront aussi tous réels.

Je suppose de plus qu'on ait choisi x et y, ce qui est toujours possible, de façon que la relation (1) satisfasse aux conditions que nous avons imposées à la relation (1) du paragraphe VI, au commencement de ce paragraphe (p. 223).

Cela posé, la fonction $\varphi(x, y)$ satisfera aux conditions suivantes :

1° Quand x devient infiniment grand du premier ordre, elle devient infiniment petite du quatrième ordre;

2° Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ seront les points singuliers de la fonction y de x, définie par la relation (1), en n'y comprenant pas les points doubles de la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$. Si l'un de ces points est $x = a$, $y = b$, on aura

$$\lim (y - b)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4}$$

pour $x = a$, $y = b$.

Ces conditions qui, on le remarquera, sont les mêmes que celles que nous avions trouvées dans le premier exemple, examiné au paragraphe VI, ne suffisent pas pour déterminer la fonction rationnelle $\varphi(x, y)$. Celle-ci est en outre assujettie à n conditions transcendantes. Voici sous quelle forme on peut présenter ces conditions transcendantes :

La fonction $\varphi(x, y)$ devra être choisie de telle sorte qu'en faisant décrire au point analytique (x, y) n cycles convenablement choisis $\Big($correspondant à n périodes convenablement choisies d'une intégrale abélienne de première espèce $\int g(x, y)\, dx\Big)$, on voie revenir les intégrales de l'équation (3) à leurs valeurs intiales.

Passons maintenant à l'étude des séries thétafuchsiennes

$$\Theta(z) = \Sigma_i \,\mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m},$$

c'est-à-dire à l'étude des séries de la forme (5) (§ I), et d'abord cherchons comment il peut arriver que la fonction définie par cette série ne présente aucun infini en dehors des points singuliers essentiels.

En général, la série $\Theta(z)$ admet comme infinis, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe III : 1° les points correspondants du point ∞, c'est-à-dire les points

$$z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i};$$

2° les infinis de la fonction $\mathrm{H}(z)$ et les points correspondants.

Supposons pour fixer les idées que la fonction $\mathrm{H}(z)$ ne devienne infinie pour aucun des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Quelle est d'abord la condition pour que les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ ne soient pas des infinis de $\Theta(z)$? Pour cela, il faut et il suffit que le degré du dénominateur de la fonction rationnelle $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur.

Considérons maintenant un infini a de la fonction $H(z)$ elle-même. Dans la série $\Theta(z)$, le terme

$$H(z)$$

(correspondant à $\alpha_i = 1$, $\delta_i = 1$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, c'est-à-dire à la substitution unité) deviendra infini pour $z = a$. Pour que $\Theta(z)$ reste fini pour $z = a$, il faut donc qu'un autre terme de cette série devienne infini, de façon que la somme de ces deux termes (qui séparément croissent indéfiniment quand z tend vers a) tende au contraire vers une limite finie. Il faut pour cela que, parmi les infinis de $H(z)$, il y en ait un autre $z = b$, tel que

$$b = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta},$$

$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ étant une des substitutions du groupe G. Il est clair alors que le terme

$$H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}$$

deviendra infini pour $z = a$. Mais il faut que la somme de ce terme et du terme $H(z)$ reste finie pour $z = a$. Soient donc A et B les résidus de $H(z)$ qui correspondent à $z = a$ et $z = b$. On aura

$$H(z) = \frac{A}{z-a} + H'(z),$$

$$H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m} = \frac{B}{z-a}(\gamma a + \delta)^{2-2m} + H'_1(z),$$

$H'(z)$ et $H_1(z)$ étant des fonctions rationnelles de z qui restent finies pour $z = a$. On devra donc avoir

$$A + B(\gamma a + \delta)^{2-2m} = 0.$$

Telles sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que $\Theta(z)$ reste fini pour $z = a$ et, par conséquent, aussi pour les points correspondants.

Cela posé, voici comment il faudra s'y prendre pour construire une fonction $\Theta(z)$ qui n'admette aucun infini. Prenons une fonction rationnelle $H(z)$ admettant $2p$ infinis a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ..., a_p, b_p, et ayant pour résidus correspondants A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ..., A_p, B_p.

Je suppose, de plus, qu'on ait :

$$b_1 = \frac{\alpha_1 a_1 + \beta_1}{\gamma_1 a_1 + \delta_1}, \qquad b_2 = \frac{\alpha_2 a_2 + \beta_2}{\gamma_2 a_2 + \delta_2}, \qquad \dots, \qquad b_p = \frac{\alpha_p a_p + \beta_p}{\gamma_p a_p + \delta_p},$$

$$\left(z, \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}\right), \quad \left(z, \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2}\right), \quad \dots, \quad \left(z, \frac{\alpha_p z + \beta_p}{\gamma_p z + \delta_p}\right)$$

étant p substitutions du groupe G. J'assujettis de plus les $2p$ résidus à deux systèmes de conditions. D'abord

$$\begin{gathered}
A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \dots\dots\dots\dots + A_p + B_p = 0, \\
A_1 a_1 + B_1 b_1 + A_2 a_2 + B_2 b_2 + \dots + A_p a_p + B_p b_p = 0, \\
A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + A_2 a_2^2 + B_2 b_2^2 + \dots + A_p a_p^2 + B_p b_p^2 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
A_1 a_1^{2m-2} + B_1 b_1^{2m-2} + \dots\dots\dots + A_p a_p^{2m-2} + B_p b_p^{2m-2} = 0,
\end{gathered}$$

pour que le degré du dénominateur de $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur. Ensuite

$$A_k + B_k(\gamma_k a_k + \delta_k)^{2-2m} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, p),$$

pour que a_k et b_k ne soient pas des infinis de $\Theta(z)$.

Ces $p + 2m - 1$ conditions seront compatibles pourvu que

$$p > 2m - 1,$$

et si elles sont remplies, la série $\Theta(z)$ formée à l'aide de la fonction rationnelle

$$H(z) = \sum_{k=1}^{k=p} \left[\frac{A_k}{z - a_k} + \frac{B_k}{z - b_k}\right]$$

n'aura aucun infini. Je dirai alors qu'elle est de la seconde espèce, de sorte que nous avons ici, comme dans les trois paragraphes précédents, la distinction entre les deux espèces de séries de thétafuchsiennes.

Toute série de la forme $\Theta(z)$, à quelque espèce qu'elle appartienne, peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y),$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de x et de y. Celles des fonctions de la forme (2) qui n'admettent pas d'infinis, s'expriment linéairement, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe VI, à l'aide de $(2m-1)(n-1)$ d'entre elles. Il résulte de là que toutes les séries $\Theta(z)$ de la seconde espèce s'expriment linéairement à l'aide de $(2m-1)(n-1)$ d'entre elles. Il nous reste à démontrer, comme dans les trois paragraphes précédents, qu'il est impossible de les exprimer linéairement à l'aide de $(2m-1)(n-1)-1$ d'entre elles.

Posons, pour abréger,

$$q = (2m-1)(n-1).$$

Supposons que toutes les séries $\Theta(z)$ de la seconde espèce puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles que j'appellerai $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{q-1}$; je vais montrer que cette hypothèse est absurde.

En effet, choisissons *au hasard* q points, $z_1, z_2, \ldots, z_q$; on pourra toujours trouver q nombres $A_1, A_2, \ldots, A_q$ tels que

$$\begin{gathered}
A_1\Theta_1(z_1) + A_2\Theta_1(z_2) + \ldots + A_q\Theta_1(z_q) = 0, \\
A_1\Theta_2(z_1) + A_2\Theta_2(z_2) + \ldots + A_q\Theta_2(z_q) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1\Theta_{q-1}(z_1) + A_2\Theta_{q-1}(z_2) + \ldots + A_q\Theta_{q-1}(z_q) = 0,
\end{gathered}$$

et, par conséquent, tels que

$$(5)\qquad A_1\Theta(z_1) + A_2\Theta(z_2) + \ldots + A_q\Theta(z_q) = 0,$$

$\Theta(z)$ désignant une série quelconque de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce.

Soit p un nombre entier plus petit que $2m$. Je pourrai toujours former une fonction $\theta_p(z)$ qui satisfasse aux conditions suivantes : elle n'admettra d'autre infini que les points $z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; ces infinis seront d'ordre $2m-p$. Dans ces conditions, le point $z=\infty$ n'est pas un infini de notre fonction $\theta_p(z)$, c'est pour elle un zéro d'ordre p.

Je suppose que

$$\begin{aligned}
&\lim z^p\theta_p(z) = 1 &&\text{pour } z=\infty,\\
&\lim z^{2m-1-p}[z^p\theta_p(z)-1] = 0 &&\text{pour } z=\infty.
\end{aligned}$$

Ces conditions ne suffisent pas pour définir complètement la fonction $\theta_p(z)$, car si $\Theta(z)$ est une série de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce, $\theta_p(z)+\Theta(z)$ y satisfera comme $\theta_p(z)$. Mais nous choisirons pour notre fonction $\theta_p(z)$ une quelconque des séries de la forme (5) (§ I), qui satisfont aux conditions énoncées.

Considérons une série quelconque de la forme (5) (§ I) et de la première espèce

$$\Psi(z) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2m}.$$

Supposons que la partie entière de la fonction rationnelle

$$z^{2m}\,\mathrm{H}(z)$$

se réduit à

$$\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 z + \mathrm{B}_2 z^2 + \ldots + \mathrm{B}_{2m} z^{2m},$$

on verra aisément que le point $z = \infty$ est, pour la fonction thétafuchsienne

$$\Psi(z) = \mathrm{B}_0\,\theta_0(z) + \mathrm{B}_1\,\theta_1(z) + \mathrm{B}_2\,\theta_2(z) + \ldots + \mathrm{B}_{2m}\,\theta_{2m}(z),$$

un zéro d'ordre $2m$ au moins et par conséquent que cette fonction thétafuchsienne ne devient pas infinie pour $z = -\dfrac{\delta_i}{\gamma_i}$.

Cela posé, envisageons la fonction suivante :

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{1}{z - \dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}.$$

Considérée comme fonction de z, elle n'a d'autres infinis que les points

$$z = \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i},$$

c'est-à-dire les points correspondants de a.

Considérée comme fonction de a, c'est une série thétafuchsienne et elle admet comme infinis :

1° Les points $a = \dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, c'est-à-dire les points correspondants de z;

2° Les points $a = -\dfrac{\delta_i}{\gamma_i}$, c'est-à-dire les points correspondants de $a = \infty$. Ces points sont des infinis d'ordre $2m - 1$. Quant au point $a = \infty$ lui-même, c'est pour notre série un zéro du premier ordre.

Cherchons la partie entière de la fonction rationnelle

$$\frac{a^{2m}}{z - a};$$

nous trouverons

$$-(a^{2m-1} + z a^{2m-2} + z^2 a^{2m-3} + \ldots + z^{2m-2} a + z^{2m-1}).$$

On en conclut que la fonction thétafuchsienne

$$\Omega(z, a) = \Phi(z, a) + z^{2m-1}\theta_0(a) + z^{2m-2}\theta_1(a) + \ldots + z\,\theta_{2m-2}(a) + \theta_{2m-1}(a)$$

n'admet pas comme infinis les points $a = -\dfrac{\delta_i}{\gamma_i}$.

En conséquence elle n'aura d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i};$$

le résidu correspondant sera

$$-(\gamma_i z + \delta_i)^{2m-2}.$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque de notre groupe G. La fonction

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2}\,\Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right)$$

sera comme $\Omega(z, a)$ une fonction thêtafuchsienne de a; elle n'admettra comme elle d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

et avec les mêmes résidus; donc on pourra écrire :

$$(6)\qquad (\gamma z + \delta)^{2m-2}\,\Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right) = \Omega(z, a) + \Theta(a),$$

$\Theta(a)$ désignant une fonction thêtafuchsienne de a, susceptible d'être mise sous la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce. Posons maintenant

$$(7)\qquad \Lambda(z) = \Lambda_1\,\Omega(z, z_1) + \Lambda_2\,\Omega(z, z_2) + \ldots + \Lambda_q\,\Omega(z, z_q).$$

En rapprochant les équations (5), (6) et (7), on trouve aisément l'identité suivante :

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2}\,\Lambda\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \Lambda(z),$$

qui a lieu pour toutes les substitutions $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ du groupe G. Il suit de là que $\Lambda(z)$ peut se mettre sous la forme

$$(8)\qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y),$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de x et de y. Or, la fonction $\Lambda(z)$ admet q infinis distincts $z_1, z_2, \ldots, z_q$, qui ont été choisis au hasard, et n'en admet pas d'autre à distance finie. On pourrait donc construire une fonction de la forme (8) admettant q infinis *donnés* et n'en admettant pas d'autre. Or, nous avons vu au paragraphe VI que cela était impossible. Donc l'hypothèse faite au début était absurde.

On en conclut comme dans les trois paragraphes précédents :

1° Que toutes les séries de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce ne peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles ;

2° Que toute expression de la forme (2) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme (5) (§ I) ;

3° Que toute expression de la forme (2) peut être exprimée par une série de la forme (5) (§ I) (pourvu que $m > 1$) ;

4° Que toute fonction fuchsienne peut être égalée d'une infinité de manières au quotient de deux séries de la forme (5) (§ I).

Considérons la fonction

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y).$$

Supposons qu'elle admette une infinité d'infinis $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$, avec les résidus $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$. Supposons de plus qu'on ait

$$\Lambda(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \ldots + B_1 z + \Lambda_1(z),$$

$\Lambda_1(z)$ tendant vers une limite finie quand z croît indéfiniment. On aura identiquement

$$\Lambda(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \ldots + B_1 z + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{z - z_k}. \tag{9}$$

Cette identité se démontre de deux manières comme l'identité correspondante du paragraphe V.

Un cas particulier bien remarquable est celui de $n = 1$.

Dans ce cas les substitutions du groupe G se réduisent à

$$\left(\frac{az+b}{cz+d}, K^p \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

a, b, c, d étant des constantes, K étant un nombre réel positif et plus grand que 1, et l'exposant p pouvant prendre dans les diverses substitutions toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Voici comment on peut former les fonctions fuchsiennes dans le cas qui nous occupe. Soit $f(\xi)$ une fonction doublement périodique admettant les périodes $2i\pi$ et $\log K$. La transcendante $f\left[\log\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right]$ sera alors une fonction fuchsienne.

Posons, par exemple,

$$x = \operatorname{sn}\left(\log\frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad y = \operatorname{cn}\left(\log\frac{az+b}{cz+d}\right)\operatorname{dn}\left(\log\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

Les expressions de la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{F}(x, y)$$

pourront s'écrire

$$(10) \qquad \frac{f\left(\log\dfrac{az+b}{cz+d}\right)}{(az+b)^m(cz+d)^m},$$

$f(\xi)$ désignant toujours une fonction doublement périodique.

Les séries $\Theta(z)$ de la forme (5) (§ I) deviendront d'autre part

$$(11) \qquad \sum_i \frac{\mathrm{K}^{mi}\varphi\left(\mathrm{K}^i\dfrac{az+b}{cz+d}\right)}{(cz+d)^{2m}},$$

φ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Égalons les expressions (10) et (11) et faisons-y

$$\frac{az+b}{cz+d} = e^{\xi},$$

il viendra

$$f(\xi) = \Sigma_i \mathrm{K}^{mi} e^{m\xi} \varphi(\mathrm{K}^i e^{\xi}).$$

On obtient ainsi le développement d'une fonction doublement périodique de ξ suivant une série dont les termes sont des fonctions rationnelles de e^{ξ}. Si au lieu de ξ, on avait pris pour variable indépendante $\eta = \xi\sqrt{-1}$, le premier membre serait une fonction doublement périodique de η, et, dans la série du second membre, tous les termes seraient des fonctions rationnelles de $\sin\eta$ et $\cos\eta$. Nous retrouvons par une voie détournée un résultat auquel Jacobi est parvenu directement et d'où il a tiré tant de belles conséquences.

Voyons maintenant ce que devient la formule (9) dans le cas particulier qui nous occupe.

On a

$$\Lambda(z) = (az+b)^{m-1}(cz+d)^{m-1}f(\xi),$$

$f(\xi)$ étant toujours une fonction doublement périodique.

On a d'autre part dans le second membre :

1° Un polynome du degré h en z; mais il est aisé de voir que, dans le cas général, c'est-à-dire à moins que

$$f\left(\log \frac{a}{c}\right) = \infty,$$

le degré h ne peut dépasser $2m-2$. On peut donc le regarder comme un polynome homogène de degré $2m-2$ en $(az+b)$ et $(cz+d)$. Si on le divise par $(az+b)^{m-1}(cz+d)^{m-1}$, il prendra la forme suivante :

$$P_{m-1}(e^{\xi}) + P_{m-1}(e^{-\xi}),$$

P_{m-1} et P_{m-1} désignant des polynomes de degré $m-1$ en e^{ξ} et en $e^{-\xi}$.

2° Un ensemble de termes $\sum \frac{A_k}{z-z_k}$ qu'on peut grouper de la façon suivante : soient $z_1, z_2, \ldots, z_q$ les q infinis distincts de $A(z)$ et supposons qu'il n'y en ait pas d'autre ; soient $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les résidus correspondants ; soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_q$ les valeurs correspondantes de ξ. Groupons ensemble tous les termes de la forme $\frac{A_k}{z-z_k}$ qui correspondent à des infinis qui ne sont pas distincts de $z=z_p$. Leur somme sera

$$A_p \sum_i \frac{ce^{\xi}-a}{(cK^i e^{\xi_p}-a)^{2m-1}} \frac{K^{im}}{e^{\xi}-K^i e^{\xi_p}} (ce^{\xi_p}-a)^{2m}.$$

Comme on a d'autre part

$$(az+b)^{m-1}(cz+d)^{m-1} = e^{(m-1)\xi}(ce^{\xi}-a)^{2-2m},$$

on trouvera pour la fonction doublement périodique $f(\xi)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned} f(\xi) = {} & P_{m-1}(e^{\xi}) + P_{m-1}(e^{-\xi}) \\ & + \sum_{p=1}^{p=q} \left[A_p (ce^{\xi_p}-a)^{2m} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left(\frac{ce^{\xi}-a}{cK^i e^{\xi_p}-a}\right)^{2m-1} \frac{K^{mi} e^{(1-m)\xi}}{e^{\xi}-K^i e^{\xi_p}} \right]. \end{aligned}$$

IX. — Cinquième famille ; genre zéro.

Je crois inutile de multiplier davantage les exemples. Ceux que j'ai étudiés jusqu'ici suffisent en effet pour faire voir comment on doit appliquer les principes généraux à chaque cas particulier.

Je veux cependant, sans traiter complètement les questions qui les concernent, dire quelques mots de certaines fonctions remarquables de la cinquième famille.

Considérons un polygone R_0 limité de la façon suivante : Il aura $2n$ côtés de la première sorte et un côté de la seconde sorte; je suppose que ses sommets soient, en suivant le périmètre dans le sens positif, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_{2n}$. Je suppose que le côté $\alpha_n\alpha_{n+1}$ soit de la seconde sorte et les autres de la première sorte, de telle façon que les côtés $\alpha_0\alpha_1$ et $\alpha_0\alpha_{2n}$, $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}$, $\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}$, ..., $\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}$ et $\alpha_{2n-p}\alpha_{2n-p-1}$, ..., et enfin $\alpha_{n-1}\alpha_n$ et $\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}$, soient conjugués et par conséquent congruents. Si on laisse de côté α_n et α_{n+1}, tous les sommets seront de la première catégorie et se répartiront en n cycles fermés. L'un des cycles ne comprendra que le sommet α_0; les autres seront formés respectivement des sommets α_1 et α_{2n}, α_2 et α_{2n-1}, α_3 et α_{2n-2}, ..., enfin α_{n-1} et α_{n+2}; de sorte que les angles curvilignes α_0, $\alpha_1+\alpha_{2n}$, $\alpha_2+\alpha_{2n-1}$, ..., $\alpha_{n-1}+\alpha_{n+2}$ devront être des parties aliquotes de 2π. Quant aux angles α_n et α_{n+1}, ils seront forcément droits, puisque les côtés de la première sorte $\alpha_{n-1}\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$ coupent orthogonalement le cercle fondamental, dont le côté $\alpha_n\alpha_{n+1}$ n'est qu'un arc. Nous construirons ensuite un polygone R'_0 symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental. J'appellerai α'_i le sommet de R'_0 qui est symétrique de α_i par rapport au cercle fondamental.

On voit aisément que le polygone R_0 est de la cinquième famille et du genre zéro, et qu'on peut s'en servir pour définir un groupe fuchsien et une infinité de fonctions fuchsiennes. Celles-ci peuvent toutes s'exprimer rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appellerai

$$x = f(z).$$

Comme on peut choisir d'une infinité de manières, parmi nos fonctions fuchsiennes, une d'entre elles à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement, la fonction $x = f(z)$ ne serait pas complètement déterminée si nous n'ajoutions quelques conditions de plus.

Soient β et γ deux points du côté de la seconde sorte $\alpha_n\alpha_{n+1}$; je supposerai qu'on a

$$f(\alpha_n) = f(\alpha_{n+1}) = 0, \qquad f(\beta) = 1, \qquad f(\gamma) = \infty.$$

Je poserai ensuite

$$f(\alpha_i) = a_i, \qquad f(\alpha'_i) = a'_i.$$

Le polygone $R_0 + R'_0$ étant symétrique par rapport au cercle fondamental, on peut voir, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, que les nombres a_i et a'_i sont imaginaires conjugués.

Posons maintenant

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

la fonction v satisfera à une équation différentielle de la forme (3 *bis*) (§ IV) puisque le groupe fuchsien correspondant est de genre zéro. Cette équation, comme on le voit aisément, peut s'écrire :

$$(3\ bis)\qquad \frac{d^2v}{dx^2} = v\frac{P(x)}{[Q(x)]^2},$$

$Q(x)$ étant le produit $(x-a_0)(x-a'_0)(x-a_1)(x-a'_1)\ldots(x-a_{n-1})(x-a'_{n-1})$ et $P(x)$ étant un polynome de degré $4n-4$ en x, ayant tous ses coefficients réels.

X. — Résumé.

En étudiant les exemples précédents, j'ai rencontré différents résultats qui sont communs à toutes les fonctions fuchsiennes. Je ne crois pas utile d'en donner la démonstration dans le cas le plus général; car elle ne différerait pas de celles que nous avons données dans les divers cas particuliers et je serais entraîné à des redites sans intérêt. Je me bornerai donc à les énoncer ici sous forme de résumé.

Formons avec une fonction rationnelle quelconque $H(z)$ la série thétafuchsienne

$$(1)\qquad \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \Theta[z, H(z)].$$

Cette série pourra toujours se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y),$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de ces deux fonctions fuchsiennes x et y, à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$(3)\qquad \psi(x, y) = 0.$$

Pour qu'une expression de la forme (2) puisse se mettre sous la forme (1), il faut qu'elle s'annule quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie du polygone R_0.

A cette condition, toute expression de la forme (2) peut se mettre sous la forme (1) pourvu que m soit un entier plus grand que 1.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux séries telles que (1).

Les séries de la forme (1) sont de deux espèces : celles qui ont des infinis et celles qui n'en ont pas. Ces dernières peuvent s'exprimer linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles. Il y a donc entre les séries thétafuchsiennes de la deuxième espèce une infinité de relations linéaires.

Voici une de ces relations qui peut servir de point de départ pour trouver, sinon toutes les autres, au moins un grand nombre d'entre elles.

Soit $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe G. On aura identiquement

$$\Theta[z, H(z)] = \Theta\left[z, H\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)(\gamma z+\delta)^{-2m}\right](\gamma z+\delta)^{2m}.$$

Considérons maintenant une fonction de la forme suivante :

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y),$$

$F(x, y)$ désignant toujours une fonction rationnelle et m un entier plus grand que 1. Je suppose de plus que cette fonction s'annule quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie de R_0.

Soit q le nombre des infinis distincts de $\Lambda(z)$; soient $z_1, z_2, \ldots, z_q$ ces infinis distincts; $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les résidus correspondants; soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque de z n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental.

On aura identiquement

$$(4) \qquad \Lambda(z)\varphi(z) = \sum_{k=1}^{k=q}\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k\,\varphi\left(\dfrac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right)}{z-\dfrac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}}(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2m},$$

si les fonctions fuchsiennes n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et

$$(4\ bis) \qquad \Lambda(z) = \sum_{k=1}^{k=q}\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k}{z-\dfrac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}}(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2m} + P(z)$$

[$P(z)$ étant un polynome entier en z] si les fonctions fuchsiennes existent dans tout le plan.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut d'une infinité de manières se mettre sous la forme du quotient de deux séries telles que (4) ou (4 *bis*).

XI. — Historique.

Si on laisse de côté les fonctions doublement périodiques, les premières fonctions fuchsiennes qui aient été signalées sont les fonctions modulaires. Elles se présentaient pour ainsi dire d'elles-mêmes dans l'étude des transcendantes elliptiques, et leurs propriétés principales, en particulier celles d'être uniformes et d'admettre une ligne singulière essentielle, ont été remarquées depuis longtemps. D'ailleurs les travaux dont elles ont été l'objet et les résultats remarquables obtenus dans ces derniers temps par MM. Hermite, Dedekind, Fuchs et Klein sont trop connus pour que j'aie besoin d'insister.

Mais il est une autre catégorie de fonctions fuchsiennes dont l'existence a été signalée dès 1872. Ce sont celles auxquelles donne naissance l'équation hypergéométrique de Gauss; ces fonctions ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons étudiées dans le paragraphe V et on les obtient quand le polygone R_0 considéré dans ce paragraphe est symétrique et se réduit à un quadrilatère.

Dans un Mémoire inséré au Tome 75 du *Journal de Borchardt*, M. Schwarz annonce sans démonstration que ces fonctions sont uniformes et admettent un cercle comme ligne singulière essentielle. C'était du même coup annoncer la discontinuité du groupe correspondant, comme je l'ai déjà fait remarquer dans l'historique du Mémoire sur les groupes fuchsiens. Malheureusement, détourné de ce sujet par d'autres études, M. Schwarz s'est borné aux quelques lignes qu'il avait consacrées à ces transcendantes et n'a pas poussé plus loin ses recherches.

Dans un autre ordre d'idées, M. Schwarz avait obtenu d'autres résultats qui se rapportent indirectement à notre sujet. Dans divers Mémoires insérés aux Tomes 70 et 74 du *Journal de Borchardt* et aux *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, M. Schwarz a démontré d'une manière rigoureuse le principe dit de Dirichlet et la possibilité de l'*Abbildung* du cercle sur une figure plane quelconque et en particulier sur un polygone limité par des arcs de cercle. S'il avait connu les conditions de discontinuité des groupes, il aurait pu être conduit ainsi à démontrer l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique.

J'aurais donc pu me servir de ces résultats, mais j'ai préféré suivre une autre voie :

1° Parce que je n'aurais pu démontrer ainsi l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas où le polygone R_0 n'est pas symétrique ;

2° Parce que les développements en séries dont j'ai fait usage me donnaient non seulement la démonstration de l'existence de la fonction, mais son expression analytique.

MÉMOIRE

SUR

LES GROUPES KLEINÉENS[1]

Acta mathematica, t. 3, p. 49-92; 1883.

I. — Substitutions imaginaires.

Dans un Mémoire antérieur (²), j'ai étudié les groupes discontinus formés par les substitutions linéaires à coefficients réels. Dans le présent travail, j'ai l'intention d'exposer quelques résultats relatifs aux groupes de substitutions linéaires à coefficients imaginaires. Ces substitutions se classent naturellement en quatre catégories, comme on va le voir.

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

une substitution quelconque où je suppose toujours

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Si l'on a

$$(\alpha + \delta)^2 = 4,$$

la substitution peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{1}{z - a}, \frac{1}{z - a} + K\right),$$

a et K étant des constantes. On dit alors qu'elle est *parabolique*.

Si l'on a

$$(\alpha + \delta)^2 < 4,$$

(¹) Terminé le 19 mai 1883; imprimé le 8 septembre 1883. N. E. N.

(²) *Théorie des groupes fuchsiens*, ce Tome, p. 108-168. N. E. N.

la substitution peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{z-a}{z-b},\ K\frac{z-a}{z-b}\right),$$

a, b, K étant des constantes.

Si l'on a

$$(\alpha+\delta)^2 \text{ réel positif et } > 4,$$

K est réel positif et la substitution est *hyperbolique*.

Si l'on a

$$(\alpha+\delta)^2 \text{ réel positif et } < 4,$$

K est imaginaire ou négatif et a pour module 1, la substitution est *elliptique*.

Si enfin $(\alpha+\delta)^2$ est imaginaire ou négatif, K est également imaginaire ou négatif et la substitution est *loxodromique*.

Une propriété commune à toutes ces substitutions linéaires c'est de transformer les cercles en cercles. Représentons, en effet, à l'exemple de M. Hermite, les quantités imaginaires conjuguées de u, v, ... par la notation u_0, v_0, ...

La substitution

$$(1)\qquad \left(z,\ \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

peut s'écrire

$$\left(z_0,\ \frac{\alpha_0 z_0+\beta_0}{\gamma_0 z_0+\delta_0}\right).$$

L'équation générale d'un cercle s'écrit d'ailleurs

$$(2)\qquad Azz_0+Bz+B_0z_0+C=0,$$

A et C étant essentiellement réels [1], et il est clair qu'on retombera sur ce cercle (2) en appliquant la substitution (1) au cercle dont voici l'équation

$$\begin{aligned}&A(\alpha z+\beta)(\alpha_0 z_0+\beta_0)+B(\alpha z+\beta)(\gamma_0 z_0+\delta_0)\\&\quad+B_0(\gamma z+\delta)(\alpha_0 z_0+\beta_0)+C(\gamma z+\delta)(\gamma_0 z_0+\delta_0)=0\end{aligned}$$

ou bien

$$(3)\qquad \begin{aligned}&zz_0(A\alpha\alpha_0+B\alpha\gamma_0+B_0\gamma\alpha_0+C\gamma\gamma_0)\\&+\ z\ (A\alpha\beta_0+B\alpha\delta_0+B_0\gamma\beta_0+C\gamma\delta_0)\\&+\ z_0(A\beta\alpha_0+B\beta\gamma_0+B_0\delta\alpha_0+C\delta\gamma_0)\\&+\ \ \ (A\beta\beta_0+B\beta\delta_0+B_0\delta\beta_0+C\delta\delta_0)=0.\end{aligned}$$

Écrivons maintenant l'équation d'une inversion par rapport au cercle (2),

[1] Pour que le rayon du cercle soit réel, il faut encore que $BB_0-AC>0$. On vérifie aisément que l'expression analogue formée avec les coefficients de l'équation (3) est égale à

$$(BB_0-AC)(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha_0\delta_0-\beta_0\gamma_0)=BB_0-AC$$

et par conséquent positive. N. E. N.

c'est-à-dire de l'opération qui consiste à changer un point quelconque z en son transformé par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle de la transformation le centre du cercle (2) et pour paramètre de la transformation le carré du rayon de ce cercle. Voici cette équation :

Soit t le transformé de z par cette inversion, on aura

$$t + \frac{B_0}{A} = \frac{BB_0 - AC}{A(Az_0 + B)}.$$

Soient C_1 et C_2 deux cercles quelconques, et appelons I_1 et I_2 les inversions opérées respectivement par rapport à ces deux cercles. Si nous faisons subir à un point quelconque l'inversion I_1 puis l'inversion I_2, l'opération résultante qu'on pourra représenter par la notation $I_1 I_2$, sera une substitution linéaire comme il est aisé de s'en assurer. Cette substitution sera parabolique si les deux cercles C_1 et C_2 se touchent, elliptique s'ils se coupent, et hyperbolique s'ils ne se coupent pas.

Supposons qu'on étudie la résultante non plus de deux, mais de plusieurs inversions successives. Si ces inversions sont en nombre pair, la résultante sera une substitution linéaire; si elles sont en nombre impair, la résultante sera une opération plus complexe qui pourra être regardée comme une substitution linéaire suivie d'une inversion. De plus, *toute substitution linéaire peut être regardée d'une infinité de manières comme la résultante d'un nombre pair d'inversions.*

Le groupe obtenu en combinant de diverses manières les différentes inversions imaginables contient donc toutes les substitutions linéaires.

Posons

$$z = \xi + \eta\sqrt{-1},$$

ξ et η seront les coordonnées d'un point représentatif de z dans son plan.

Considérons maintenant un point quelconque, non plus dans le plan $\xi\eta$, mais dans l'espace, et soient ξ, η, ζ ses coordonnées; je supposerai ζ positif de telle façon que le point considéré soit au-dessus du plan des $\xi\eta$. On a vu que la substitution (1) change un point quelconque ξ, η du plan des $\xi\eta$ en un autre point de ce même plan. Nous allons étendre la définition de la substitution (1) de façon qu'on puisse appliquer cette substitution, non seulement à un point du plan $\xi\eta$, mais à un point quelconque de l'espace. La substitution (1), nous l'avons vu, peut être regardée comme la résultante d'un certain nombre d'inversions faites successivement par rapport à certains cercles du plan des $\xi\eta$ que j'appelle $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles. Considérons l'opération qui consiste à effectuer n inversions successivement par rapport aux sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$. Cette opération, si on l'applique à un point du plan des $\xi\eta$, ne diffère pas de la substitution (1). On pourra donc définir encore ainsi la substitution (1) quand il s'agira de l'appliquer à un point de l'espace situé en dehors du plan des $\xi\eta$.

Une inversion par rapport à l'une des sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ transforme les sphères en sphères; elle transforme en lui-même le plan des $\xi\eta$; elle conserve les angles; elle transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable; toutes ces propriétés appartiennent donc à leur résultante, c'est-à-dire à la substitution (1) généralisée.

Supposons que l'inversion par rapport au cercle C_1, par exemple, change un certain cercle K du plan des $\xi\eta$ en un autre cercle K_1 de ce même plan. Soient S et S_1 les sphères qui ont même centre et même rayon que K et K_1; il est clair que l'inversion par rapport à la sphère Σ_1 changera S en S_1. Si donc la substitution (1) change le cercle K en un certain cercle K_n, et si S et S_n sont les sphères qui ont même rayon que K et K_n, la substitution (1) généralisée changera S en S_n. En effet, la substitution (1) équivaut à n inversions opérées respectivement par rapport aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; ces inversions changent successivement le cercle K en K_1 puis en K_2, ... puis enfin en K_n. Soit S_i la sphère qui a même rayon et même centre que K_i. La substitution (1) généralisée équivaudra à n inversions opérées respectivement par rapport aux sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$, et ces inversions changeront successivement la sphère S en S_1, puis en S_2, ..., puis enfin en S_n. C. Q. F. D.

Pour justifier la définition précédente, il faut établir ce qui suit :

La substitution (1) peut être regardée d'une *infinité de manières* comme la résultante d'un nombre pair d'inversions opérées par rapport à divers cercles du plan des $\xi\eta$. Les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ne sont donc pas parfaitement déterminés. Il faut faire voir que la substitution (1) généralisée est cependant une opération parfaitement déterminée. Supposons, en effet, que la substitution (1) puisse être regardée :

1° D'une part, comme la résultante de n inversions opérées par rapport aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

2° D'autre part, comme la résultante de p inversions opérées par rapport à p autres cercles $C'_1, C'_2, \ldots, C'_p$ du plan des $\xi\eta$.

Soit Σ_i la sphère qui a même centre et même rayon que C_i''.

Soit maintenant un point P quelconque de l'espace ; appliquons-lui successivement les inversions par rapport aux sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$; nous obtiendrons un certain point Q. Appliquons maintenant au point P successivement les inversions par rapport aux sphères $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_p'$, nous obtiendrons un certain point Q'. Appelons ces deux opérations (P, Q), (P, Q') ; elles satisfont toutes deux à la définition de la substitution (1) généralisée, il faut donc démontrer que les deux points Q et Q' coïncident. Eh bien, nous pouvons faire passer par le point P trois sphères S, S', S'', ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$ et coupant ce plan suivant trois grands cercles K, K', K''.

La substitution (1) changera ces trois grands cercles en trois autres cercles K_1, K_1' et K_1'' du plan des $\xi\eta$. Soient S_1, S_1' et S_1'' les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles ; l'opération (P, Q), de même que l'opération (P, Q'), change S, S' et S'' en S_1, S_1' et S_1''. Le point Q, de même que le point Q', se trouve donc à l'intersection des trois sphères S_1, S_1' et S_1''. Donc ces deux points coïncident. Donc la substitution (1) généralisée est une opération parfaitement déterminée. C. Q. F. D.

Il reste à trouver les équations de cette opération. Pour définir un point P de l'espace, nous emploierons les trois coordonnées suivantes

$$z = \xi + i\eta, \qquad z_0 = \xi - i\eta, \qquad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = zz_0 + \zeta^2 ;$$

ζ étant supposé positif, ces trois coordonnées suffisent pour définir complètement le point P.

Soient ρ'^2, z' et z_0 les trois coordonnées du point Q transformé de P par la substitution (1) généralisée. Exprimons que le point P se trouve sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (3) ; j'ai à écrire

$$\begin{aligned}(4)\qquad & \rho^2(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\gamma\alpha_0 + C\gamma\gamma_0)\\ & + z\,(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\gamma\beta_0 + C\gamma\delta_0)\\ & + z_0(A\beta\alpha_0 + B\beta\gamma_0 + B_0\delta\alpha_0 + C\delta\gamma_0)\\ & + (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\delta\beta_0 + C\delta\delta_0) = 0.\end{aligned}$$

Si le point P est sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (3), le point Q devra se trouver sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (2) transformé de (3) par la substitution (1) ; d'où l'équation

$$(5)\qquad A\rho'^2 + Bz' + B_0 z_0' + C = 0.$$

Ces deux équations, si l'on y regarde A, B, B_0 et C comme les inconnues, doivent être équivalentes. On a donc

$$\rho'^2 = \frac{\rho^2 \alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\beta\alpha_0 + \beta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0},$$

$$z' = \frac{\rho^2 \alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0},$$

$$z'_0 = \frac{\rho^2 \gamma\alpha_0 + z\gamma\beta_0 + z_0\delta\alpha_0 + \delta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}.$$

Telles sont les équations de la substitution (1) généralisée.

Passons aux propriétés générales de cette substitution.

Si la substitution (1) est elliptique, elle change en eux-mêmes tous les points du cercle C qui passe par les deux points doubles, qui a son centre dans le plan des $\xi\eta$ au milieu de la droite qui joint ces deux points doubles, et dont le plan est perpendiculaire au plan des $\xi\eta$. Elle change également en eux-mêmes une infinité de cercles dont la propriété caractéristique est que toutes les sphères qui passent par ces cercles coupent orthogonalement le cercle C précédemment défini. Nous appellerons ce cercle C *cercle double* de la substitution elliptique.

Si la substitution (1) est hyperbolique, il n'y a que deux points de l'espace qui ne sont pas altérés par la substitution : ce sont les deux points doubles situés dans le plan des $\xi\eta$. La substitution change en elles-mêmes toutes les circonférences et toutes les sphères qui passent par ces deux points.

Si la substitution (1) est parabolique, il n'y a qu'un seul point double inaltéré par cette opération qui change d'ailleurs en elles-mêmes toutes les circonférences et toutes les sphères qui sont tangentes au point double à une certaine droite du plan des $\xi\eta$.

Supposons enfin que la substitution (1) soit loxodromique; elle n'altérera pas le cercle C qui a pour diamètre la droite qui joint les points doubles et dont le plan est normal au plan des $\xi\eta$. Mais, à l'exception des points doubles, elle altérera tous les points de ce cercle.

En résumé, toute substitution qui n'altère pas un point situé en dehors du plan des $\xi\eta$ est elliptique.

Nous avons vu plus haut que la substitution (1) généralisée transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable. Cherchons le rapport de similitude. Si l'on considère une inversion unique, il est évident que les dimensions homologues de deux figures infiniment petites transformées l'une et l'autre, seront entre elles comme les coordonnées ζ des centres de gravité de ces figures. Il en sera donc de même quand, au lieu d'une inversion unique, on envisagera la résultante de plusieurs inversions, c'est-à-dire la substitution (1) généralisée.

Si donc on appelle ds, $d\omega$ ou dv un arc de courbe infiniment petit, ou une aire plane ou courbe infiniment petite, ou un volume infiniment petit, et si ζ est la distance de cet arc, de cette aire ou de ce volume au plan des $\xi\eta$; si l'on appelle ds', $d\omega'$ ou dv' les transformées de ds, $d\omega$ ou dv par la substitution (1) généralisée, et si ζ' est la distance de ds', $d\omega'$ ou dv' au plan des $\xi\eta$, on aura

$$\frac{ds}{\zeta} = \frac{ds'}{\zeta'}, \qquad \frac{d\omega}{\zeta^2} = \frac{d\omega'}{\zeta'^2}, \qquad \frac{dv}{\zeta^3} = \frac{dv'}{\zeta'^3}. \tag{6}$$

Nous dirons que deux figures sont *congruentes* lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une opération telle que la substitution (1) généralisée.

Nous appellerons L d'un arc l'intégrale

$$\int \frac{ds}{\zeta},$$

étendue aux différents éléments de cet arc. Nous appellerons S d'une aire plane ou courbe, l'intégrale

$$\int \frac{d\omega}{\zeta^2},$$

étendue aux divers éléments de cette aire et enfin nous appellerons V d'un solide l'intégrale

$$\int \frac{dv}{\zeta^3},$$

étendue aux divers éléments de ce solide.

Il résulte des équations (6) que deux arcs congruents ont même L, que deux aires congruentes ont même S et deux solides congruents même V.

Supposons maintenant qu'on enlève aux mots *droite* et *plan* leur signification pour appeler *droite* ou *plan* toute circonférence ou toute sphère qui coupe orthogonalement le plan des $\xi\eta$. Supposons aussi qu'enlevant aux mots *longueurs*, *surfaces* et *volumes* leur signification, on appelle ainsi ce que nous venons d'appeler L, S et V. Supposons enfin que l'on conserve aux mots *circonférence*, *sphère* et *angle* leur signification habituelle. On reconnaîtra alors qu'interprétés de la sorte, tous les théorèmes de la géométrie non euclidienne de Lobatschewski, c'est-à-dire de la géométrie qui n'admet pas le postulatum d'Euclide, sont parfaitement exacts. On voit aussi quel lien il y a entre la théorie des substitutions linéaires et la géométrie non euclidienne. C'est de ce même lien que M. Klein a fait usage pour trouver tous les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire.

II. — Groupes discontinus.

Je me propose de former les groupes discontinus qui sont dérivés d'un nombre fini de substitutions linéaires à coefficients imaginaires. Mais, avant d'aller plus loin, il y a lieu de faire une distinction qui n'avait pas de raison d'être dans la théorie des groupes fuchsiens, mais qui est ici d'une importance capitale. Cette distinction a été très nettement établie par M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd XXI, p. 176).

Nous appellerons *substitution infinitésimale* toute substitution linéaire telle que les modules de $\alpha - 1$, β, γ, $\delta - 1$ soient infiniment petits.

Si un groupe contient une substitution infinitésimale, c'est-à-dire si l'on peut trouver dans ce groupe des substitutions telles que les quatre modules cités plus haut soient plus petits que toute quantité donnée sans être nuls, le groupe est continu.

Mais, parmi les groupes qui ne satisfont pas à cette condition, c'est-à-dire parmi les groupes discontinus, il y a lieu de distinguer deux classes que nous appellerons les *groupes proprement* et *improprement discontinus*.

Un groupe sera improprement discontinu dans le voisinage d'un point z si, dans un domaine D enveloppant le point z, on peut trouver une infinité de transformés de ce point par les substitutions du groupe, et cela quelque petit que soit le domaine D.

Le groupe sera proprement discontinu dans le cas contraire.

Si, par exemple, il s'agit d'un groupe de substitutions appliquées à une quantité réelle z, on pourra prendre pour le domaine D le segment de droite compris entre le point $z - \varepsilon$ et le point $z + \varepsilon$; s'il s'agit de substitutions appliquées à une quantité imaginaire z ou à un point z du plan, le domaine D sera un cercle ayant pour centre le point z; s'il s'agit d'un point P de l'espace, D sera une sphère ayant P pour centre, etc.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple simple, considérons le groupe formé par les substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers réels, tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Il est clair que ce groupe ne contient pas de substitution infinitésimale, il est donc discontinu. On voit de plus que si z est réel, on peut choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de telle façon que

$$\bmod\left(z - \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

soit aussi petit qu'on veut, sans être nul; tandis que cela est impossible si z est imaginaire. Le groupe est donc improprement discontinu pour z réel et proprement discontinu pour z imaginaire.

Ce qui fait que nous n'avons pas eu à faire cette distinction dans le cas des groupes fuchsiens, c'est que tout groupe discontinu formé de substitutions réelles est proprement discontinu toutes les fois que z est imaginaire. C'est ce que je vais démontrer ici, car la démonstration que je veux donner de ce fait permettra de comprendre plus facilement ce qui se rapporte au cas plus général qui nous occupe dans ce Mémoire.

Soit G un groupe quelconque formé de substitutions réelles, soit z un point imaginaire quelconque; supposons que, dans tout domaine D entourant le point z, il y ait une infinité de transformés de ce point par des substitutions de G; je dis que ce groupe contiendra des substitutions infinitésimales.

En effet je dirai qu'une quantité qui dépend d'une variable ε est de l'ordre de ε si elle s'annule avec cette variable et qu'une substitution est de l'ordre de ε si $\alpha - 1$, $\delta - 1$, β et γ s'annulent avec ε. Cela posé :

1° Toute substitution Σ qui change z en $z + \zeta$, ζ étant une quantité infiniment petite de l'ordre de ε, peut être regardée comme la résultante d'une substitution elliptique S qui admet le point z comme point double et d'une substitution hyperbolique s qui est infinitesimale et de l'ordre de ε. Nous écrirons

$$\Sigma = Ss.$$

2° Si s et s_1 sont deux substitutions de l'ordre de ε, leur resultante ss_1 sera aussi infinitésimale et de l'ordre de ε.

3° Si s est une substitution de l'ordre de ε et S une substitution finie, la résultante de la substitution inverse de S, de s et de S, résultante que nous écrirons $S^{-1}s\,S$ [1], sera infinitésimale et de l'ordre de ε.

4° Si S et S_1 sont deux substitutions elliptiques ayant le point z pour point double, elles seront permutables, c'est-à-dire qu'on aura

$$(1) \qquad SS_1 = S_1 S, \qquad S_1 = S^{-1} S_1 S.$$

Maintenant, par hypothèse, nous avons dans le groupe une infinité de substitutions qui changent z en $z + \zeta$, $z + \zeta_1$, ...; ζ, ζ_1, ... étant des quantités de l'ordre de ε. Soient Σ et Σ_1 deux quelconques d'entre elles. On aura

$$\Sigma = Ss, \qquad \Sigma_1 = S_1 s_1,$$

S et S_1 admettant le point z comme point double, s et s_1 étant infinitésimales.

La substitution

$$\Sigma\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1^{-1}$$

fera partie du groupe; elle ne se réduira pas à la substitution identique (z, z) parce qu'en général Σ et Σ_1 n'auront pas même point double.

Je dis qu'elle sera infinitésimale. En effet elle peut s'écrire

$$SsS_1 s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1}$$

ou en vertu de la relation (1)

$$SsS^{-1} S_1 S s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1}.$$

Or, en appliquant les principes 2° et 3° de la page 266, on verrait successivement que SsS^{-1}, que $s_1 s^{-1}$, que $S(s_1 s^{-1})S^{-1}$, que $(Ss_1 s^{-1} S^{-1})s_1^{-1}$, que $S_1(Ss_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1})S_1^{-1}$, et enfin que

$$(SsS^{-1})(S_1 S s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1})$$

sont infinitésimales et de l'ordre de ε.

Le groupe contient donc une substitution infinitésimale, il est continu.

Mais si un groupe de substitutions réelles ne peut être improprement discontinu dans le voisinage d'un point z imaginaire, il peut au contraire être improprement discontinu dans le voisinage d'un point z réel. En effet le groupes fuchsiens de la première, de la deuxième et de la sixième familles,

---

[1] Nous désignerons, suivant l'usage, par la notation S^{-1} la substitution inverse de S; par la notation SS_1 la résultante de S et de S_1, par la notation S^m la résultante de m substitutions S successives.

c'est-à-dire ceux dont les polygones générateurs n'ont pas de côté de la seconde sorte, sont improprement discontinus dans le voisinage de tous les points z réels. Au contraire les groupes fuchsiens des autres familles sont proprement discontinus dans le voisinage des points réels qui appartiennent à un côté de la seconde sorte du polygone générateur ou d'un de ses transformés; ils ne sont improprement discontinus que dans le voisinage des points singuliers.

Revenons à l'étude des groupes formés de substitutions imaginaires ou plutôt des substitutions plus générales définies dans le paragraphe précédent.

Je dis qu'un pareil groupe ne peut être improprement discontinu dans le voisinage d'un point P situé en dehors du plan des $\xi\eta$. Soit, en effet, un pareil point P situé au-dessus du plan des $\xi\eta$ et un domaine D entourant ce point P. Supposons que, quelque petit que soit ce domaine D, il contienne une infinité de transformés du point P par les substitutions du groupe; je dis que le groupe sera continu. En effet :

1° Soit Σ une substitution qui change P en P', la distance PP' étant infinitésimale de l'ordre de ε; je dis qu'on pourra écrire

$$\Sigma = Ss,$$

S étant une substitution elliptique dont le cercle double passe par P et s étant une substitution hyperbolique infinitésimale de l'ordre de ε. En effet, la substitution Σ^{-1} changera P' en P. Il existera une substitution hyperbolique infinitésimale qui changera P' en P, puisque les points P' et P sont infiniment voisins. Je l'appelle s^{-1} et je pose

$$\Sigma^{-1} = s^{-1}S^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad \Sigma = Ss.$$

La substitution S n'altérera pas le point P; donc, d'après les principes du paragraphe précédent, ce sera une substitution elliptique dont le cercle double passe par P. C. Q. F. D.

2° et 3° Les principes 2° et 3° de la page 266 subsistent ici, cela est évident.

4° Si S et S_1 sont deux substitutions elliptiques ayant même cercle double, on aura

$$SS_1 = S_1S, \qquad S_1 = S^{-1}S_1S.$$

5° Si S_1 est une substitution elliptique ayant pour cercle double C_1; si C'_1 est un cercle, orthogonal au plan des $\xi\eta$, et rencontrant le cercle C_1 en un point P situé au-dessus du plan des $\xi\eta$ sous un angle infiniment petit, on pourra poser

$$S_1 = S_1 \sigma,$$

S'_1 étant une substitution elliptique admettant C_1 pour cercle double et σ étant une substitution elliptique infinitésimale.

Cela posé, nous avons par hypothèse dans le groupe une infinité de transformations Σ, Σ_1, Σ_2, ... qui change P en des points infiniment voisins. On aura

$$\Sigma = Ss, \qquad \Sigma_1 = S_1 s_1, \qquad \Sigma_2 = S_2 s_2, \qquad \ldots,$$

s, s_1, ... seront infinitésimales pendant que S, S_1, S_2, ... seront des substitutions elliptiques dont les cercles doubles passeront par P. On aura donc une infinité de substitutions elliptiques dont les cercles doubles passeront par P. Il faut de toute nécessité qu'on puisse trouver parmi elles deux substitutions S et S_1 dont les cercles doubles C et C_1 se coupent sous un angle nul ou infiniment petit. On pourra alors poser

$$S_1 = S_1 \sigma,$$

σ étant infinitésimale ou se réduisant à la substitution identique et S'_1 admettant même cercle double C que S de telle façon qu'on ait

$$S'_1 = S^{-1} S'_1 S.$$

Considérons donc ces deux substitutions S et S_1 et les substitutions correspondantes Σ, Σ_1. La substitution

$$\Sigma \Sigma_1 \Sigma^{-1} \Sigma_1^{-1}$$

fera partie du groupe; je dis qu'elle sera infinitésimale. En effet elle peut s'écrire

$$S s S_1 s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1}$$

ou bien

$$S s S'_1 \sigma s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} \sigma^{-1} S_1'^{-1}$$

ou enfin

$$T = S s S^{-1} S'_1 S \sigma s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} \sigma^{-1} S_1'^{-1}.$$

Or en vertu du principe	3°	$T_1 = S s S^{-1}$	sera infinitésimale,
	»	2°	$T_2 = \sigma s_1 s^{-1}$	»
	»	3°	$T_3 = S T_2 S^{-1}$	»
	»	2°	$T_4 = T_3 s_1^{-1} \sigma^{-1}$	»
	»	3°	$T_5 = S'_1 T_4 S_1'^{-1}$	»
Enfin	»	2°	$T = T_1 T_5$	»

C. Q. F. D.

Ainsi donc, si nous envisageons un groupe discontinu, il sera proprement discontinu pour tout point P situé en dehors du plan des $\xi\eta_i$. Il résulte de là que toute la partie de l'espace située au-dessus de ce plan sera divisée en une infinité de régions R_0, R_1, ..., R_i, ...; qu'à chacune de ces régions correspondra une des substitutions du groupe; à la région R_i, par exemple, la substitution S_i, et de telle façon que cette substitution S_i change R_0 en R_i. C'est tout à fait la même chose que ce que nous avons observé pour les groupes fuchsiens.

Mais ce que nous nous proposons, c'est d'obtenir des groupes de substitutions imaginaires proprement discontinus même pour les points du plan des $\xi\eta_i$. Ce sont ceux-là seuls, en effet, qui peuvent être utiles dans la théorie des fonctions.

Eh bien, rappelons-nous ce que nous avons observé pour les groupes fuchsiens. Ces groupes sont tous proprement discontinus pour les valeurs imaginaires de z, de sorte que la partie du plan située au-dessus de l'axe des quantités réelles se trouve divisée en une infinité de polygones R_0, R_1, ..., R_i, ... Comment voit-on alors si le groupe reste proprement discontinu pour les valeurs réelles de z? Si le polygone R_0 n'a pas de côté de la seconde sorte, c'est-à-dire s'il est tout entier au-dessus de l'axe des quantités réelles, le groupe est improprement discontinu pour les valeurs réelles de z; il est proprement discontinu, au contraire, si R_0 a un côté de la seconde sorte, c'est-à-dire si tout un côté de ce polygone appartient à l'axe des quantités réelles.

C'est la même chose ici; si la région R_0 définie plus haut est tout entière au-dessus du plan des $\xi\eta_i$, ou n'a avec ce plan qu'un point commun ou une ligne commune, le groupe est improprement discontinu pour les points du plan des $\xi\eta_i$; il est proprement discontinu, au contraire, si une portion de la surface de la région R_0 appartient à ce plan.

III. — Polygones générateurs.

Considérons un groupe de substitutions imaginaires proprement discontinu, même pour les points du plan des $\xi\eta_i$.

Nous dirons que c'est un *groupe kleinéen*. Un pareil groupe subdivisera une partie du plan des $\xi\eta_i$ en une infinité de régions R_0, R_1, ..., R_i, ..., de telle façon qu'à chaque région R_i corresponde une substitution S_i du groupe qui change

R_0 en R_i. Considérons la région R_0 et une autre région quelconque R_1 limitrophe de R_0; elles seront séparées par une portion du périmètre de R_0 qui leur servira de frontière commune et que j'appellerai *côté* de R_0. Maintenant un pareil côté pourra être une courbe fermée ou un arc de courbe limité à deux points qui seront des *sommets* de R_0. Soit C un quelconque des côtés de R_0, il y aura toujours un autre côté C' de R_0 tel qu'une des substitutions du groupe change C en C'. Les côtés C et C' seront dits *conjugués*.

La subdivision du plan ou d'une partie du plan en une infinité de régions R peut se faire d'une infinité de manières (*cf.* § IV et IX du *Mémoire sur les groupes fuchsiens*). Commençons par donner quelques définitions. La région R_0 s'appellera *polygone générateur du groupe;* je dirai que deux régions R et R″ sont équivalentes par rapport à un groupe G quand on peut passer de l'une à l'autre de la façon suivante. Décomposons R en un certain nombre de parties $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$. Soit r''_i la transformée de r'_i par une substitution S_i du groupe G. L'ensemble des régions partielles r''_i devra former la nouvelle région R''. Il est clair que si R_0 est un polygone générateur du groupe G, on pourra prendre aussi pour polygone générateur de ce groupe toute région équivalente à R_0. Supposons, en particulier, qu'on retranche de R_0 une portion quelconque P_0 de sa surface et qu'on ajoute à R_0 la surface P'_0 transformée de P_0 par une quelconque des substitutions du groupe. On obtient ainsi une région $R'_0 = R_0 + P'_0 - P_0$ équivalente à R_0, et l'on pourra, par conséquent, remplacer le polygone générateur R_0 par le polygone R'_0.

Nous pouvons profiter de cette circonstance pour simplifier la région R_0. En effet, soient C un côté quelconque de R_0 et C' son conjugué. Si C est un côté fermé, il en est de même de C'; si, au contraire, C est un côté ouvert ab, C' sera aussi un côté ouvert $a'b'$. Dans le premier cas, appelons K un cercle quelconque; dans le second cas, K sera un arc de cercle limité aux deux sommets a et b du côté C. Soit maintenant K' le transformé de K par celle des substitutions du groupe qui change C en C'. Dans le premier cas, K' sera, comme K, un cercle fermé; dans le second cas, K' sera un arc de cercle limité aux deux sommets a' et b' du côté C'. Appelons P_0 la portion du plan comprise entre K' et C'; P'_0 la portion comprise entre K' et C'. P'_0 sera la transformée de P_0 par une des substitutions du groupe. Nous pourrons donc remplacer la région R_0 par $R'_0 = R_0 - P_0 + P'_0$. Dans la nouvelle région R'_0, les côtés C et C' sont remplacés par les côtés K et K' qui sont des arcs de cercle.

Il est bon de remarquer que la région R'_0 n'est pas ainsi entièrement définie, car le cercle K n'est pas absolument déterminé par les conditions que nous lui avons imposées.

En opérant de même sur chacun des côtés de R_0, on finira par arriver à remplacer R_0 par une région analogue dont tous les côtés seront des cercles ou des arcs de cercle.

On peut rencontrer ici la même difficulté que nous avons observée dans le paragraphe IV du *Mémoire sur les groupes fuchsiens*. Il peut se faire que la région P_0, telle que nous l'avons définie, ne fasse pas tout entière partie de R_0. Dans ces conditions, on arriverait à une région R'_0 concave, au sens donné à ce mot dans le paragraphe cité; on tournerait la difficulté comme dans ce paragraphe.

Nous pouvons donc toujours supposer que la région R_0 est un polygone limité par des cercles et des arcs de cercle; mais il peut se faire que ce polygone ne soit pas simplement connexe, mais présente une connexion d'un ordre plus élevé.

Reportons-nous, en effet, au cas des groupes fuchsiens, à ceux de la troisième famille, par exemple. Le polygone R_0, tel que nous l'avons défini dans le Mémoire des *Acta mathematica*, t. I (¹), est simplement connexe et limité par des côtés de la première et de la deuxième sorte; mais si l'on adjoint au polygone R_0 le polygone R'_0 symétrique de R_0 par rapport à l'axe des quantités réelles, la région totale $R_0 + R'_0$, qui est l'analogue de la région R_0 étudiée ici, sera multiplement connexe.

Nous serons conduits, ici comme dans le paragraphe V du *Mémoire sur les groupes fuchsiens*, à distribuer en cycles les sommets de R_0; mais comme nous n'avons ici rien d'analogue aux côtés de la deuxième sorte, nous n'aurons que des cycles *fermés* et pas de cycles *ouverts*. Soit A_0 un sommet quelconque de R_0; soient $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ les sommets qui appartiennent au même cycle que A_0, écrits dans l'ordre où on les rencontre en appliquant la règle du paragraphe cité. Décrivons autour de A_0 un contour infiniment petit et supposons qu'en suivant ce contour on rencontre successivement les polygones R_0, $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}, R_n, \ldots$ Si $i < n$, le sommet A_0 considéré comme appartenant à R_i sera l'homologue de A_i; considéré comme appartenant à R_n, il sera l'homologue de A_0. Il suit de là que la substitution qui change R_0 en R_n admet A_0 pour point double. Elle peut être d'ailleurs elliptique, parabolique

(¹) *Théorie des groupes fuchsiens*, ce Tome, p. 122.

ou hyperbolique, mais non loxodromique. Cette quatrième hypothèse doit être rejetée [1].

En effet, soit $K = \rho e^{i\omega}$ le multiplicateur de notre substitution loxodromique; soit p un nombre entier assez grand pour que $p\omega > 2\pi$. Désignons par Σ_0 l'ensemble des polygones $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$; par Σ_1 l'ensemble des polygones $R_n, R_{n+1}, \ldots, R_{2n-1}$, c'est-à-dire la transformée de Σ_0 par notre substitution loxodromique; soient ensuite Σ_2 la transformée de Σ_1, Σ_3 celle de Σ_2, etc. Il est aisé de voir que Σ_p recouvrira partiellement l'une des régions $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$, ce qui est absurde puisque le groupe est supposé proprement discontinu.

Reste à examiner les trois premières hypothèses.

Dans le premier cas, nous dirons que le cycle est elliptique [2]; la somme des angles du cycle devra être une partie aliquote de 2π.

Dans le deuxième cas, le cycle sera parabolique; tous les angles du cycle seront nuls.

Dans le troisième cas, nous aurons un cycle hyperbolique; tous les angles du cycle seront encore nuls. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'on peut toujours remplacer le polygone R_0 par un autre équivalent et n'admettant pas de cycle hyperbolique [3].

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer qu'un cycle donné se compose d'un seul sommet. En effet, reprenons le polygone R_0, le sommet A_0 de ce polygone et les sommets $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ qui appartiennent au même cycle. Considérons aussi le contour infiniment petit que nous avons décrit autour de A_0 et les polygones $R_1, R_2, \ldots$ qu'on rencontre successivement en suivant ce contour. Soit S_i la substitution qui change R_0 en R_i. Décomposons

---

(1) La troisième hypothèse doit aussi être rejetée. Pour la même raison que dans le cas d'un groupe fuchsien, le polygone R_0 ne peut pas admettre de cycle hyperbolique. *Voir* la Note page 134. N. E. N.

(2) Les cycles que nous appelons ici *elliptiques, paraboliques* et *hyperboliques* sont analogues respectivement aux cycles de la première catégorie, de la troisième sous-catégorie et de la quatrième sous-catégorie du Mémoire sur les groupes fuchsiens.

(3) Nous avons vu déjà aux paragraphes IX et XI du *Mémoire sur les groupes fuchsiens* et au paragraphe II du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, que tout groupe du deuxième ordre de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille, est identique à un groupe de la troisième ou de la cinquième famille, ou à un groupe du premier ordre de la sixième ou de la septième famille. En d'autres termes, si le polygone générateur d'un groupe fuchsien admet un cycle de la quatrième sous-catégorie, on peut toujours, par le procédé du paragraphe IX, le remplacer par un autre polygone n'admettant pas de cycle de cette sous-catégorie. Il en est de même ici.

le polygone R_0 en n polygones partiels r_0, r_1, r_2, ..., r_{n-1}, de telle façon que le polygone partiel r_i admette le sommet A_i et n'admette aucun des autres sommets A_0, A_1, ..., A_{n-1}. Soit maintenant r'_i le transformé de r_i par S_i. Alors r'_0 ne différera pas de r_0; l'ensemble des régions partielles r'_0, r'_1, ..., r'_{n-1} formera un polygone R'_0 qui sera équivalent à R_0 et qui pourra, par conséquent, servir de polygone générateur pour notre groupe. Mais R'_0 admet le sommet A_0, et de telle façon que le cycle dont fait partie A_0 ne se compose que de ce seul sommet.

IV. — Polyèdres générateurs.

Considérons maintenant la moitié de l'espace située au-dessus du plan des $\xi\eta$ et la subdivision de cette portion de l'espace en une infinité de régions P_0, P_1, ..., P_i, ..., telles que la substitution S_i de notre groupe change P_0 en P_i.

Considérons la région P_0 et une région quelconque P_1 limitrophe de P_0; elles seront séparées par une portion de la surface de P_0 que j'appellerai une *face* de P_0; je dirai que ce sera une face de la première sorte. Si une portion du plan des $\xi\eta$ fait partie de la superficie de P_0, ce sera une face de la deuxième sorte. Ces dénominations sont tout à fait analogues à celles que nous avons employées dans la théorie des groupes fuchsiens. Deux faces limitrophes de P_0 seront séparées par une *arête*. Cette arête sera de la première sorte si elle sépare deux faces de la première sorte, et de la deuxième sorte si elle sépare une face de la première sorte et une de la deuxième sorte. Les faces de la première sorte seront conjuguées deux à deux, de telle façon que chacune de ces faces soit changée en sa conjuguée par l'une des substitutions du groupe. Il résulte de là que deux faces conjuguées sont congruentes.

De même que les faces se répartissent en paires, de même les arêtes se répartissent en cycles à la façon des sommets des polygones générateurs. Soit A_0 une arête quelconque de la première sorte; voici comment on trouvera les arêtes du même cycle. Soient F_0 l'une des faces que sépare l'arête A_0, F'_0 sa conjuguée; les faces F_0 et F'_0 sont congruentes. Soit A_1 celle des arêtes de F'_0 qui est homologue de A_0; elle séparera la face de F'_0 d'une autre face F_1. Nous opérerons sur la face F_1 et sur l'arête A_1 comme nous avons opéré sur la face F_0 et l'arête A_0. Nous obtiendrons ainsi une suite des faces F_0, F_1, F_2, F_3, ... et une suite d'arêtes A_0, A_1, A_2, A_3, ..., et nous nous arrêterons quand nous retomberons sur l'arête A_0. Toutes les arêtes ainsi obtenues feront partie d'un même cycle.

Soient $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ ces arêtes que je suppose au nombre de n. Supposons qu'autour de l'arête A_0 nous décrivions un contour infiniment petit : en décrivant ce contour, on traversera successivement q régions $P_0, P_1, \ldots, P_{q-1}$. Si $i < n$, l'arête A_0 considérée comme appartenant à P_i sera l'homologue de A_i; considérée comme appartenant à P_n, elle sera l'homologue de A_0. Ainsi, la substitution qui change P_0 en P_n n'altère pas A_0. Il suit de là :

1° Que $\dfrac{q}{n}$ est un nombre entier;

2° Que la substitution qui change P_0 en P_n est elliptique et a pour multiplicateur $e^{2i\pi\frac{n}{q}}$;

3° Que *l'arête A_0 est un cercle symétrique par rapport au plan des $\xi\eta$*;

4° Que la somme des dièdres relatifs aux différentes arêtes du cycle est une partie aliquote de 2π.

Ainsi, toutes les arêtes de la première sorte sont des circonférences dont le plan est perpendiculaire au plan des $\xi\eta$ et dont le centre est dans ce plan.

Les extrémités des arêtes s'appelleront des *sommets*. Parmi les sommets nous distinguerons :

1° Ceux qui sont en dehors du plan des $\xi\eta$, auxquels aboutissent trois ou plusieurs arêtes de la première sorte;

2° Ceux qui sont sur le plan des $\xi\eta$, auxquels aboutiront une ou plusieurs arêtes de la première sorte et deux ou plusieurs arêtes de la deuxième sorte;

3° Il faut ajouter aussi les *sommets isolés*. Si deux faces sont tangentes entre elles, le point de contact peut être en effet regardé comme un sommet et cependant il n'appartient à aucune arête de la première sorte.

Il est clair qu'on peut remplacer, comme dans le paragraphe précédent, la région P_0 par toute autre région P'_0 *équivalente*. Je dis qu'on pourra toujours s'arranger de telle façon que P'_0 soit un polyèdre limité par des sphères ou par des portions de sphères. Toutes les faces de la première sorte seront des sphères ou portions de sphères ayant leur centre dans le plan des $\xi\eta$; toutes les arêtes seront des circonférences ou des arcs de cercle.

Soient, en effet, F une face quelconque de la première sorte, F′ sa conjuguée; S la substitution qui change F en F′. Plusieurs cas sont possibles :

1° Ou bien la face F est limitée par une arête de la deuxième sorte, et cette arête est une courbe fermée. On appellera alors F_1 une demi-sphère quelconque ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$, et Q_0 la région limitée par F et F_1; la substitution S changera alors F_1 en une autre demi-sphère F'_1 et Q_0 en Q'_0, région limitée par F′ et F'_1. Les régions P_0 et $P'_0 = P_0 - Q_0 + Q'_0$ seront alors équivalentes;

2° Ou bien la face F est limitée par deux arêtes, dont une de la première sorte et admet deux sommets. On raisonnera de la même façon; on devra seulement s'astreindre à faire passer la sphère F_1 par l'arête de la première sorte, qui est une circonférence d'après ce qu'on a vu plus haut;

3° Ou bien la face F admet plusieurs arêtes de la première sorte situées sur une même sphère Σ qui a son centre dans le plan des $\xi\eta$. Dans ce cas la sphère F_1 devra être la sphère Σ;

4° Ou bien enfin les différentes arêtes de la première sorte de la face F ne sont pas sur une même sphère ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$. Dans ce cas, nous pourrons partager la face F en plusieurs autres f, f', f'', ... Je supposerai, par exemple, que la face partielle f n'est contiguë qu'à la face f', que f' n'est contiguë qu'à f et à f''; f'' à f' et à f''', etc. Je supposerai que la face partielle f est séparée de la face f' par une ligne α', dont les extrémités sont β' et γ'; que la face f' est séparée de la face f'' par une ligne α'' dont les extrémités sont β'' et γ'', etc. Je supposerai que toutes les arêtes de la première sorte contenues dans f et les sommets β' et γ' sont sur une même sphère f_1 ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$; que les arêtes de la première sorte contenues dans f' et les sommets β', γ', β'', γ'' sont sur une même sphère f'_1 ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$, ..., et ainsi de suite. On envisagera la portion de f_1 limitée par les arêtes de la première sorte de f et par l'intersection de f_1 et de f'_1; la portion de f'_1 limitée par les arêtes de la première sorte de f' et par les intersections de f'_1 avec f_1 et f''_1, etc. L'ensemble de ces portions de surfaces sphériques formera la nouvelle face F_1 sur laquelle on raisonnera comme plus haut.

Dans tous les cas on aura remplacé la région P_0 par une autre équivalente, mais où les faces F et F′ seront remplacées par les faces F_1 et F'_1 formées de portions de sphères ayant leur centre dans le plan des $\xi\eta$. En opérant de même sur toutes les faces de la première sorte de la région P_0, on remplacera cette région par une autre équivalente dont toutes les faces de la première sorte seront formées de pareilles portions de surfaces sphériques.

En résumé, nous pourrons toujours supposer que notre région P_0 est un polyèdre dont toutes les faces de la première sorte sont des portions de sphères ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$. Nous l'appellerons *polyèdre générateur du groupe*.

On voit aisément qu'un pareil polyèdre ne peut avoir de *sommet isolé* en dehors du plan des $\xi\eta$.

Les faces de la deuxième sorte du polyèdre générateur P_0 seront des polygones limités par des arcs de cercle, et ces arcs de cercle seront les traces des faces de la première sorte sur le plan des $\xi\eta$. Ces polygones peuvent être regardés comme les polygones générateurs d'un groupe kleinéen.

Supposons que notre polyèdre P_0 ait n faces de la deuxième sorte F_0^1, F_0^2, …, F_0^n; le polyèdre homologue P_i aura aussi n faces de la deuxième sorte F_i^1, F_i^2, …, F_i^n. Si l'on excepte certains points ou certaines lignes singulières, tout point du plan des $\xi\eta$ appartient à l'une des faces F_i^k de l'un des polyèdres P_i, et il ne peut d'ailleurs appartenir qu'à l'une d'elles, puisque aucun point de l'espace n'appartient à plus d'un polyèdre P_i.

Le groupe est donc proprement discontinu, même pour les points du plan des $\xi\eta$, si l'on excepte toujours les points et les lignes singulières dont il a été question plus haut.

Le groupe considéré est donc kleinéen.

Le plan des $\xi\eta$ sera partagé en n régions R^1, R^2, …, R^n; la région R^k se subdivise elle-même en une infinité de polygones F_0^k, F_1^k, F_2^k, …, F_i^k, … telles que la substitution S_i change F_0^k en F_i^k.

Ainsi, on peut prendre, pour polygone générateur du groupe, l'une quelconque des faces de la deuxième sorte du polyèdre générateur, c'est-à-dire un des polygones ayant pour côtés les cercles qui ont même centre et même rayon que les sphères qui forment les faces de la première sorte de ce polyèdre.

La réciproque n'est pas vraie. Considérons un groupe kleinéen quelconque, et soit R_0 l'un des polygones que l'on peut choisir pour son polygone générateur; construisons les sphères qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle qui servent de côtés à ce polygone et envisageons le polyèdre P_0 limité par ces sphères. En général, ce ne sera pas un polyèdre générateur du groupe. En effet, dans un polyèdre générateur, deux faces conjuguées doivent être congruentes. Or, considérons un côté quelconque bc de R_0, les côtés adjacents ab et cd, le côté conjugué $b'c'$, les côtés adjacents $a'b'$ et $c'd'$. Construisons les sphères S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 correspondant respectivement à ces six côtés. A chaque côté de R_0 correspondra une face de P_0. Au côté bc correspondra la portion de la surface de S_1 qui est limitée par l'intersection de cette sphère avec S_2 et S_3; au côté $b'c'$ correspondra la portion de la surface de S_4 qui est limitée par l'intersection de cette sphère avec S_5 et S_6. Ce devrait être là deux faces conjuguées de P_0; or, ces deux faces ne seront pas en général congruentes.

Pour que le polyèdre P_0 soit un polyèdre générateur du groupe, il faut et il suffit que ses faces conjuguées soient congruentes, et pour cela, voici quelle est la condition nécessaire et suffisante :

Soient encore bc un côté de R_0, ab et cd les côtés adjacents, $b'c'$ le côté conjugué, $a'b'$ et $c'd'$ les côtés adjacents. Prolongeons les cercles dont font partie ces six côtés. Soit b_1 le second point d'intersection des cercles ab et bc, et de même c_1, b'_1, c'_1 les intersections respectives de bc et de cd; de $a'b'$ et de $b'c'$; de $b'c'$ et de $c'd'$. Le rapport anharmonique des quatre points b, c, b_1, c_1 doit être égal à celui des quatre points b', c', b'_1, c'_1.

Parmi les polygones équivalents à R_0, qui sont en nombre infini et qui peuvent être choisis comme polygones générateurs, il y en a toujours qui remplissent cette condition, puisque tout groupe kleinéen est proprement discontinu pour les points non situés sur le plan des $\xi\eta$ et admet par conséquent un polyèdre générateur. Nous supposerons toujours que le polygone R_0 a été choisi de façon à satisfaire à cette condition.

A chaque côté de R_0 correspondra alors une face de P_0; à deux côtés conjugués correspondront deux faces conjuguées. A chaque sommet de R_0 appartenant à un cycle elliptique correspondra une arête de P_0 et aux divers sommets d'un même cycle, correspondront les diverses arêtes d'un même cycle; à un sommet de R_0 appartenant à un cycle parabolique ou hyperbolique correspondra un sommet isolé de P_0. On voit ainsi que les sommets isolés de P_0 se répartissent en cycles.

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer que R_0 et par conséquent P_0 n'admettent pas de cycle hyperbolique. En effet, supposons que P_0 admette un sommet isolé appartenant à un cycle hyperbolique, je dis qu'on pourra remplacer ce polyèdre par un autre équivalent n'admettant pas de cycle hyperbolique. En effet, d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe précédent, on peut toujours supposer que ce cycle hyperbolique se compose d'un seul sommet A.

Le sommet A est un sommet isolé de P_0, c'est-à-dire qu'il est le point de contact de deux faces de la première sorte de P_0, tangentes l'une à l'autre, et que j'appellerai F et F'. Ces deux faces sont conjuguées; car si elles ne l'étaient pas, le cycle dont fait partie A devrait contenir encore d'autres sommets. Une des substitutions du groupe, que j'appelle S, changera F en F', et elle sera hyperbolique, par hypothèse. La face F ne sera limitée par aucune arête, ou bien elle le sera par une seule arête, ou bien par plus d'une arête. Je dis d'abord qu'on peut toujours supposer que le troisième cas ne se présentera pas. En effet, s'il se présentait, on tracerait sur la face F une demi-circonférence, dont le plan devrait être perpendiculaire au plan des $\xi\eta$, et qui devrait être assez petite pour être tout entière contenue dans la face F; cela est toujours possible. Cette demi-circonférence partagerait la face F en deux autres F_1 et F_2; à F_1 contiendrait par exemple le sommet A; la face F' congruente à F se diviserait de même en deux autres F'_1 et F'_2 congruentes respectivement à F_1 et à F_2. Le sommet A fera alors partie de deux faces F_1 et F'_1 qui ne seront limitées que par une seule arête.

Supposons donc que la face F admette au plus une arête. Construisons une sphère Φ peu différente de F. Si la face F admet une arête, j'assujettirai la sphère Φ à passer par cette arête. La substitution hyperbolique S changera Φ en une autre sphère Φ', et l'on aura toujours pu choisir Φ de telle façon que ces deux sphères ne se coupent ni ne se touchent. Il suffit pour cela que la sphère Φ diffère suffisamment peu de F et que, si A et B sont les deux points doubles de la substitution S, ces deux points soient l'un intérieur, l'autre extérieur à Φ. Soit p_0 la portion de l'espace comprise entre Φ et F, p'_0 la portion comprise entre Φ' et F'. La substitution S changera p_0 en p'_0. Le polyèdre $P'_0 = P_0 - p_0 + p'_0$ est donc équivalent à P_0; donc il peut servir de polyèdre générateur. Mais il ne possède plus le sommet hyperbolique A, puisque les sphères Φ et Φ' ne se coupent pas.

Nous pouvons donc toujours supposer que notre polygone R_0 et notre polyèdre P_0 ne présentent pas de cycle hyperbolique; c'est ce que nous ferons désormais [1].

---

[1] Cette démonstration n'est pas exacte. Le polyèdre P'_0 n'est pas équivalent au polyèdre P_0, mais à un domaine plus compliqué, formé : 1° du polyèdre P_0; 2° d'un segment de la sphère

V. — Existence des groupes kleinéens.

Supposons un polyèdre générateur P_0 satisfaisant aux conditions énoncées dans le paragraphe précédent : ses faces conjuguées sont congruentes, ses arêtes de la première sorte se répartissent en cycles elliptiques, de telle façon que la somme des dièdres correspondant aux arêtes d'un même cycle soit une partie aliquote de 2π. Le groupe correspondant à ce polyèdre est entièrement défini. Il reste à démontrer que ce groupe est discontinu, c'est-à-dire que les polyèdres transformés de P_0 remplissent toute la partie de l'espace située au-dessus du plan des $\xi\eta$ et ne se recouvrent pas mutuellement.

La démonstration est tout à fait la même que dans le cas des groupes fuchsiens.

Soient en effet A un point quelconque intérieur à P_0, B un point situé au-dessus du plan des $\xi\eta$. Joignons A et B par un arc de courbe AMB ne coupant pas ce plan. Cet arc sortira du polyèdre P_0 par une face de la première sorte, on pourra construire le polyèdre P_1, limitrophe de P_0 le long de cette face ; l'arc AMB sortira de P_1 par une certaine face, on construira le polyèdre P_2 limitrophe de P_1 le long de cette face, et ainsi de suite.

Voici ce que nous avons à démontrer :

1° Qu'après un nombre fini d'opérations on arrive à un polyèdre P_n à l'intérieur duquel se trouve le point B ;

2° Que si le point B se confond avec le point A, de telle façon que l'arc AMB se réduise à un contour fermé AMA, le polyèdre P_n se confond avec P_0.

Le premier point s'établit comme dans la théorie des groupes fuchsiens.

La L de l'arc AMB sera une longueur finie L_1. Je dis que cet arc ne pourra rencontrer qu'un nombre fini de polyèdres P, ou, ce qui revient au même, un

---

ayant AB pour diamètre et coupant orthogonalement le plan des $\xi\eta$; 3° d'un polyèdre situé à l'intérieur de cette sphère et ayant en A un point de contact avec le polyèdre P_0.

La démonstration est en défaut parce que le domaine p_0 contient *une infinité* de points homologues entre eux par la substitution hyperbolique, et les principes de la page 271 ne s'appliquent évidemment pas dans ce cas.

On en conclut qu'il existe seulement des cycles elliptiques et des cycles paraboliques.

N. E. N.

nombre fini de faces F de la première sorte appartenant à ces polyèdres. En effet, on établit aisément les lemmes suivants :

I. *On peut trouver un nombre entier ν assez grand pour que ν polyèdres P quelconques et ν faces F quelconques ne puissent avoir d'autre point commun qu'un sommet parabolique.*

II. *Si ν faces n'ont pas de sommet parabolique commun et n'ont par conséquent aucun point commun, et si un arc de courbe traverse ces ν faces, la L de cet arc est supérieure à une certaine limite λ.*

III. *Tout arc qui ne rencontre pas le plan des $\xi\eta$, ne peut traverser qu'un nombre fini de faces F ayant un sommet parabolique commun.*

(*Voir* paragraphes I et VI du Mémoire sur les groupes fuchsiens.)

Il résulte de là que, quand l'arc AMB aura traversé $\frac{\nu L}{\lambda}$ faces F, il ne pourra plus traverser que des faces ayant un sommet parabolique commun, et, en vertu du lemme III, il n'en traversera qu'un nombre fini.

Le premier point une fois démontré, le second s'établit sans peine. En effet, on voit immédiatement qu'il suffit de le démontrer pour un contour AMA infiniment petit. Or le théorème est évident pour un pareil contour, soit qu'il ne tourne pas autour d'une arête de la première sorte, soit même qu'il tourne autour d'une pareille arête, puisque, par hypothèse, cette arête fait partie d'un cycle dont la somme des dièdres est une partie aliquote de 2π.

Pour les détails de la démonstration je renverrai au paragraphe VI du Mémoire sur les groupes fuchsiens.

Ainsi les polyèdres P_i ne se recouvrent pas mutuellement; si P_0 admet une face de la deuxième sorte R_0 dont les transformées sont les faces R_i des polyèdres P_i, ces faces R_i ne se recouvrent pas non plus mutuellement. Ainsi notre *polygone générateur et ses transformés ne se recouvrent pas.*

C'est ce point que je voulais établir, et pour y parvenir j'ai eu recours à un artifice dont je ne pouvais guère me dispenser dans le cas général : j'ai dû passer du plan à l'espace et des polygones R aux polyèdres P. Mais si ce détour est nécessaire dans le cas le plus général, on peut s'en affranchir dans un grand nombre de cas particuliers; c'est ce que nous verrons plus loin.

VI. — Classification.

Parmi les groupes kleinéens, il en est qui doivent attirer particulièrement l'attention à cause de leur importance au point de vue des applications. Ce sont ceux dont les groupes fuchsiens sont des cas particuliers, de telle sorte qu'on peut passer d'un pareil groupe kleinéen à un groupe fuchsien en faisant varier d'une *façon continue* certains paramètres. Ce seront les groupes de la première espèce.

Ceux de la deuxième espèce seront ceux qui ne jouiront pas de cette propriété.

On peut classer aussi les groupes kleinéens en genres. Nous définirons le genre du polygone générateur R_0 comme dans le paragraphe VIII du Mémoire sur les groupes fuchsiens et le genre d'un groupe sera celui de son polygone générateur.

Voici maintenant quelque chose d'analogue à la classification en familles.

Nous classerons d'abord les polyèdres générateurs d'après le nombre de leurs faces de la deuxième sorte. C'est là, en effet, un point fort important : car si un polyèdre P_0 a n faces de la deuxième sorte, le plan des $\xi\eta$ se trouve divisé en n parties, et chacune de ces parties en une infinité de polygones R, de telle façon qu'à chaque substitution du groupe corresponde un polygone R et un seul.

Nous classerons ensuite les polyèdres qui admettent un même nombre de faces de la deuxième sorte en familles, selon qu'ils admettent ou n'admettent pas des cycles elliptiques, ou des cycles paraboliques.

Donnons le détail de cette classification pour les groupes les plus importants qui sont ceux de la première espèce, en conservant aux familles les mêmes numéros que dans la théorie des groupes fuchsiens.

1° Polyèdres admettant deux faces de la deuxième sorte :

Première famille. — Admettent des cycles elliptiques.

Deuxième famille. — Admettent des cycles paraboliques.

Sixième famille. — Admettent des cycles elliptiques et paraboliques.

2° Polyèdres admettant une face de la deuxième sorte :

Troisième famille. — Polyèdres dont toutes les faces de la première sorte sont des demi-sphères complètes, ne se coupant ni ne se touchant mutuellement, et qui n'admettent ni cycle elliptique, ni cycle parabolique.

Quatrième famille. — Admettent des cycles paraboliques.

Cinquième famille. — Admettent des cycles elliptiques.

Septième famille. — Admettent des cycles elliptiques et paraboliques.

VII. — Troisième famille.

Voici quel est le mode de génération des groupes de la troisième famille :

Considérons $2n$ cercles qui ne se coupent ni ne se touchent ; je supposerai, pour fixer les idées, que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres. Le polygone R_0 sera la portion du plan qui est extérieure à la fois à tous ces cercles. J'appelle ces cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$. Je suppose que les cercles C_i et C'_i soient conjugués. Soit S_i une substitution qui change C_i en C'_i, et de telle façon que l'extérieur de C_i se change dans l'intérieur de C'_i. S_i est alors une substitution hyperbolique ou loxodromique dont un point double est intérieur à C_i et l'autre à C'_i.

Le groupe dérivé des substitutions S_i est alors un groupe kleinéen de la troisième famille.

Pour démontrer que ce groupe est discontinu, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la marche détournée du paragraphe V. En effet, construisons le polygone R_i limitrophe de R_0 le long de C'_i, c'est-à-dire le transformé de R_0 par la substitution S_i ; il sera tout entier à l'intérieur de C'_i. L'ensemble des polygones R_0 et R_i se compose alors de la partie du plan extérieure à la fois à $4n-2$ cercles (extérieurs les uns aux autres) qui servent de côtés à ces deux polygones. Soit C_k l'un de ces cercles ; si l'on veut construire le polygone R_k limitrophe de R_0 ou de R_i le long de C_k, ce polygone sera tout entier intérieur à C_k, et ainsi de suite. On voit aisément, en continuant de la sorte, que les polygones ainsi construits ne peuvent se recouvrir mutuellement, et par conséquent que le groupe est discontinu.

Quelles sont maintenant les conditions imposées aux substitutions S_i ? Ces n substitutions doivent être telles qu'on puisse trouver n cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, de telle façon que ces n cercles et leurs transformés respectifs $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ soient tous extérieurs les uns aux autres. Ce ne sont là que des conditions d'inégalité ; ainsi, le groupe dérivé de n substitutions est discontinu, pourvu que les coefficients de ces substitutions satisfassent à certaines inégalités.

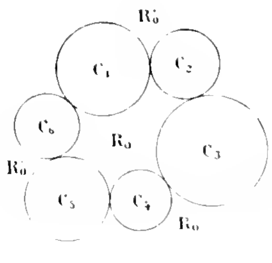
Parmi les groupes de la troisième famille, il en est qui méritent une mention particulière. On peut supposer que le polygone R_0 est symétrique par rapport à un certain cercle C_{n+1}, de telle façon que les cercles conjugués C_i et C'_i soient symétriques l'un de l'autre, et que toutes les substitutions du groupe puissent s'obtenir en combinant les inversions par rapport aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$. Nous dirons alors que le groupe est symétrique.

VIII. — Deuxième famille.

Supposons que $2n$ cercles $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ soient situés de telle sorte : 1° qu'ils soient tous extérieurs les uns aux autres; 2° que le cercle C_i touche extérieurement les cercles C_{i-1} et C_{i+1}; 3° que le cercle C_{2n} touche extérieurement les cercles C_{2n-1} et C_1. Appelons A_i le point de contact des cercles C_{i-1} et C_i et A_1 le point de contact des cercles C_{2n} et C_1. Le plan se trouve divisé en trois parties : 1° le polygone R_0 extérieur à chacun des cercles C et intérieur à la figure formée par l'ensemble de ces cercles; ce sera notre polygone générateur; 2° le polygone R'_0 extérieur à la fois à tous ces cercles et à la figure formée par leur ensemble; 3° enfin l'intérieur des divers cercles C.

Si nous formons le polyèdre générateur P_0, ce polyèdre présentera $2n$ faces de la première sorte formées par les surfaces des sphères qui ont même centre et même

Fig. 11.



rayon que les cercles C; deux faces de la deuxième sorte qui seront les polygones R_0 et R'_0 et $2n$ sommets isolés $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Je supposerai que les faces C_i et C_{2n+1-i} sont conjuguées et que le polyèdre admet $n+1$ cycles paraboliques, formés respectivement des sommets A_1; A_2 et A_{2n}; ...; A_i

et A_{2n+2-i}; ...; A_n et A_{n+2}; A_{n+1}. Cela suppose que nous avons entre les sommets A la relation

$$(A_2 - A_1)(A_4 - A_3)\ldots(A_{2n} - A_{2n-1}) = -(A_3 - A_2)(A_5 - A_4)\ldots(A_1 - A_{2n}).$$

Ici, comme dans le paragraphe précédent, la discontinuité du groupe peut se démontrer directement, sans qu'il soit besoin de recourir à l'artifice du paragraphe V. On voit que le plan se décompose en deux domaines D et D'; le premier est recouvert par le polygone R_0 et ses transformés, le second par le polygone R'_0 et ses transformés. Ces deux domaines sont séparés par une ligne L, si l'on peut appeler cela une ligne.

Supposons que l'on ait construit un certain nombre de polygones R_0, R_1, ..., R_n et les polygones correspondants R'_0, R'_1, ..., R'_n. On sera certain : 1° que tout point faisant partie de l'un des polygones R appartiendra au domaine D; 2° que tout point faisant partie de l'un des polygones R' appartiendra au domaine D'; 3° que tout sommet de l'un des polygones R appartient à la ligne L.

Les sommets des divers polygones R forment *eine unendliche Punktmenge* (¹) P, et pour obtenir la ligne L, il faut ajouter à cette *Punktmenge* son *erste Ableitung* P'. On voit que la ligne L est *eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge*. C'est dans ce sens que c'est une ligne. Mais nous allons voir qu'elle ne jouit pas de toutes les propriétés que nous sommes habitués à attribuer aux lignes.

Cherchons d'abord si cette ligne possède une tangente. A ce point de vue nous devons distinguer les points de la *Punktmenge* P et ceux qui appartiennent à son *Ableitung* P' sans appartenir à P. Envisageons d'abord un point de P; je dis qu'en ce point il y aura une tangente. D'abord nous pouvons supposer que ce point est un sommet de R_0, car rien ne distingue R_0 des autres polygones R_i; nous pouvons supposer que ce point est précisément A_1, car ce qui distingue A_1 des autres sommets de R_0, c'est que le cycle dont fait partie A_1 ne contient pas d'autre sommet; or nous avons vu à la fin du paragraphe III que l'on peut toujours supposer qu'un cycle donné ne se compose que d'un seul sommet. Le groupe envisagé contiendra alors une certaine substitution parabo-

(¹) Pour le sens précis des diverses expressions allemandes que je vais employer, *voir* G. CANTOR : *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig, Teubner, 1883. *Voir* aussi la traduction française de ce Mémoire : *Acta mathematica*, t. 2, p. 381-408.

lique S qui aura A_1 pour point double. Soit

$$\left(\frac{1}{z-A_1}, \frac{1}{z-A_1}+h\right)$$

cette substitution. Soit N un tel point que

$$\arg(N-A_1) = -\arg h.$$

Joignons A_1N, je dis que A_1N sera tangente à notre ligne L. Voici ce que j'entends par là. Supposons que ρ et ω soient les coordonnées polaires d'un point de L en prenant A_1 pour pôle et A_1N pour axe polaire; je dis que, quand ρ tendra vers zéro, ω tendra vers zéro, de telle façon que A_1N sera la limite d'une sécante A_1B_1 de la ligne L, lorsque le point B_1 se rapprochera indéfiniment de A_1.

Pour démontrer cela, je vais construire deux cercles K et K′ se touchant extérieurement en A_1 et tangents tous deux à A_1N. Je choisirai le cercle K de telle façon qu'il coupe les côtés A_1A_2 et A_1A_{2n} du polygone R_0 et ne coupe aucun autre côté de ce polygone. De même, le cercle K′ devra couper les côtés A_1A_2 et A_1A_{2n} du polygone R'_0 et ne couper aucun autre côté de ce polygone. Soient r_0 la partie de R_0 qui est intérieure à K et r'_0 la partie de R'_0 qui est intérieure à K′. Il est clair que les transformés successifs de r_0 par les puissances positives et négatives de la substitution S rempliront tout ce cercle K, de sorte que ce cercle fait tout entier partie du domaine D. De même le cercle K′ fera tout entier partie du domaine D′. Il en résulte que la ligne L est tout entière dans la portion du plan extérieure à la fois aux deux cercles K et K′. Cela suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Toutefois, la ligne A_1N ne jouit pas des mêmes propriétés que les tangentes aux lignes ordinaires. On voit aisément, en effet, que si l'on joint par une droite BC deux points B et C de la *Punktmenge* P, et que l'on fasse tendre B et C simultanément vers le point A_1, la limite de la droite BC n'est pas en général la tangente A_1N. Considérons, en effet, deux points B_0 et C_0 de la *Punktmenge* P, choisis de telle sorte que le cercle $A_1B_0C_0$ ne soit pas tangent à A_1N. Considérons les transformés successifs B_1C_1, B_2C_2, ..., B_nC_n de B_0C_0 par les puissances positives de S. Quand n croîtra indéfiniment, B_n et C_n se rapprocheront de A_1 et l'angle de B_nC_n avec A_1N tendra vers une limite finie. De plus, j'ai tout lieu de croire qu'il n'y a pas de tangente aux points de L qui ne font pas partie de P.

Je dis maintenant que la ligne L n'a pas de cercle osculateur. Je dis que si l'on mène un cercle k tangent en A_1 à la droite $A_1 A$ et passant par un point B_1 de L, ce cercle ne tendra pas vers une limite déterminée lorsque le point B_1 se rapprochera du point A_1. Menons, en effet, deux cercles k' et k'' tangents tous deux en A_1 à la droite $A_1 A$ et passant respectivement par deux points B'_0 et B''_0 de la ligne L. Soient $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$ les transformés successifs de B'_0 par les puissances de S. Ils seront tous sur k' et deviendront infiniment rapprochés de A_1 quand n deviendra infini.

Donc si le cercle osculateur existait, ce devrait être le cercle k'. Mais ce devrait être en même temps le cercle k''. Donc le cercle osculateur n'existe pas.

J'en ai dit assez, je pense, pour faire comprendre à quel point la ligne L diffère d'une ligne analytique.

IX. — Groupes symétriques.

Considérons un polygone H_0 limité par $n+1$ arcs de cercles $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots, A_{n-1} A_n, A_n A_{n+1}, A_{n+1} A_1$ se coupant en $n+1$ points A_1, $A_2, \ldots, A_{n+1}$ qui sont les sommets de ce polygone. Construisons les polygones H symétriques de H_0 par rapport à ses divers côtés, puis les polygones symétriques des $n+1$ polygones H par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Si les divers polygones ainsi construits ne se recouvrent pas mutuellement, on aura un groupe kleinéen.

Soit H'_0 le polygone symétrique de H_0 par rapport au côté $A_{n+1} A_1$; le polygone $H_0 + H'_0 = R_0$ sera le polygone générateur du groupe; il admettra $2n$ côtés, à savoir les n côtés $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots, A_n A_{n+1}$ de H_0 et les côtés symétriques de H'_0. Deux côtés symétriques seront d'ailleurs conjugués.

La première condition évidemment nécessaire pour que le groupe soit discontinu, c'est que tous les angles $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ du polygone H_0 soient nuls ou soient des parties aliquotes de π; ils sont donc tous droits ou aigus.

Supposons cette condition remplie et construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe. Pour cela, construisons les sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$ qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots, A_{n+1} A_1$. Ces sphères limiteront un certain polyèdre K_0. On construira ensuite le polyèdre K'_0

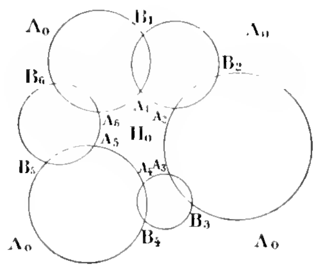
symétrique de K_0 par rapport à la sphère Σ_{n+1}. Le polyèdre $P_0 = K_0 + K'_0$ sera alors le polyèdre générateur du groupe.

Les sphères Σ_{n+1} et Σ_1 se couperont suivant une circonférence C_1 qui coupera le plan des $\xi\eta$ en deux points A_1 et B_1 dont le premier est un sommet de H_0. De même, les sphères Σ_{i-1} et Σ_i se couperont suivant une circonférence C_i qui coupera le plan des $\xi\eta$ en deux points A_i et B_i dont le premier est un sommet de H_0.

Cela posé, on peut faire diverses hypothèses :

1° On peut supposer que les sphères Σ n'ont pas d'autre intersection que les circonférences $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$. C'est ce qui arrive par exemple dans le cas de la figure 12. Dans ce cas, le polyèdre K_0 admet deux faces de la deuxième sorte H_0 et A_0. La face A_0 est formée dans le cas de la figure 12 de la portion du plan

Fig. 12.



extérieure au contour polygonal curviligne $B_1 B_2 B_3 \ldots B_{n+1}$. Le polyèdre K_0 admet en outre $n+1$ faces de la première sorte qui sont les portions des sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$, limitées respectivement par les circonférences C_1 et C_2, C_2 et C_3, ..., C_{n+1} et C_1, et $n+1$ arêtes de la première sorte qui sont ces circonférences elles-mêmes. Le polyèdre $P_0 = K_0 + K'_0$ admet de même deux faces de la deuxième sorte, $2n$ faces de la première sorte et $2n$ arêtes de la première sorte.

Les conditions de discontinuité du groupe sont remplies et nous avons un groupe kleinéen. De plus il est de la première espèce, car on peut, en déformant d'une manière continue le polygone H_0, passer au cas où les côtés de ce polygone sont orthogonaux à une circonférence, c'est-à-dire au cas des groupes fuchsiens. Le plan est divisé en deux domaines D et D', le premier rempli par le polygone H_0 et ses transformés, le second par le polygone A_0 et ses transformés.

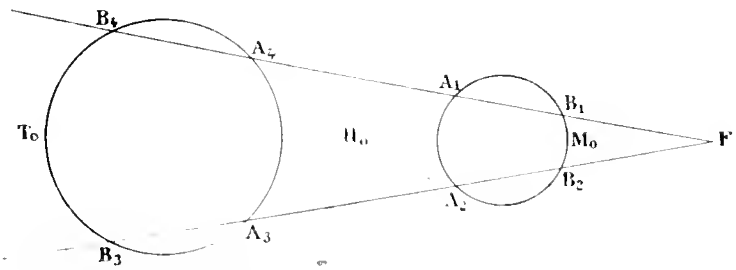
2° On pourrait supposer aussi que les sphères Σ admettent d'autres intersections que les circonférences $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$; qu'elles se coupent par exemple suivant d'autres circonférences $k_1, k_2, \ldots, k_p$; mais que ces circonférences restent tout entières extérieures au polyèdre K_0, de telle façon qu'elles ne soient pas des arêtes de ce polyèdre. Mais il est aisé de voir que cette supposition est incompatible avec l'hypothèse que nous avons faite que les angles de Π_0 sont tous droits ou aigus.

3° On peut supposer que le polyèdre K_0 admet comme arêtes, outre les circonférences C, une ou plusieurs des circonférences k et que les angles dièdres correspondants ne sont pas des parties aliquotes de π. Il est clair alors que le groupe n'est pas discontinu.

4° Il peut arriver enfin que le polyèdre K_0 admette comme arêtes, outre les circonférences C, une ou plusieurs des circonférences k et que les dièdres correspondants soient des parties aliquotes de π. Dans ce cas, le groupe est discontinu, mais on ne peut passer au cas des groupes fuchsiens en déformant le polygone Π_0. Le groupe est donc de la deuxième espèce.

Prenons comme exemple le cas de la figure 13. Le polygone Π_0 est un quadri-

Fig. 13.



latère $A_1A_2A_3A_4$ dont deux côtés opposés A_1A_4 et A_2A_3 sont des lignes droites qui prolongées vont se couper en F. Je suppose de plus que les angles A_1, A_2, A_3, A_4 et F sont des parties aliquotes de π. Le polyèdre K_0 n'admet alors que des dièdres égaux à des parties aliquotes de π. Il a trois faces de la deuxième sorte, Π_0, M_0 et T_0; il a quatre faces de la première sorte faisant partie respectivement des sphères A_1A_2 et A_3A_4 et des plans A_1A_4 et A_2A_3. Le groupe G considéré est donc discontinu.

Si l'on prend le polyèdre K'_0 symétrique de K_0 par rapport au plan A_2A_3, l'ensemble de ces polyèdres sera P_0 et aura pour faces de la deuxième sorte $\Pi_0 + \Pi'_0$, $M_0 + M'_0$ et $T_0 + T'_0$ en appelant Π'_0, M'_0 et T'_0 les polygones symétriques de H_0, M_0 et T_0. Le plan des $\xi\eta$ va se trouver divisé en trois domaines D, D′ et D″ recouverts respectivement par les transformés de $H_0 + H'_0$, par ceux de $M_0 + M'_0$ et par ceux de $T_0 + T'_0$.

Étudions d'abord le domaine D′. Supposons que l'on construise les triangles symétriques de M_0 par rapport à ses trois côtés, puis les triangles symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Tous les triangles ainsi construits recouvriront un certain cercle H qui a pour centre F et qui coupe orthogonalement le cercle $A_1A_2B_1B_2$. Ce cercle H sera donc une partie du domaine D′, mais une partie seulement. En effet, le cercle H est recouvert par les transformés de $M_0 + M'_0$ par certaines substitutions du groupe G. Ces substitutions s'obtiennent en combinant de toutes les manières possibles les trois inversions par rapport aux cercles FB_1, FB_2 et B_1B_2, de telle façon que le nombre total des substitutions combinées soit pair. Ces substitutions forment un groupe g qui est fuchsien et qui est un sous-groupe du groupe kleinéen G. Pour avoir les autres transformés du quadrilatère $M_0 + M'_0$ et par conséquent les autres parties du domaine D′, il faut prendre les symétriques du cercle H par rapport au cercle A_3A_4 et à ses transformés. On obtient ainsi une infinité de cercles H_1, H_2, ... dont l'ensemble constitue le domaine D′. Ce domaine n'est donc pas d'une seule pièce.

Il en est de même de D″. En effet, on démontrerait de même qu'en construisant les triangles symétriques de T_0 par rapport aux trois côtés de ce triangle, puis les triangles symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés, et ainsi de suite, on obtient tous les transformés de $T_0 + T'_0$ par les substitutions d'un sous-groupe fuchsien g_1 du groupe kleinéen G. Ces transformés recouvrent la portion du plan extérieure à un certain cercle J et cette portion du plan ainsi que l'intérieur des divers cercles J_1, J_2, ..., symétriques de J par rapport au cercle A_1A_2 et à ses transformés, constituent le domaine D″.

Au contraire, le domaine D est d'une seule pièce. Si, en effet, nous construisons les polygones symétriques de H_0 par rapport aux côtés de ce quadrilatère, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés, et ainsi de suite, nous obtenons évidemment tous les transformés de $H_0 + H'_0$ et par conséquent tout le domaine D. Mais la figure ainsi formée par ces polygones que l'on construit successivement à côté les uns des autres est d'une seule pièce. Il en est donc de même de D.

Ce domaine D est d'ailleurs limité par les circonférences H, H_1, H_2, ..., J, J_1, J_2, ...; *il n'est donc pas simplement connexe*. Cette circonstance aurait rendu presque impossible la démonstration directe de la discontinuité du groupe et nécessitait l'emploi de l'artifice dont nous avons fait usage.

L'existence de ces domaines limités par un nombre infini de cercles a été signalée pour la première fois par M. Klein.

X. — Première famille.

Dans le paragraphe XI du Mémoire sur les groupes fuchsiens, nous avons envisagé (p. 162) un hexagone ABCDEF, dont les côtés AB et CB, CD et ED, EF et AF sont conjugués et dont les angles B, D, F et A + C + E sont des parties aliquotes de 2π. Déformons cet hexagone de façon que ses angles continuent à satisfaire à cette condition, mais que ses côtés ne soient plus orthogonaux à un même cercle fondamental et cherchons à quelles conditions il restera le polygone générateur d'un groupe kleinéen.

Considérons donc le groupe engendré par notre hexagone déformé ABCDEF. Il sera évidemment dérivé de trois substitutions elliptiques S_1, S_2 et S_3 qui ont respectivement pour points doubles B et B', D et D', F et F' et pour multiplicateurs $e^{i\beta}$, $e^{i\delta}$, $e^{i\varphi}$, β, δ et φ désignant les angles B, D et F;

S_1 change BA en BC,
S_2 » DC en DE,
S_3 » FE en FA.

La combinaison

$$S_1 S_2 S_3 = S_4$$

est aussi une substitution elliptique qui a pour points doubles A et A' et pour multiplicateur $e^{-i\alpha}$, α désignant l'angle A + C + E.

Les combinaisons

$$S_2 S_3 S_1 = S_5 \quad \text{et} \quad S_3 S_1 S_2 = S_6$$

ont aussi pour multiplicateurs $e^{-i\alpha}$ et elles ont respectivement pour points doubles C et C', E et E'.

Voyons maintenant quelles relations doivent avoir lieu entre ces points doubles et ces multiplicateurs.

Soient z_1 le transformé de z par S_1, z_2 celui de z_1 par S_2, z_3 celui de z_2 par S_3; z_3 sera par conséquent le transformé de z par S_4 et nous aurons les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{z_1-B}{z_1-B'} &= e^{i\beta}\,\frac{z-B}{z-B'},\\ \frac{z_2-D}{z_2-D'} &= e^{i\delta}\,\frac{z_1-D}{z_1-D'},\\ \frac{z_3-F}{z_3-F'} &= e^{i\varphi}\,\frac{z_2-F}{z_2-F'},\\ \frac{z_3-A}{z_3-A'} &= e^{-i\alpha}\,\frac{z-A}{z-A'}. \end{aligned}\right.$$

En différentiant les relations (1), on trouve

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dz_1}{(z_1-B')^2} &= e^{i\beta}\,\frac{dz}{(z-B')^2}, & \frac{dz_1}{(z_1-B)^2} &= e^{-i\beta}\,\frac{dz}{(z-B)^2},\\ \frac{dz_2}{(z_2-D')^2} &= e^{i\delta}\,\frac{dz_1}{(z_1-D')^2}, & \frac{dz_2}{(z_2-D)^2} &= e^{-i\delta}\,\frac{dz_1}{(z_1-D)^2},\\ \frac{dz_3}{(z_3-F')^2} &= e^{i\varphi}\,\frac{dz_2}{(z_2-F')^2}, & \frac{dz_3}{(z_3-F)^2} &= e^{-i\varphi}\,\frac{dz_2}{(z_2-F)^2},\\ \frac{dz_3}{(z_3-A')^2} &= e^{-i\alpha}\,\frac{dz}{(z-A')^2}, & \frac{dz_3}{(z_3-A)^2} &= e^{i\alpha}\,\frac{dz}{(z-A)^2}. \end{aligned}\right.$$

Parmi les relations (2) envisageons les trois premières de la seconde colonne et la dernière de la première colonne et faisons-y $z = A$, d'où $z_1 = C$, $z_2 = E$, $z_3 = A$; il viendra, en combinant les relations ainsi obtenues de manière à éliminer dz, dz_1, dz_2, dz_3 :

$$\frac{(A-B)^2(C-D)^2(E-F)^2}{(C-B)^2(E-D)^2(A-F)^2} = e^{i(\alpha-\beta-\delta-\varphi)}$$

ou

$$(3)\qquad \frac{(A-B)(C-D)(E-F)}{(B-C)(D-E)(F-A)} = \pm e^{i\frac{\alpha-\beta-\delta-\varphi}{2}}.$$

Une discussion facile montre que c'est le signe — qui convient.

Dans le cas où les quatre angles α, β, δ et φ sont nuls, c'est-à-dire dans le cas où le groupe se réduit à la deuxième famille, la relation (3) devient

$$(A-B)(C-D)(E-F) = -(B-C)(D-E)(F-A).$$

Supposons donc qu'on se donne, outre les angles α, β, δ, φ, six points doubles A, B, C, D, E, F de façon à satisfaire à la relation (3). Les trois points doubles B', D' et F' sont alors déterminés par les équations

$$\frac{C-B}{C-B'} = e^{i\beta}\,\frac{A-B}{A-B'},\qquad \frac{E-D}{E-D'} = e^{i\delta}\,\frac{C-D}{C-D'},\qquad \frac{A-F}{A-F'} = e^{i\varphi}\,\frac{E-F}{E-F'}$$

et les trois points doubles A′, C′ et E′ par les relations

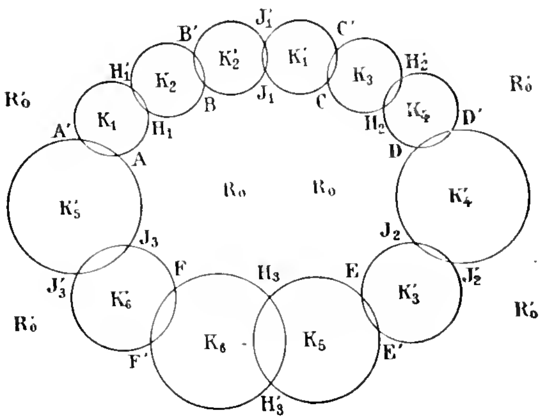
$$\frac{C'-B}{C'-B'} = e^{i\beta}\frac{A'-B}{A'-B'}, \qquad \frac{E'-D}{E'-D'} = e^{i\delta}\frac{C'-D}{C'-D'}, \qquad \frac{A'-F}{A'-F'} = e^{i\varphi}\frac{E'-F}{E'-F'}.$$

Il n'arrivera pas en général que les quatre points A, B, A′, B′ seront sur un même cercle. Il en sera de même des points B, B′, C et C′ ; C, C′, D et D′, etc. Il résulte de là que, si nous construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe, la face de la deuxième sorte de ce polyèdre ne sera pas en général l'hexagone ABCDEF, mais un dodécagone, ainsi qu'on va le voir.

Voici, en effet, comment on peut construire le polyèdre P_0 :

Considérons six cercles $K_1, K_2, \ldots, K_6$ passant respectivement par A et A′, par B et B′, par C et C′, par D et D′, par E et E′, par F et F′. Les deux premiers se couperont en H_1 et H'_1, les deux suivants en H_2 et H'_2, les deux derniers

Fig. 14.



en H_3 et H'_3. Soient maintenant K'_1 et K'_2 les transformés de K_1 et K_2 par S_1 ; ils passeront, le premier par C et C′, le second par B et B′ et ils se couperont en J_1 et J'_1.

Soient de même K'_3 et K'_4 les transformés de K_3 et de K_4 par S_2 ; K'_5 et K'_6 les transformés de K_5 et de K_6 par S_3. Ces quatre cercles passeront respectivement par E et E′, par D et D′, par A et A′, par F et F′ et ils se couperont, les deux premiers en J_2 et J'_2, les deux derniers en J_3 et J'_3.

Je suppose que ces différents cercles n'aient pas d'autre point d'intersection que ceux que je viens d'énumérer et que la position relative de ces divers cercles et points soit celle qui est indiquée par la figure 14. Dans ce cas, construisons les sphères Σ_i et Σ'_i qui ont même centre et même rayon que les cercles K_i et K'_i. Puis envisageons le polyèdre P_0 formé par la portion du plan extérieure à ces douze sphères. Ce polyèdre aura deux faces de la deuxième sorte, R_0 et R'_0, qui seront respectivement les portions du plan intérieure et extérieure à l'anneau formé par les douze cercles K_i et K'_i; il aura douze faces de la première sorte formées par des portions des sphères Σ_i et Σ'_i; ces douze faces seront conjuguées deux à deux de telle façon que la face Σ'_i soit conjuguée de Σ_i. Le polyèdre P_0 admettra douze arêtes de la première sorte formées par les intersections deux à deux des sphères Σ_i et Σ'_i; ces arêtes se répartiront en sept cycles ainsi que l'indique le Tableau suivant :

Numéro du cycle.	Arêtes faisant partie du cycle.	Somme des dièdres du cycle.
1...........	AA', CC' et EE'	α
2...........	BB'	β
3...........	DD'	δ
4...........	FF'	φ
5...........	$H_1H'_1$ et $J_1J'_1$	2π
6...........	$H_2H'_2$ et $J_2J'_2$	2π
7...........	$H_3H'_3$ et $J_3J'_3$	2π

Aux quatre premiers cycles correspondent les substitutions elliptiques S_1, S_1, S_2 et S_3; aux trois derniers, la substitution identique. Si donc les cercles K_i et K'_i sont dans la situation relative indiquée par la figure 14, le groupe considéré, dont le polyèdre générateur sera P_0, sera discontinu.

Notre groupe sera donc kleinéen, pourvu que les points doubles A, B, C, D, E, F satisfassent non seulement à la relation (3), mais à des inégalités exprimant que les douze cercles K_i et K'_i sont dans la situation relative indiquée par la figure 14.

Le plan se trouve partagé en deux domaines limités par une ligne L. Voici comment on peut trouver la génération de la ligne L : on considère l'ensemble des points doubles de toutes les substitutions hyperboliques ou loxodromiques du groupe. Ces points doubles forment une *Punktmenge* P; si l'on y adjoint son *erste Ableitung* P', on aura la ligne L.

XI. — Fonctions kleinéennes.

Soit G un groupe kleinéen quelconque et soient

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

les diverses substitutions de ce groupe. Formons, comme dans la théorie des fonctions fuchsiennes, la série suivante :

$$\Theta(z) = \Sigma \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}, \tag{1}$$

l'algorithme H(z) représentant une fonction rationnelle de z dont aucun infini ne se confond avec un point singulier du groupe, et m désignant un entier plus grand que 1.

Cette série est convergente. Dans le paragraphe I du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, nous avons donné deux démonstrations de la convergence de cette série. La première de ces démonstrations subsiste dans le cas qui nous occupe; il n'en serait pas de même de la seconde.

A tout groupe kleinéen correspondent donc une infinité de fonctions thétakleinéennes $\Theta(z)$ et de fonctions kleinéennes $F(z)$ jouissant des propriétés

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Theta(z)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m},$$

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z).$$

Ces fonctions jouissent des mêmes propriétés que les fonctions fuchsiennes et thétafuchsiennes. Par conséquent, toutes les fonctions kleinéennes s'expriment rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, x et y, entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

dont le genre est égal à celui du groupe G. Quand ce genre est nul, toutes les fonctions kleinéennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appelle x.

Si je pose

$$v_1 = \sqrt{\frac{dz}{dx}}, \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dz}{dx}},$$

v_1 et v_2 sont deux intégrales de l'équation linéaire

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \tag{3}$$

qui se réduit à

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v, \tag{3'}$$

dans le cas où le genre est nul (*cf.* paragraphe IV du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*); dans ces équations, φ désigne une fonction rationnelle.

Examinons quelques cas particuliers, et d'abord reprenons l'équation (3') des paragraphes V et VII du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)}v,$$

où

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

Le polynome $P(x)$ est de degré $2n - 2$ et je suppose qu'il satisfait aux $n + 1$ conditions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &P(a_i) = -Q'^2(a_i)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2}\right), \\ &\text{coefficient de } x^{2n-2} \text{ dans } P(x) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ sont des entiers positifs qui peuvent devenir infinis.

Nous avons vu que, si le polynome $P(x)$ [outre les $n + 1$ conditions (4) qui sont *complexes* et qui, par conséquent, équivalent à $2n + 2$ conditions réelles], satisfait à $2n - 4$ autres conditions réelles et transcendantes, la variable x est une fonction fuchsienne du rapport des intégrales.

Il résulte de la théorie précédente que, si le polynome $P(x)$ satisfait non seulement aux conditions (4), mais à certaines *inégalités*, la variable x sera une fonction kleinéenne du rapport des intégrales. Supposons, en effet, les conditions (4) remplies; appelons z le rapport des intégrales de l'équation (3); quand x reviendra à sa valeur initiale, après avoir décrit un contour fermé C_i, z se changera en $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ et les substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

formeront un groupe G.

Si ce groupe est kleinéen, x sera une fonction kleinéenne de z. Or ce groupe G, comme on le voit aisément, est dérivé de n substitutions elliptiques ou paraboliques S_1, S_2, ..., S_n, ayant respectivement pour multiplicateurs

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta_1}},\quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_2}},\quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_3}},\quad \ldots,\quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_n}}.$$

La combinaison

$$S_1 S_2 \ldots S_n$$

sera aussi une substitution elliptique ou parabolique qui aura pour multiplicateur

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta_{n+1}}}.$$

Or nous avons vu au paragraphe précédent qu'il suffit de certaines inégalités imposées aux coefficients d'un pareil groupe G pour qu'il soit discontinu. Il suffira donc aussi d'imposer certaines inégalités aux coefficients de $P(x)$ pour que x soit fonction uniforme de z.

Reprenons de même l'équation (3) du paragraphe VI du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \qquad \psi(x, y) = 0. \tag{3}$$

J'appelle c_i, d_i les points analytiques pour lesquels on a à la fois

$$\frac{d\psi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

J'appelle a_i, b_i les points analytiques différents de c_i, d_i et pour lesquels la fonction φ devient infinie. Je suppose que la fonction φ satisfasse aux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\lim(y-d_i)^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\varphi(x, y) = -\frac{3}{4} && (\text{pour } x = c_i,\ y = d_i), \\ &\lim(x-a_i)\varphi(x, y) = \frac{1-\beta_i^2}{4\beta_i^2} && (\text{pour } x = a_i,\ y = b_i)\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Les nombres β_i sont encore ici des entiers positifs qui peuvent devenir infinis.

Nous avons vu que, si la fonction φ satisfait en outre à certaines conditions transcendantes, x est fonction fuchsienne du rapport z des variables. De même, si cette fonction φ satisfait non seulement aux équations (5), mais à certaines inégalités, x sera fonction kleinéenne de z. La démonstration serait tout à fait analogue à celle qui précède.

Ainsi pour que dans l'équation (3) x exprimé en fonction de z soit une fonction kleinéenne de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, il suffit de certaines *égalités algébriques* et de certaines *inégalités*. Nous n'avons pas à nous imposer *d'égalité transcendante*. Il n'en est pas de même pour les fonctions des autres familles. Si nous voulons, par exemple, que, dans l'équation (3), x soit fonction kleinéenne de la troisième famille du rapport z des intégrales, il faudra nous imposer certaines égalités transcendantes.

Reprenons, en effet, l'équation (3) du paragraphe VIII du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

en supposant que la fonction φ satisfait aux conditions énoncées à la page 244 de ce paragraphe (lignes 3 et suivantes). Soit n le genre de la relation $\psi = 0$; le groupe kleinéen de notre équation (3) devra être de genre n et dépendra par conséquent de $3n - 3$ paramètres complexes; c'est-à-dire précisément d'autant de paramètres qu'il y a de modules dans la relation $\psi = 0$. Quand on se donnera cette relation $\psi = 0$, le groupe kleinéen sera donc entièrement déterminé; il en sera donc de même de la fonction φ. Il résulte de là que cette fonction est assujettie, indépendamment des conditions algébriques de la page 244 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, à n conditions transcendantes, puisque ces conditions algébriques ne suffiraient pas pour la déterminer.

XII. — Historique.

C'est M. Schottky qui a le premier remarqué la discontinuité de certains groupes kleinéens (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 83, p. 346), à savoir des groupes symétriques de la troisième famille. Depuis, M. Klein a approfondi la théorie de ces groupes dans diverses Notes insérées aux *Mathematische Annalen* (t. 19, 20 et 21) et dans un Mémoire plus étendu inséré dans le 21ᵉ volume de ces mêmes Annales et intitulé *Ueber Riemannsche Functionentheorie*.

J'avais moi-même, dans deux Notes que j'eus l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences de Paris le 27 juin et le 11 juillet 1881 [1] (voir *Comptes rendus*, t. **92** et **93**), énoncé succinctement la plupart des résultats exposés dans le présent Mémoire.

---

[1] Ce Tome, p. 19-25. N. E. N.

SUR
LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES[1]

Acta mathematica, t. 4, p. 201-311; 1884.

Dans trois Mémoires [*Théorie des groupes fuchsiens* [2] (*Acta mathematica*, t. I, p. 1-62); *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* [3] (*Acta*, t. 1, p. 193-294); *Mémoire sur les groupes kleinéens* [4] (*Acta*, t. 3, p. 49-92)] j'ai étudié les groupes discontinus formés par des substitutions linéaires et les fonctions uniformes qui ne sont pas altérées par les substitutions de ces groupes. Avant de montrer comment ces fonctions et d'autres analogues donnent les intégrales des équations linéaires à coefficients algébriques, il est nécessaire de résoudre deux problèmes importants :

1° *Étant donnée une équation linéaire à coefficients algébriques, déterminer son groupe.*

2° *Étant donnée une équation linéaire du second ordre dépendant de certains paramètres arbitraires, disposer de ces paramètres de manière que le groupe de l'équation soit fuchsien.*

I. — Invariants fondamentaux.

Occupons-nous d'abord du premier de ces problèmes.

Considérons une équation quelconque à coefficients algébriques :

$$(1)\qquad \frac{d^p v}{dx^p} + \varphi_{p-1}(x, y)\frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}} + \varphi_{p-2}(x, y)\frac{d^{p-2} v}{dx^{p-2}} + \ldots + \varphi_1(x, y)\frac{dv}{dx} + \varphi_0(x, y)\, v = 0.$$

[1] Terminé le 20 octobre 1883; imprimé le 9 février 1884. N. E. N.

[2] Ce Tome, p. 108-168.

[3] Ce Tome, p. 169-257.

[4] Ce Tome, p. 258-299.

Dans cette équation les φ sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées entre elles par une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Supposons que l'on considère un système fondamental d'intégrales de l'équation (1)

$$v_1, \quad v_2, \quad \dots, \quad v_p$$

et qu'on fasse décrire à x un contour fermé C tel que y revienne à la même valeur; les intégrales $v_1, v_2, \dots, v_p$ prendront des valeurs nouvelles $w_1, w_2, \dots, w_p$ qui seront des fonctions linéaires de leurs valeurs initiales, de telle sorte qu'on ait

$$w_k = \Sigma \alpha_{ik} v_i.$$

En d'autres termes, les intégrales $v_1, v_2, \dots, v_p$ subiront une substitution linéaire

$$S = (v_1, v_2, \dots, v_p; w_1, w_2, \dots, w_p)$$

qu'on pourra représenter par le Tableau à double entrée des coefficients :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{p1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1p} & \alpha_{2p} & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix}.$$

Si l'on opère ainsi pour tous les contours C possibles, on obtiendra un ensemble de substitutions linéaires qui formeront un groupe G. Ce sera *le groupe de l'équation* (1).

On peut toujours supposer que, dans l'équation (1), le coefficient φ_{p-1} est identiquement nul; car si cela n'était pas, on ramènerait au cas où ce coefficient est nul par une transformation bien simple et bien connue. On en conclut que le déterminant de la substitution S est égal à l'unité; on a donc

$$\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{pp} = 1. \tag{3}$$

La connaissance de l'équation (1) et du contour C ne suffit pas pour déterminer la substitution S. En effet, cette substitution dépend en outre du choix du système d'intégrales fondamentales $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Supposons qu'on les remplace par p autres intégrales fondamentales

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_p.$$

On aura

$$u_k = \Sigma \beta_{ik} v_i,$$

de sorte que la substitution

$$\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_p; u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

sera linéaire. En décrivant le contour C et en partant des intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_p$, on obtiendra alors une substitution linéaire

$$\sigma^{-1} S \sigma.$$

L'ensemble des substitutions $\sigma^{-1} S \sigma$ formera un groupe qu'on pourra désigner par la notation $\sigma^{-1} G \sigma$ et qui pourra, aussi bien que G, être regardé comme le groupe de l'équation (1), si au lieu d'envisager le système des intégrales v, on envisage celui des intégrales u. On sait que le groupe $\sigma^{-1} G \sigma$ s'appelle le transformé de G par la substitution linéaire σ.

Afin de n'avoir qu'un seul groupe pour l'équation (1), nous ne considérerons pas comme distincts le groupe G et ses transformés par les diverses substitutions linéaires.

Cela posé, cherchons les invariants de la substitution S, c'est-à-dire les fonctions de ses coefficients qui demeurent invariables quand on remplace S par $\sigma^{-1} S \sigma$. Formons l'équation

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - t & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{p1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - t & \ldots & \alpha_{p2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1p} & \alpha_{2p} & \ldots & \alpha_{pp} - t \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation, et par conséquent aussi ses coefficients, ne changeront pas quand on remplacera S par $\sigma^{-1} S \sigma$. Ce seront des invariants de S.

Ces invariants sont au nombre de $p - 1$. En effet, l'équation en t (4) est de degré p; elle a donc $p + 1$ coefficients. Mais le coefficient de t^p et le terme tout connu sont égaux à 1; il reste donc $p - 1$ invariants. Ces invariants, qui sont des coefficients de l'équation (4), seront des fonctions entières des α.

Supposons que les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ soient définies de la manière suivante :

Au point initial du contour C (pour $x = 0$, par exemple) v_1 est égal à 1 et ses $p - 1$ premières dérivées sont nulles; v_i est nul, ainsi que ses $p - 1$ premières dérivées, à l'exception de la dérivée d'ordre $i - 1$ qui est égale à 1. Soit maintenant w_k^1 ce que devient l'intégrale v_k quand x revient au point initial après avoir décrit le contour C et w_k^i ce que devient sa dérivée d'ordre $i-1$; on aura

$$w_k = \Sigma w_k^i v_i; \qquad w_k^i = \alpha_{ik}.$$

Il en résulte que les invariants sont des fonctions rationnelles entières des w_k^i.

Supposons en particulier $p=2$; l'équation (1) devient

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + v\varphi_0(x, y) = 0$$

et l'équation (4) s'écrit

$$\begin{vmatrix} w_1^1 - t & w_1^2 \\ w_2^1 & w_2^2 - t \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$t^2 + t(w_1^1 + w_2^2) + 1 = 0.$$

La substitution S admet alors comme invariant unique $w_1^1 + w_2^2$. Si h est son multiplicateur, cet invariant est précisément $h + \frac{1}{h}$.

Si l'on connaissait les invariants de toutes les substitutions S, le groupe G serait complètement déterminé, puisque nous ne le regardons pas comme distinct de ses transformés $\sigma^{-1}G\sigma$. Mais il ne sera pas nécessaire de connaître tous ces invariants, il suffira d'en connaître un certain nombre que nous appellerons *invariants fondamentaux* et dont tous les autres ne seront que des fonctions.

Combien y a-t-il d'invariants fondamentaux? Supposons que le groupe G soit dérivé de n substitutions fondamentales. Les coefficients de chaque substitution seront au nombre de p^2, mais à cause de la relation (3) il n'en restera que p^2-1 d'indépendants. Pour les n substitutions, cela fait en tout $n(p^2-1)$ coefficients. Mais nous ne considérons pas comme distincts le groupe G et ses divers transformés. Il faut donc retrancher p^2-1 du nombre précédent et l'on arrive à cette conclusion que, pour déterminer le groupe G, il faut $(n-1)(p^2-1)$ conditions.

Si donc on se donne $(n-1)(p^2-1)$ invariants quelconques (pourvu qu'ils soient indépendants), tous les autres n'en seront que des fonctions. On choisira, par exemple, pour invariants fondamentaux les invariants de $(n-1)(p+1)$ substitutions convenablement choisies.

On peut toujours supposer que l'équation (1) a ses coefficients rationnels. En effet, supposons que cela ne soit pas et que l'équation (2) soit une relation algébrique de degré m, de telle façon qu'à chaque valeur de x correspondent m valeurs de y

$$y_0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_{m-1}.$$

On pourra toujours tracer, dans le plan des x, $m-1$ contours $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ tels que, quand x décrit le contour C_i, y_0 se change en y_i. Soient maintenant

$$v_1^0, \quad v_2^0, \quad \ldots, \quad v_p^0$$

p intégrales fondamentales de l'équation (1) correspondant à la valeur y_0 de y. Soient

$$v_1^i, \quad v_2^i, \quad \ldots, \quad v_p^i$$

ce que deviennent ces intégrales quand x a décrit le contour C_i. Cela posé, les mp fonctions

$$\begin{array}{llll} v_1^0, & v_2^0, & \ldots, & v_p^0, \\ v_1^1, & v_2^1, & \ldots, & v_p^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ v_1^{m-1}, & v_2^{m-1}, & \ldots, & v_p^{m-1} \end{array}$$

satisferont à une équation (1′) linéaire et d'ordre mp dont les coefficients seront rationnels en x. La connaissance du groupe de (1′) suffira pour déterminer le groupe de l'équation (1).

Supposons donc que l'équation (1) ait ses coefficients rationnels et qu'elle présente $n+1$ points singuliers, en y comprenant le point ∞, s'il y a lieu, et en n'y comprenant pas les points à apparence singulière. Le groupe est alors dérivé de n substitutions fondamentales, et il y a $n+1$ de ses substitutions dont on connaît immédiatement les invariants, à l'aide de l'équation déterminante, pourvu que les intégrales soient régulières; ce sont les substitutions auxquelles on est conduit en faisant décrire à la variable un contour fermé qui n'enveloppe qu'un seul point singulier. Il reste donc à calculer les invariants de $(n-1)p-2$ substitutions.

Soit a un point singulier quelconque et soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p$$

les racines de l'équation déterminante correspondante.

Il y aura, dans le voisinage du point a, p intégrales particulièrement remarquables. La $k^{\text{ième}}$ d'entre elles sera égale à $(x-a)^{\lambda_k}$ multipliée par une fonction holomorphe. Soient

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p$$

ces p intégrales que j'appellerai *intégrales canoniques* par rapport au point a. Lorsque la variable décrira un cercle infiniment petit autour du point a, ces p intégrales v subiront la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} e^{2\pi i\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda_2} & 0 \\ . & \dots & . \\ 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_p} \end{vmatrix}$$

que j'appellerai *substitution canonique* relative au point a.

Soient, de même,

$$w_1, \quad w_2, \quad \dots, \quad w_p$$

les intégrales canoniques par rapport à un second point singulier b.

Joignons les deux points a et b par un chemin quelconque amb. Lorsque la variable partant du point a et décrivant le chemin amb sera parvenue dans le voisinage du point b, les intégrales canoniques $v_1, v_2, \dots, v_p$ seront devenues des fonctions linéaires des intégrales canoniques $w_1, w_2, \dots, w_p$, de telle sorte qu'on ait

$$v_k = \Sigma\, \beta_{ik}\, w_i.$$

La substitution linéaire

$$S = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{p1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{1p} & \beta_{2p} & \dots & \beta_{pp} \end{vmatrix}$$

s'appellera la *substitution auxiliaire relative au chemin amb*. Si l'on connaît cette substitution auxiliaire, on connaîtra aussi une substitution du groupe de l'équation (1), ce sera celle que subissent les intégrales canoniques $v_1, v_2, \dots, v_p$, quand, partant du voisinage du point a, la variable décrit le chemin amb jusque dans le voisinage du point b, décrit ensuite un cercle infiniment petit autour du point b et revient enfin dans le voisinage du point a par le chemin bma.

Soit Σ la substitution canonique relative au point b. Quand la variable décrira le contour précité, les intégrales v subiront la substitution $S^{-1}\Sigma S$.

Supposons qu'on joigne entre eux les $n+1$ points singuliers par n chemins quelconques, de façon qu'on puisse circuler entre deux quelconques de ces points singuliers à l'aide de ces n chemins; lorsque l'on connaîtra les substitutions auxiliaires relatives à ces n chemins, le groupe de l'équation (1) sera complètement déterminé.

Soient, en effet, a l'un des points singuliers et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les n autres. Joignons, par exemple, le point a à chacun des points b_i par une droite. Soient $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les substitutions canoniques relatives respectivement aux points $a, b_1, b_2, \ldots, b_n$; soient $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les substitutions auxiliaires relatives aux chemins $ab_1, ab_2, \ldots, ab_n$. Le groupe de l'équation (1) sera dérivé des $n+1$ substitutions

$$\Sigma, \quad S_1^{-1}\Sigma_1 S_1, \quad S_2^{-1}\Sigma_2 S_2, \quad \ldots, \quad S_n^{-1}\Sigma_n S_n$$

entre lesquelles il y a d'ailleurs la relation

$$\Sigma S_1^{-1}\Sigma_1 S_1 S_2^{-1}\Sigma_2 S_2 \ldots S_n^{-1}\Sigma_n S_n = 1.$$

Supposons maintenant qu'on distingue deux des points singuliers a et b; et soient $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ les $n-1$ autres. Joignons a et b par $n-1$ chemins différents $am_1b, am_2b, \ldots, am_{n-1}b$ et soient $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ les substitutions auxiliaires correspondantes. Ces $n-1$ chemins partageront le plan en $n-1$ régions; supposons que chacune de ces régions contienne un point singulier c_i et un seul. Le groupe de l'équation (1) sera entièrement déterminé. Si, en effet, Σ est la substitution canonique relative au point a, le groupe sera dérivé des n substitutions

$$\Sigma, \quad S_1^{-1}S_2, \quad S_2^{-1}S_3, \quad \ldots, \quad S_{n-2}^{-1}S_{n-1}, \quad S_{n-1}^{-1}S_1.$$

Supposons que le point c_i soit contenu dans la région limitée par les deux chemins am_ib et $am_{i+1}b$, décrivons un contour situé tout entier dans cette région et enveloppant le point c_i; quand la variable décrira ce contour, les intégrales canoniques relatives au point a subiront la substitution

$$S_i^{-1}S_{i+1}.$$

On voit que, pour déterminer le groupe de l'équation (1), il suffit de connaître soit les invariants fondamentaux, soit certaines substitutions auxiliaires.

II. — Calcul numérique des invariants fondamentaux.

Les invariants fondamentaux qui définissent complètement le groupe d'une équation linéaire sont évidemment des fonctions des coefficients de cette équation; d'où le problème suivant qui se pose tout naturellement : *déterminer* *ces invariants en fonction de ces coefficients*. Mais en réalité ce problème est double : on peut se proposer de calculer numériquement ces invariants quand on a affaire à une équation numérique donnée; mais il n'est pas non plus indigne d'intérêt d'étudier, au point de vue de la théorie des fonctions, la façon dont varient les invariants quand on fait varier les coefficients. Les méthodes propres au calcul numérique ne nous apprennent rien sur la nature de ces fonctions, pendant que les formules les plus instructives à ce dernier point de vue conduiraient à des calculs pénibles si l'on voulait les traduire en nombres.

Au point de vue du calcul numérique, un grand nombre de méthodes ont déjà été proposées, parmi lesquelles je citerai celle de M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 75) et celle de M. Hamburger (*Journal de Crelle*, t. 83).

La méthode de M. Fuchs consiste à distinguer deux des $n+1$ points singuliers, a et b, comme à la fin du paragraphe précédent, puis à diviser le plan en $n-1$ régions par $n-1$ chemins am_1b, am_2b, ..., $am_{n-1}b$, de façon que chacune de ces $n-1$ régions contienne un des $n-1$ autres points singuliers $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ et un seul. Le savant géomètre d'Heidelberg donne ensuite un développement des intégrales canoniques relatives au point a et ce développement est valable dans une certaine région R_a. De même, les intégrales canoniques relatives au point b sont susceptibles d'un développement valable dans une région R_b. Les deux régions R_a et R_b ont $n-1$ parties communes P_1, P_2, ..., P_{n-1}. On peut d'ailleurs tracer le chemin am_ib de telle façon qu'il reste constamment intérieur à l'une des régions R_a et R_b ou à toutes deux à la fois, et qu'il traverse la région P_i. Il suffit alors de comparer les deux développements de M. Fuchs pour une valeur de x quelconque intérieure à P_i (région dans laquelle les deux développements sont valables à la fois) pour pouvoir calculer les coefficients de la substitution auxiliaire relative au chemin am_ib. Le groupe de l'équation (1) est ainsi entièrement déterminé.

On peut varier cette méthode à l'infini; supposons, en effet, que nous joignions deux points singuliers quelconques a et b par un chemin quelconque amb et que nous cherchions la substitution auxiliaire relative à ce chemin. Traçons autour des deux points a et b deux régions quelconques R_a et R_b, telles : 1° que la première contienne l'unique point singulier a et la seconde l'unique point singulier b; 2° qu'elles aient une partie commune P; 3° que le chemin amb reste constamment intérieur au moins à l'une des régions R_a et R_b et traverse la région P. Supposons que deux fonctions $f_a(x)$

[et $f_b(x)$] soient telles que, quand x reste intérieur à la région R_a (ou à la région R_b), la fonction f_a (ou la fonction f_b) aient constamment leur module inférieur à 1, de telle sorte que ces deux fonctions donnent respectivement la représentation conforme du cercle de rayon 1 et de centre 0 sur la région R_a et sur la région R_b. Je suppose de plus

$$f_a(a) = 0, \qquad f_b(b) = 0.$$

Les intégrales canoniques relatives au point a se développeront suivant les puissances de $f_a(x)$. Ce développement, dont les coefficients se calculent par récurrence, sera valable dans toute la région R_a. De même, les intégrales canoniques relatives au point b seront, dans toute la région R_b, développables suivant les puissances de $f_b(x)$. Il suffira de comparer les deux développements pour un point de la région P (où ils sont valables à la fois) pour calculer les coefficients de la substitution auxiliaire cherchée.

On choisira les régions R_a et R_b de telle façon que les fonctions f_a et f_b soient aussi simples que possible. On pourra prendre, par exemple, un rectangle, ou un fuseau limité par deux arcs de cercle qui se coupent, ou la portion du plan comprise entre deux droites parallèles.

Voici maintenant en quoi consiste la méthode de M. Hamburger.

Soit o un des points singuliers et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les n autres, rangés par ordre de module croissant; soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ leurs modules; construisons les deux cercles qui ont pour centre l'origine et pour rayon ρ_i et ρ_{i+1}. Considérons un contour fermé C compris tout entier dans la région annulaire limitée par ces deux cercles. Soit A un point de ce contour C; supposons, par exemple,

$$A = \sqrt{\rho_i \rho_{i+1}}.$$

Soit $v_1, v_2, \ldots, v_p$ un système fondamental d'intégrales dans le voisinage du point A. Soient $w_1, w_2, \ldots, w_p$ ce que deviennent ces intégrales quand on revient au point A après avoir décrit le contour C. Les intégrales v peuvent se développer suivant les puissances croissantes de

$$\mathrm{l}x - \mathrm{l}A$$

et si l'on a

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A > 2\pi,$$

les développements sont encore valables quand on fait

$$\mathrm{l}x - \mathrm{l}A = 2i\pi.$$

En substituant alors $2i\pi$ à la place de $\mathrm{l}x - \mathrm{l}A$ dans les développements des intégrales v et de leurs dérivées, on aura les valeurs des intégrales w et de leurs dérivées, ce qui suffit pour déterminer la substitution du groupe de l'équation (1), qui correspond au contour C.

La méthode de M. Hamburger peut être aisément étendue au cas où

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A < 2\pi.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A = \frac{\pi}{2\alpha},$$

puis nous développerons les intégrales v suivant la puissance de

$$\frac{x^{i\alpha} - A^{i\alpha}}{x^{i\alpha} + A^{i\alpha}} = z.$$

Le développement sera encore convergent pour

$$x = A\,e^{2i\pi}$$

ou

$$z = \frac{e^{-2\pi\alpha} - 1}{e^{-2\pi\alpha} + 1}.$$

En remplaçant, dans les développements des intégrales v et de leurs dérivées, z par cette valeur, on aura les valeurs des intégrales w et de leurs dérivées et par conséquent la substitution qui correspond au contour C.

Il suffit de réfléchir un instant à la nature de ces méthodes pour comprendre qu'on peut les varier à l'infini. Le calculateur devra se guider dans son choix d'après la convergence plus ou moins rapide des séries employées. Or cette convergence dépend avant tout de la position relative des $n+1$ points singuliers. C'est donc cette position qui déterminera le choix d'une méthode.

Mais aucune des méthodes ainsi proposées ne nous apprendrait rien sur les propriétés des invariants fondamentaux considérés comme fonctions des coefficients et étudiés au point de vue de la théorie des fonctions. C'est cette étude que nous allons aborder dans le paragraphe suivant.

III. — Propriétés des invariants fondamentaux.

Écrivons l'équation (1) sous la forme suivante :

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum_{k=0}^{k=p-2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_h \frac{A_{hki}}{(x-a_i)^h} \frac{d^k v}{dx^k}. \tag{1}$$

Pour écrire ainsi cette équation nous avons décomposé en éléments simples les coefficients des diverses dérivées de v, qui par hypothèse sont des fonctions rationnelles de x. Nous avons supposé de plus que ces fonctions rationnelles n'admettaient pas de partie entière, car il est toujours permis de faire cette hypothèse.

Les invariants fondamentaux que nous cherchons seront des fonctions des a_i et des A_{hki}. Considérons d'abord les a_i comme des constantes et les A comme seules variables. Je dis que *les invariants seront des fonctions entières des* A.

Pour le faire voir, il suffit de démontrer ce qui suit :

Écrivons l'équation (1) sous la forme suivante :

$$(1') \qquad \frac{d^p v}{dx^p} = \alpha \Sigma \varphi_k \frac{d^k v}{dx^k} + \beta \Sigma \psi_k \frac{d^k v}{dx^k}.$$

Les φ_k et les ψ_k sont des fonctions rationnelles de x que je suppose entièrement déterminées; α et β sont des paramètres que je vais regarder comme variables. Il suffit, dis-je, de démontrer que les invariants sont des fonctions entières de α et de β.

Considérons un point quelconque a du plan et décrivons de ce point comme centre un cercle K assez petit pour ne contenir aucun point singulier. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$, p intégrales assujetties aux conditions suivantes :

Pour $x = a$, $\quad v_1 = 1$, $\quad$ ses $p-1$ premières dérivées sont nulles;
$\quad v_i = 0$, $\quad$ ses $p-1$ premières dérivées sont nulles, excepté la dérivée d'ordre $i-1$ qui est égale à 1.

Les p intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont développables à l'intérieur du cercle K suivant les puissances croissantes de $x-a$. Le coefficient de $(x-a)^m$ est un polynome d'ordre $m-p+1$ en α et en β. On a donc un développement de ces intégrales suivant les puissances de $x-a$, de α et de β. Il reste à faire voir que ce développement est convergent.

Si l'on regarde v comme fonction de x, de α et de β, l'équation (1) peut être regardée comme une équation aux différences partielles et le théorème de M^me^ Kowalevski (*Journal de Crelle*, t. 80), appliqué à cette équation, montre que v peut être développé suivant les puissances de $x-a$, de $\alpha-\alpha_0$ et de $\beta-\beta_0$, pourvu que x soit intérieur au cercle K et que les modules de $\alpha-\alpha_0$ et de $\beta-\beta_0$ soient suffisamment petits. Ainsi v est une fonction holomorphe de α et de β

dans le voisinage d'un point quelconque α_0, β_0; c'est donc une fonction entière de α et de β et le développement de v suivant les puissances de $x-a$, de α et de β est convergent quels que soient α et β, pourvu que x soit intérieur au cercle K.

Il faut maintenant démontrer que, si x est regardé comme une constante, v est encore une fonction entière de α et de β, *quand même x est extérieur au cercle* K. Pour définir complètement la fonction v dans ce cas, il ne suffit pas de se donner la valeur de x, il faut encore connaître le chemin amx par lequel cette variable a atteint cette valeur, en partant du point a.

Supposons, pour fixer les idées, que b soit un point intérieur à K, que K' soit un cercle ayant son centre en b et ne contenant aucun point singulier, que x soit intérieur au cercle K' et extérieur à K, enfin que le chemin amx soit tout entier intérieur à la figure formée par l'ensemble des deux cercles K et K'.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ un système fondamental d'intégrales défini comme il suit : u_i devra satisfaire pour $x=b$ aux mêmes conditions auxquelles était assujettie v_i pour $x=a$.

Soient v_i^1 la valeur de v_i pour $x=b$, v_i^{k+1} la valeur de sa dérivée $k^{\text{ième}}$. On aura

$$v_i = \sum_{k=1}^{k=p} v_i^k u_k.$$

Or les v_i^k sont des fonctions entières de α et de β puisque le point b est intérieur au cercle K, et les u_k sont aussi des fonctions entières de α et de β puisque le point x est intérieur au cercle K'. Donc les v_i sont aussi des fonctions entières de α et de β.

Le raisonnement serait le même si, au lieu d'avoir à considérer seulement deux cercles de convergence K et K', il était nécessaire d'en envisager plusieurs.

Supposons maintenant que le chemin amx se réduise à un contour fermé C. Les valeurs des intégrales v_i et de leurs dérivées ne sont alors autre chose que ce que nous avons appelé α_i^k dans le paragraphe I. Or les invariants fondamentaux sont des polynomes entiers par rapport aux α_i^k, ce seront donc des fonctions entières de α et de β.

Ainsi quand on regarde les a_i comme des constantes, les invariants sont des fonctions entières des A_{hki} et peuvent par conséquent être développés suivant les puissances de ces quantités A_{hki}. Considérons un quelconque des coefficients de ces développements, ce sera évidemment une fonction des a_i et c'est la nature de cette fonction qu'il nous reste à étudier. Il est aisé de voir que ces fonctions s'expriment à l'aide de quadratures successives. Écrivons, en effet, l'équation (1) sous la forme (1') et considérons le développement de l'intégrale v_i suivant les puissances de α et de β

$$v_i = \Sigma\, v_{imn}\alpha^m\beta^n.$$

Je dis qu'on peut obtenir le coefficient v_{imn} par de simples quadratures. Je suppose, en effet, que cela soit vrai pour $v_{i,m-1,n}$ et $v_{i,m,n-1}$; cela sera vrai aussi pour v_{imn}, car on a identiquement

$$\frac{d^k v_{imn}}{dx^p} = \Sigma\,\varphi_k \frac{d^p v_{i,m-1,n}}{dx^k} + \Sigma\,\psi_k \frac{d^k v_{i,m,n-1}}{dx^k},$$

et la dérivée $p^{\text{ième}}$ de v_{imn} s'exprimant à l'aide de quadratures successives, il en sera de même de la fonction v_{imn} elle-même.

Soit maintenant w^k_{imn} le coefficient de $\alpha^m\beta^n$ dans le développement de w^k_i. Ce coefficient s'exprimera pour la même raison par des quadratures, et il en sera de même des coefficients qui entrent dans le développement des invariants, car ce sont des polynomes entiers par rapport aux w^k_{imn}. On peut d'ailleurs pousser plus loin l'étude du développement de la fonction v_i. A cet effet posons

$$A(x, \alpha_1) = \int_0^x \frac{dx}{x - \alpha_1},$$

$$A(x, \alpha_1, \alpha_2) = \int_0^x \frac{dx\,A(x, \alpha_1)}{x - \alpha_2},$$

. . . .

$$A(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q) = \int_0^x \frac{dx\,A(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1})}{x - \alpha_q}.$$

Remarquons maintenant qu'on peut mettre l'équation (1) sous la forme de p équations simultanées du premier ordre. Si les intégrales sont régulières dans le voisinage de chacun des points singuliers, nous pourrons introduire p variables simultanées $u_1 = v$, u_2, …, u_p et remplacer l'équation (1) par les p équations simultanées

$$\frac{du_i}{dx} = \Sigma\,\varphi_{ik} u_k.$$

Les φ_{ik} seront des fonctions rationnelles de la forme suivante :

(2) $$\varphi_{ik} = \sum \frac{A_{ik\lambda}}{x - a_\lambda},$$

les $A_{i.k.\lambda}$ étant des constantes. Supposons par exemple $p = 2$, l'équation (1) s'écrira

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{P}{Q^2} v;$$

Q sera le produit $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ et P sera un polynome en x de degré $2n - 2$. Nous pourrons toujours trouver deux polynomes entiers A et C de degré $n - 1$ en x et satisfaisant identiquement à la relation

$$C + A^2 + A'Q - AQ' = P.$$

Posons alors $v = u_1$ et introduisons une variable auxiliaire u_2. Nous pourrons écrire

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{A}{Q} u_1 + \frac{1}{Q} u_2,$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{C}{Q} u_1 + \frac{Q' - A}{Q} u_2.$$

Les coefficients sont bien de la forme (2).

Il est aisé de voir maintenant que, si l'on développe l'intégrale v_i suivant les puissances des $A_{ik\lambda}$, le coefficient d'un terme quelconque sera une somme de fonctions telles que A où les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ ne seront autre chose que les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se succédant dans un ordre quelconque et chacun d'eux pouvant d'ailleurs être répété un nombre quelconque de fois.

IV. — Fonctions inverses.

Nous avons jusqu'ici étudié les invariants fondamentaux comme fonctions des coefficients de l'équation (1); mais si, au contraire, on regarde les coefficients comme des fonctions des invariants fondamentaux, on est conduit à des transcendantes intéressantes qui jouent par rapport aux équations linéaires le même rôle que la fonction modulaire par rapport aux intégrales elliptiques.

Mais ici il importe de faire une remarque : reprenons l'équation

(1) $$\frac{d^p v}{dx^p} = \Sigma \varphi_k \frac{d^k v}{dx^k}$$

et considérons les infinis des coefficients φ_k; ils seront de deux sortes : les uns seront des points singuliers proprement dits et quand la variable x décrira un contour fermé autour d'un de ces points, les intégrales subiront une substitution linéaire: les autres seront de simples pôles des intégrales ou bien encore, si a est un pareil point, toutes les intégrales se mettront sous la forme

$$(x-a)^\lambda \varphi(x),$$

λ étant une constante qui est la même pour toutes les intégrales et $\varphi(x)$ étant holomorphe. Il en résulte que, quand x décrit un contour fermé autour du point a, toutes les intégrales sont multipliées par un même facteur et que leurs rapports reprennent leurs valeurs primitives. Ces points s'appelleront des *points à apparence singulière*. Pour qu'un infini des coefficients φ_k soit un point à apparence singulière, il faut $\frac{(p+2)(p-1)}{2}$ conditions.

Supposons donc une équation de la forme (1) admettant n points singuliers outre le point ∞, savoir $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et q points à apparence singulière b_1, $b_2, \ldots, b_q$.

Je suppose que les intégrales soient partout régulières. L'équation (1) s'écrira alors

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum_{k=0}^{k=p-2} \frac{P_k}{Q^{p-k}} \frac{d^k v}{dx^k}.$$

Nous posons

$$Q = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_q)$$

et P_k est un polynome d'ordre

$$(p-k)(n+q-1).$$

L'équation (1) contient alors

$$\frac{p(p+1)}{2}(n+q) - \frac{p(p-1)}{2}$$

paramètres, à savoir :

1° Les $n+q$ infinis $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_q$;

2° Les

$$\frac{(n+q-1)(p+2)(p-1)}{2} + p - 1$$

coefficients des polynomes P_k.

Mais nous avons

$$q\,\frac{(p+2)(p-1)}{2}$$

conditions exprimant que les points b sont à apparence singulière. Il reste donc

$$n\frac{p(p+1)}{2}+q-\frac{p(p-1)}{2}$$

paramètres indépendants.

Remarquons de plus qu'on peut toujours supposer

$$a_1=0, \qquad a_2=1,$$

car si cela n'était pas, on ferait un changement linéaire de variable. Il faut donc encore de ce chef, retrancher deux paramètres.

Si nous supposons de plus qu'il n'y a pas de points à apparence singulière, il restera enfin

$$n\frac{p(p+1)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}-2 \tag{2}$$

paramètres. Mais le groupe G de l'équation (1) est dérivé de n substitutions et nous avons vu au paragraphe I qu'un pareil groupe G, si l'on ne le regarde pas comme distinct de ses transformés par les diverses substitutions linéaires, dépend de

$$(n-1)(p^2-1) \tag{3}$$

invariants fondamentaux.

Si $p=2$ les expressions (2) et (3) se réduisent toutes deux à $3n-3$. Le nombre des paramètres de l'équation est alors égal au nombre des paramètres du groupe; d'où la conséquence suivante :

On peut *en général* trouver une équation du second ordre, sans points à apparence singulière, qui admette un groupe donné.

Je veux dire par là que, pour que cette équation existe, il n'est pas nécessaire qu'il y ait aucune relation entre les invariants du groupe et que si l'on doit leur imposer certaines conditions, ce ne sont que des conditions d'inégalité. D'ailleurs on pourra trouver une infinité d'équations du second ordre qui auront des points à apparence singulière et qui admettront un même groupe.

Supposons maintenant $p>2$ et bien entendu $n>1$. On voit aisément que l'expression (2) est toujours plus petite que l'expression (3); d'où cette conséquence :

On ne peut pas en général trouver une équation d'ordre supérieur au second, sans points à apparence singulière et qui admette un groupe donné.

Il faut donc en général, si l'on veut construire une équation ayant un groupe donné, lui donner des points à apparence singulière.

C'est pour éviter ces points qui compliqueraient notablement les résultats et les démonstrations que je me bornerai ici au cas des équations du second ordre. Je supposerai donc que j'ai affaire à une équation du second ordre sans point à apparence singulière.

Considérons sur la sphère les $n+1$ points singuliers

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots, \quad a_n, \quad a_{n+1} = \infty$$

et joignons-les par n coupures

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_n a_{n+1}.$$

Considérons deux intégrales quelconques de l'équation (1) et leur rapport z: quand x parcourra la sphère sans franchir les coupures, z parcourra une certaine région R. Cette région sera analogue aux polygones générateurs des groupes fuchsiens et kleinéens, mais elle pourra se recouvrir partiellement elle-même; elle aura $2n$ côtés

$$\alpha_1 \alpha_2, \quad \alpha_2 \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n \alpha_{n+1}$$

et

$$\alpha_1 \beta_2, \quad \beta_2 \beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_n \alpha_{n+1}$$

répondant aux n coupures

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_n a_{n+1}.$$

Les côtés $\beta_i \beta_{i+1}$ et $\alpha_i \alpha_{i+1}$ seront conjugués et l'on passera de l'un à l'autre par une substitution linéaire S_i. Les sommets α_1 et α_{n+1} formeront chacun un cycle. Il y aura $n-1$ autres cycles formés respectivement des sommets α_i et β_i. La somme des angles α_i et β_i est alors égale à

$$2\pi(1 - 2\lambda_i),$$

λ_i étant la plus petite racine de l'équation déterminante relative au point singulier a_i. De même les angles α_1 et α_{n+1} sont égaux à

$$2\pi(1 - 2\lambda_1) \quad \text{et} \quad 2\pi(1 - 2\lambda_{n+1}).$$

Quand on connaît les valeurs de

$$(4) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n+1}, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_n, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{n+1},$$

les substitutions S_i sont entièrement déterminées et, comme ce sont les substitutions fondamentales du groupe G, les invariants fondamentaux de ce groupe s'exprimeront aisément en fonctions des quantités (4). Nous regarderons donc les coefficients de l'équation (1) comme des fonctions des quantités (4).

La région R n'est pas entièrement déterminée quand on se donne les quantités (4); en effet on peut faire varier arbitrairement la forme des côtés $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, ..., $\alpha_n\alpha_{n+1}$ et il s'ensuit des variations correspondantes des côtés conjugués $\alpha_1\beta_2$, $\beta_2\beta_3$, ..., $\beta_n\alpha_{n+1}$. Toutefois toutes les régions R obtenues de la sorte sont *équivalentes*, au sens donné à ce mot au paragraphe III du *Mémoire sur les groupes kleinéens* [*Acta mathematica*, t. 3, p. 63 [1]]. On pourra d'ailleurs tracer les coupures

$$a_1a_2, \quad \ldots, \quad a_na_{n+1},$$

de telle façon que les côtés

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n\alpha_{n+1}$$

aient telle forme que l'on veut.

Il résulte de là que, s'il existait deux équations (1) conduisant à un même système de valeurs des quantités (4), on pourrait toujours tracer les coupures de telle façon que la région R soit la même pour l'une et pour l'autre équation.

Imaginons maintenant des fonctions de z jouissant des propriétés suivantes : 1° elles seront uniformes quand z parcourra la région R; il est clair que, si la région R se recouvre partiellement elle-même, à deux points z_0 et z_1 de cette région pourra correspondre un même point du plan; dans ce cas, la fonction pourra prendre deux valeurs différentes aux points z_0 et z_1; 2° elles reprendront la même valeur en deux points correspondants du périmètre de R; 3° elles n'auront d'autre singularité que des pôles (et des points singuliers logarithmiques dans le cas où quelques-uns des angles α ou β sont nuls).

Il est clair que toutes ces fonctions s'exprimeront rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles. [*Cf.* Schottky, *Journal de Crelle*, t. 83, et *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. 1, p. 228) [2].]

Si l'on regarde maintenant x comme une fonction de z, ce sera précisément une des fonctions dont nous venons de parler, et il est clair que toutes les autres seront rationnelles en x.

Supposons maintenant qu'il y ait deux équations (1) qui conduisent à un même système de valeurs des quantités (4) et par conséquent à une même région R. Soient x et x_1 les variables correspondantes que nous regarderons

---

(1) Ce Tome, p. 271.
(2) Ce Tome, p. 200. N. E. N.

comme des fonctions de z. D'après ce qui précède, x sera rationnel en x_1 et x_1 en x et par conséquent on aura entre ces variables une relation de la forme

$$Axx_1 + Bx + Cx_1 + D = 0.$$

Soient, maintenant, a_i et a_i^1 les valeurs de x et de x_1 qui correspondent à la valeur $z = \alpha_i$. Ce seront des points singuliers des deux équations (1) et par hypothèse, on aura

$$a_1 = a_1^1 = 0, \qquad a_2 = a_2^1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_{n+1}^1 = \infty.$$

C'est-à-dire qu'on aura

$$x = x_1$$

pour $z = \alpha_1$, $z = \alpha_2$, $z = \alpha_{n+1}$.

Il en résulte que x sera identiquement égal à x_1. Les deux équations (1) dont nous avions supposé l'existence seront donc identiques.

Il résulte de là que, quand les quantités (4) sont entièrement déterminées, il en est de même de l'équation (1) et que *les coefficients de cette équation sont des fonctions uniformes des quantités* (4).

Ainsi, nous sommes conduits à une nouvelle classe de fonctions uniformes de plusieurs variables. Ces fonctions demeurent invariables quand on fait subir aux quantités (4) certaines substitutions dont je vais dire quelques mots.

Reprenons pour cela le polygone R défini plus haut et appelons S_k la substitution linéaire qui change $\beta_k \beta_{k+1}$ en $\alpha_k \alpha_{k+1}$. Convenons en outre de poser pour plus de symétrie dans les notations

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \alpha_{i+n+1} = \alpha_i, \qquad \beta_{i+n+1} = \beta_i.$$

La substitution suivante :

$$(5) \qquad \left| \begin{matrix} \alpha_i, & \beta_{k+1-i} S_k \\ \beta_i, & \alpha_{k+1-i} \\ \lambda_i, & \lambda_{k+1-i} \end{matrix} \right|$$

appliquée aux quantités (4) laissera inaltérée la fonction dont nous nous occupons. Nous avons, grâce au Tableau (5), les nouvelles valeurs des quantités α, β et λ en fonction des anciennes, car les coefficients de la substitution linéaire S_k s'obtiennent aisément en fonctions des α, des β et des λ.

V. — Énoncé du deuxième problème.

Nous avons montré, dans les quatre paragraphes précédents, comment on peut résoudre le problème suivant :

Trouver le groupe d'une équation donnée, soit au point de vue du calcul numérique, soit au point de vue de la théorie des fonctions.

Voici le second problème que j'ai à résoudre avant d'aller plus loin.

On donne une équation du second ordre

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

où φ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0. \tag{2}$$

On suppose que la fonction φ dépend d'un certain nombre de paramètres et l'on demande de disposer de ces paramètres de telle manière que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales. Nous dirons alors, pour abréger, que l'équation (1) est *fuchsienne*.

Nous ne nous occuperons dans ce qui va suivre que des fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental (première, deuxième et sixième familles). Nous laissons donc systématiquement de côté les fonctions fuchsiennes qui existent dans tout le plan.

Pour que l'équation (1) soit fuchsienne, il faut qu'elle remplisse d'une part certaines conditions algébriques, d'autre part un certain nombre de conditions transcendantes.

Commençons par énoncer les conditions algébriques.

Les points singuliers de l'équation (1) sont de deux sortes :

1° Les points où y cesse d'être une fonction holomorphe de x et les points où x ou y cessent d'être finis ;

2° Les points singuliers proprement dits.

Il n'y a pas à s'inquiéter des premiers, car on peut poser

$$x = \theta(x', y'), \qquad y = \theta_1(x', y'),$$

θ et θ_1 étant des fonctions rationnelles, et s'arranger de telle façon que, dans le voisinage du point considéré, les nouvelles variables x' et y' restent finies et que y' soit holomorphe en x'.

Quant aux points singuliers proprement dits, à chacun d'eux correspond une équation déterminante et *la différence des racines de cette équation doit être nulle ou une partie aliquote de l'unité*. Ce sont là les conditions algébriques qu'il s'agissait d'énoncer et, quand elles seront remplies, je dirai que l'équation (1) est *normale*.

Considérons d'abord deux équations normales

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x) v, \qquad \frac{d^2 v}{dx_1^2} = \varphi_1(x_1) v,$$

où nous supposerons que φ et φ_1 sont des fonctions rationnelles de x et de x_1. Si l'on peut passer de la première de ces équations à la seconde en posant

$$x = \frac{a x_1 + b}{c x_1 + d},$$

nous ne regarderons pas ces deux équations comme distinctes.

Considérons maintenant une équation normale plus générale

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0 \tag{2}$$

et posons

$$x' = \theta(x, y), \qquad y' = \theta_1(x, y). \tag{3}$$

Si on laisse de côté certains cas exceptionnels, on pourra tirer des équations (2) et (3) x et y en fonctions rationnelles de x' et de y'. Je supposerai que ces cas exceptionnels ne se présentent pas.

On trouvera alors

$$\frac{d^2 v}{dx'^2} = \varphi'(x', y') v, \tag{1'}$$

$$\psi'(x', y') = 0. \tag{2'}$$

Je ne regarderai pas comme distinctes les équations (1) et (1').

Je dirai que deux équations

$$(1)\qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v,$$

$$(1')\qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v;$$

$$(2)\qquad \psi(x, y) = 0,$$

$$(2')\qquad \psi_1(x, y) = 0$$

appartiennent au même *type* si les deux relations (2) et (2') sont identiques et si les points singuliers des équations (1) et (1') sont les mêmes ainsi que les équations déterminantes relatives à chacun d'eux.

Il va sans dire que si une équation

$$(1'')\qquad \frac{d^2v}{dx'^2} = \varphi'_1(x', y')v,$$

$$(2'')\qquad \psi'_1(x', y') = 0$$

ne doit pas être regardée comme distincte de (1') en vertu de la convention faite plus haut, je dirai encore que (1) et (1'') appartiennent au même type.

Voici le problème qu'il s'agit de résoudre :

1° *Reconnaître si, parmi les équations d'un type donné, il y a une équation fuchsienne.*

2° *Trouver cette équation si elle existe.*

Mais il faut d'abord faire une distinction et classer les types d'équations normales en types fuchsiens, elliptiques et rationnels.

Supposons que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation (1); cette fonction admettra un polygone générateur R_0 qui aura $2n$ côtés de la première sorte et $2n$ sommets de la première ou de la deuxième sorte. La somme des angles du polygone devra être plus petite que

$$\pi(2n-2).$$

Soient q le genre de la relation (2); p le nombre des points singuliers de l'équation (1); $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ces points singuliers; α_i la différence des racines de l'équation déterminante relative au point a_i.

Si $p > 0$, les sommets de R_0 se répartiront en p cycles; on aura

$$n = 2q + p - 1$$

et la somme des angles sera égale à

$$2\pi \Sigma \alpha_i.$$

On doit donc avoir l'inégalité

$$(4) \qquad \Sigma \alpha_i < 2q + p - 2.$$

Si $p = 0$, les sommets de R_0 formeront un seul cycle et la somme des angles sera 2π. On aura

$$n = 2q,$$

d'où l'inégalité

$$(4') \qquad q > 1.$$

Si les inégalités (4) ou (4') sont satisfaites, le type considéré sera un type *fuchsien*.

Supposons maintenant que x soit fonction doublement périodique du rapport des intégrales de (1), on aura les égalités

$$(5) \qquad \Sigma \alpha_i = 2q + p - 2,$$

ou bien

$$(5') \qquad q = 1, \qquad p = 0.$$

Le type sera alors *elliptique*.

Voici d'ailleurs l'énumération des types elliptiques [1] :

$$\begin{array}{lllll}
q = 1, & p = 0, & & & \\
q = 0, & p = 3, & \alpha_1 = \frac{1}{3}, & \alpha_2 = \frac{1}{3}, & \alpha_3 = \frac{1}{3}, \\
q = 0, & p = 3, & \alpha_1 = \frac{1}{2}, & \alpha_2 = \frac{1}{4}, & \alpha_3 = \frac{1}{4}, \\
q = 0, & p = 3, & \alpha_1 = \frac{1}{2}, & \alpha_2 = \frac{1}{3}, & \alpha_3 = \frac{1}{6}, \\
q = 0, & p = 4, & \multicolumn{3}{l}{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}.}
\end{array}$$

Supposons enfin que x soit fonction rationnelle de z, on aura les inéga-

---

(1) Si $q = 0$, on ne peut supposer $p = 0$ ni $p = 1$. Si l'on suppose $p = 2$, on est amené à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{Av}{(x-a)^2}.$$

lités

(6) $$\Sigma \alpha_i > 2q + p - 2,$$

l'hypothèse $p = q = 0$ devant être rejetée.

Le type est alors *rationnel*. Voici l'énumération des types rationnels, d'ailleurs bien connus :

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{n},$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{3},$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4},$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{5}.$$

Cela posé, les équations d'un même type dépendent d'un certain nombre P de paramètres arbitraires, de telle sorte que ce type se compose de ∞^{P} équations distinctes.

Ces P paramètres, étant complexes, correspondent à 2P paramètres réels. Or le nombre de ces paramètres réels est précisément celui des conditions transcendantes auxquelles doit satisfaire l'équation (1) (qui est supposée appartenir au type donné) pour que x soit fonction fuchsienne de z (ou bien fonction doublement périodique, ou rationnelle dans le cas d'un type elliptique ou rationnel).

[Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. I, p. 234, 257, 262 et 272) ([1]).]

Si, au lieu de conditions transcendantes, il s'agissait de conditions algébriques, on pourrait conclure de là que, parmi les équations d'un même type, il y en a toujours une qui est fuchsienne. Mais ici cette conclusion n'est pas légitime et une démonstration spéciale est nécessaire. C'est cette démonstration qui fait l'objet principal du problème qui nous occupe.

Il est aisé d'en comprendre l'importance.

Supposons en effet que l'équation

(1) $$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v,$$

(2) $$\psi(x, y) = 0$$

soit fuchsienne. Soient

$$(x = a_1, y = b_1), \quad (x = a_2, y = b_2), \quad \ldots, \quad (x = a_p, y = b_p)$$

([1]) Ce Tome, p. 205, 224, 229, 238.

les points singuliers de l'équation (1) et $\frac{1}{k_i}$ la différence des racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i). k_i sera un nombre entier positif ou bien infini.

Considérons une fonction de x et de y n'admettant d'autres points singuliers que les points

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_p, b_p)$$

et cela de telle façon qu'elle revienne à sa valeur primitive quand le point analytique (x, y) a décrit k_i tours autour du point singulier (a_i, b_i). Cette dernière condition doit être supprimée quand $k_i = \infty$.

Cette fonction sera uniforme en z.

Il en sera ainsi des intégrales de l'équation

$$\frac{d^q w}{dx^q} = \Sigma \varphi_k(x, y) \frac{d^k w}{dx^k}, \tag{7}$$

si les fonctions φ_k sont rationnelles en x et y et s'il n'y a d'autres points singuliers que

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_p, b_p),$$

de telle sorte que toutes les racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i) soient des multiples de $\frac{1}{k_i}$ (cette dernière condition étant supprimée quand $k_i = \infty$).

Il en sera de même de toute fonction rationnelle de x et de y et d'un grand nombre de fonctions algébriques.

Par conséquent, si l'on démontre que dans tout type fuchsien il y a une équation fuchsienne, on aura fait voir :

1° Qu'étant donnée une équation linéaire quelconque à coefficients algébriques, la variable et les intégrales peuvent s'exprimer en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire z.

2° Qu'étant donnée une courbe algébrique quelconque, les coordonnées x et y d'un point de cette courbe s'expriment en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire z.

VI. — Subordination des types.

Considérons deux équations normales

$$(1)\qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v,$$

$$(1')\qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v.$$

Les coefficients φ et φ_1 sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y qui sont liées entre elles par une relation algébrique

$$(2)\qquad \psi(x, y) = 0,$$

que *je suppose être la même pour les deux équations* (1) et (1′).

Je suppose que l'équation (1) admette p points singuliers

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_p, b_p),$$

de telle façon que la différence des racines de l'équation déterminante relative à (a_i, b_i) soit $\frac{1}{k_i}$.

Je suppose que l'équation (1′) admette les mêmes points singuliers (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_p, b_p) que l'équation (1) et en outre q autres points singuliers

$$(a_{p+1}, b_{p+1}), \quad (a_{p+2}, b_{p+2}), \quad \ldots, \quad (a_{p+q}, b_{p+q})$$

et cela de telle sorte que la différence des racines de l'équation déterminante relative à (a_i, b_i) soit $\frac{1}{N_i}$.

Je suppose enfin que N_1 soit divisible par k_1, N_2 par k_2, $\ldots$, N_p par k_p. Si k_i est infini, N_i devra être aussi infini. Si $N_i = \infty$, la condition de divisibilité sera regardée comme remplie, quel que soit k_i.

Je dirai alors que le type dont fait partie l'équation (1′) est subordonné au type dont fait partie l'équation (1).

Soit un type fuchsien T′ subordonné à un autre type fuchsien T. Je suppose que chacun d'eux contienne une équation fuchsienne ; le premier l'équation E′ et le second l'équation E. Soit z le rapport des intégrales de l'équation E′ et t celui des intégrales de l'équation E. Il est aisé de voir que t est une fonction uniforme de z. Cette fonction n'existe évidemment que quand z est intérieur au cercle fondamental. De son côté t ne peut prendre aucune valeur extérieure à ce cercle; t prend au contraire une infinité de fois toute valeur intérieure au cercle fondamental.

Soient encore $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$ les points singuliers du type T et $\frac{1}{k_i}$ la différence des racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i). Soit F une fonction du point analytique (x, y) qui ne présente d'autre point singulier que les points $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$ et de telle façon qu'après k_i tours autour du point (a_i, b_i) la fonction reprenne sa valeur primitive. F sera par exemple une intégrale de l'équation linéaire (7) du paragraphe précédent. F sera une fonction uniforme de t et par conséquent de z.

Mais supposons qu'on ne sache pas si le type T contient une équation fuchsienne; qu'on ne puisse pas, par conséquent, démontrer l'existence de t, mais qu'au contraire on sache que T' contient une équation fuchsienne et que la fonction z existe. Il est aisé de voir que F est encore une fonction uniforme de z.

Ainsi pour démontrer le résultat suivant : *Les intégrales d'une équation linéaire à coefficients rationnels en x et y peuvent s'exprimer ainsi que x et y en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire*, il n'est pas nécessaire de faire voir que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne; il suffit de montrer que, parmi les types subordonnés à un type fuchsien donné, il en est toujours un qui contient une équation fuchsienne.

De là l'importance de cette notion de la subordination des types.

En particulier, considérons une équation E à coefficients rationnels et soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

ses points singuliers. Soit k_i un nombre entier tel que toutes les racines de l'équation déterminante relative au point a_i soient des multiples de $\frac{1}{k_i}$. S'il n'existe pas de pareils nombres entiers, on fera $k_i = \infty$.

Au lieu d'envisager le type T qui admet les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de telle façon que les différences des racines des équations déterminantes soient $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$, on pourra envisager un type T' subordonné à T. On supposera par exemple que T' admette, outre les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, p autres points singuliers quelconques $b_1, b_2, \ldots, b_p$, et que chacune des $p+n$ équations déterminantes correspondant à ces divers points singuliers ait une racine double.

Supposons que ce type T′ contienne une équation fuchsienne E′; alors x sera une fonction fuchsienne du rapport z des intégrales de cette équation. La propriété caractéristique de cette fonction fuchsienne c'est de ne pouvoir prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_p$, et, si elle existe, il est évident que les intégrales de l'équation E seront des fonctions uniformes de z.

Ainsi il suffit de démontrer que l'on peut toujours trouver une fonction fuchsienne qui ne puisse pas prendre n valeurs données $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pour faire voir que toutes les équations linéaires à coefficients rationnels peuvent s'intégrer en n'employant que certaines fonctions uniformes que je me réserve d'ailleurs d'étudier dans un Mémoire ultérieur.

Il en est de même des équations à coefficients algébriques, car on sait que l'intégration d'une équation à coefficients algébriques se ramène à celle d'une équation d'ordre plus élevé à coefficients rationnels.

VII. — Lemme fondamental.

Aucun type fuchsien ne peut contenir plusieurs équations fuchsiennes distinctes.

Supposons en effet qu'un type T contienne deux équations fuchsiennes E et E′; soit z le rapport de deux intégrales u_1 et u_2 de l'équation E; soit t le rapport de deux intégrales u'_1 et u'_2 de l'équation E′.

On sait que z ne peut prendre d'autres valeurs que celles qui sont intérieures à un certain cercle fondamental. On peut toujours choisir les intégrales u_1, u_2, u'_1 et u'_2 de telle façon : 1° que le cercle fondamental relatif à z, de même que le cercle fondamental relatif à t, ait pour centre le point O et pour rayon l'unité; 2° que les deux variables z et t s'annulent en même temps, pour $x = a$ par exemple; 3° que pour une autre valeur de x, pour $x = b$, l'argument de z soit égal à celui de t.

Il est clair que z sera fonction uniforme de t, et réciproquement que t sera fonction uniforme de z. Il résulte alors des hypothèses faites plus haut que $\frac{t}{z}$ considéré, soit comme fonction de z, soit comme fonction de t, n'existe pas à l'extérieur du cercle fondamental et qu'à l'intérieur de ce cercle, ce rapport reste holomorphe et ne peut s'annuler.

Considérons par exemple $\frac{t}{z}$ comme fonction de z. Posons

$$z = \xi + i\eta,$$
$$u = \log \operatorname{mod} \frac{t}{z};$$

u sera une fonction de ξ et de η, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental et satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0.$$

Considérons dans le plan des z un cercle C concentrique au cercle fondamental et ayant pour rayon $r < 1$.

Le long de ce cercle, t est constamment de module inférieur à l'unité, et par conséquent on a

$$(2) \qquad u < \log \operatorname{mod} \frac{1}{r}.$$

Mais toute fonction holomorphe satisfaisant à l'équation (1) ne peut devenir, à l'intérieur d'un contour quelconque, supérieure à la plus grande des valeurs qu'elle prend le long de ce contour. L'inégalité (2) subsiste donc pour tous les points intérieurs au cercle C.

Mais je puis prendre le rayon de ce cercle C aussi voisin que je veux de l'unité. Quand je fais tendre r vers l'unité, le second membre de l'inégalité (2) tend vers zéro. Il résulte de là qu'à l'intérieur du cercle fondamental, u ne peut prendre aucune valeur positive; d'où

$$\operatorname{mod} \frac{t}{z} = 1.$$

Or rien ne distingue t de z; on peut donc écrire aussi

$$\operatorname{mod} \frac{z}{t} = 1,$$

d'où

$$\operatorname{mod} z = \operatorname{mod} t,$$

d'où

$$t = z e^{i\theta},$$

θ étant une constante.

Mais, par hypothèse, t et z ont même argument pour $z = b$; on a donc

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad t = z.$$

Ainsi les deux équations E et E' ne sont pas distinctes. C. Q. F. D.

Ce lemme important a été énoncé d'abord par moi dans une Communication faite à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, t. 93, 17 octobre 1881, p. 582[1]). Il l'a été depuis par M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd 21, p. 209). M. Klein l'étendait d'ailleurs au cas des fonctions qui existent dans un domaine limité par une infinité de cercles [cf. *Mémoire sur les groupes kleinéens*, § IX (*Acta mathematica*, t. 3, p. 83[2])]. Mais je ne dirai rien ici de cette extension, qui ne me serait pas utile pour mon objet.

VIII. — Premier aperçu de la méthode de continuité.

M. Klein et moi, nous avons été conduits indépendamment l'un de l'autre à une méthode qui permet de démontrer que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne et que l'on peut appeler *méthode de continuité*. Nous avons fait de cette méthode différentes applications (voir *Comptes rendus*, t. 92, p. 1200 et 1486[3]; Klein, *Mathematische Annalen*, Bd 19, p. 565; Bd 20, p. 49, et Bd 21, p. 211; Poincaré, *Comptes rendus*, t. 94, p. 1038[4]). Voici quels sont les principes fondamentaux de cette méthode.

Supposons d'abord une variable réelle x et une fonction réelle y de cette variable; je suppose que, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x, il y ait une valeur de y et une seule, et que cette valeur soit une fonction analytique de x (holomorphe ou méromorphe); que y ne puisse pas reprendre deux fois la même valeur. On pourra évidemment en conclure que y prend une fois et une seule toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Supposons, au contraire, que la variable x, par sa nature même, ne puisse varier qu'entre deux limites a et b; que pour toutes les valeurs comprises entre a et b, on sache que y est une fonction analytique de x, mais que pour ces limites elles-mêmes, on ne sache rien; que y ne puisse jamais reprendre deux fois la même valeur. Quand x tendra vers a, y tendra vers une certaine limite A, et quand x tendra vers b, y tendra vers B. On sait alors seulement que y est constamment croissante ou décroissante et peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre A et B.

Au lieu d'une seule variable indépendante, considérons-en n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$

---

(1) Ce Tome, p. 33.
(2) Ce Tome, p. 291.
(3) Ce Tome, p. 14 et 21.
(4) Ce Tome, p. 41.

et n fonctions réelles de ces n variables, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Je suppose que, pour toutes les valeurs des x, les y soient des fonctions analytiques et que ces fonctions ne puissent jamais reprendre deux fois le même système de valeurs. Cela suffit pour que l'on soit certain que les y peuvent prendre tous les systèmes de valeurs possibles. Soit en particulier $n = 2$. Regardons x_1 et x_2 comme définissant la position d'un point sur une sphère S; y_1 et y_2 comme définissant la position d'un point sur une sphère S'. A chaque point de la sphère S correspond un point et un seul de la sphère S' et à aucun point de S' ne peut correspondre plus d'un point de S. Cela suffit pour qu'à tout point de S' corresponde un point de S.

Il en est encore de même si S et S', au lieu d'être deux sphères, sont deux surfaces fermées quelconques. Mais supposons maintenant que S n'est pas une surface fermée, mais une surface ouverte, présentant une sorte de *bord*, de *frontière*. Supposons que les coordonnées de chaque point m' de S' soient des fonctions analytiques des coordonnées du point correspondant m de S, lorsque ce point m n'est pas sur le bord de cette surface, mais que nous ne sachions rien lorsque le point m vient sur le bord de S. Il ne sera pas possible alors de conclure des hypothèses faites plus haut qu'à tout point de S' correspond un point de S.

La même chose arrivera, lorsque S et S' seront regardées comme des surfaces situées dans l'espace à plus de trois dimensions, seront des *Mannigfaltigkeiten* (multiplicités) à plus de deux dimensions, comme disent les Allemands.

Supposons toujours qu'à tout point m de S corresponde un point m' et un seul de S' de telle façon que les coordonnées de m' soient des fonctions analytiques de celles de m, à moins que m ne vienne sur le bord de la multiplicité S, dans le cas où cette multiplicité en aurait un. Supposons qu'à aucun point de S' ne puisse correspondre plus d'un point de S. Si S est une *multiplicité fermée*, nous serons certains qu'à tout point de S' correspondra un point de S. Si, au contraire, S est une *multiplicité ouverte* présentant un *bord*, une *frontière*, nous ne pouvons rien affirmer.

Appliquons maintenant ce qui précède au problème qui nous occupe.

Nous dirons que deux types

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v; \tag{1'}$$

$$\psi(x, y) = 0, \tag{2}$$

$$\psi_1(x, y) = 0 \tag{2'}$$

appartiennent à la même classe lorsque les deux relations (2) et (2′) seront de même genre, et lorsque les deux équations (1) et (1′) auront le même nombre de points singuliers, de telle façon que ces points singuliers se correspondent chacun à chacun et que les équations déterminantes relatives à deux points singuliers correspondants soient les mêmes.

Cela posé, à chaque type d'une même classe C′, nous ferons correspondre un point d'une certaine multiplicité S′.

De même, nous dirons que deux groupes fuchsiens (des première, deuxième ou sixième familles) appartiennent à une même classe lorsque le polygone générateur aura le même nombre de côtés, et lorsque les sommets se répartiront en un même nombre de cycles, de telle façon que ces cycles se correspondent chacun à chacun et que la somme des angles de deux cycles correspondants soit la même.

A chaque classe C′ de types correspond une classe C de groupes, de telle façon que si une équation fuchsienne appartient à la classe C′, son groupe appartienne à la classe C.

A chaque groupe de la classe C, faisons correspondre un point d'une multiplicité S.

A chaque point de S correspondra un point et un seul de S′; il suffit pour le voir de se reporter à la théorie des fonctions fuchsiennes qui montre qu'à chaque groupe fuchsien correspond une équation fuchsienne.

De plus, en vertu du lemme fondamental, à aucun point de S′ ne peut correspondre plus d'un point de S.

Il resterait à faire voir qu'à tout point de S′ correspond un point de S.

Pour cela, d'après ce qui précède, il suffit que S soit une multiplicité *fermée*, qu'elle n'ait pas de *bord*. *Cela n'est nullement évident* a priori.

En effet, parmi les groupes d'une classe, il y en a une infinité qui pourraient être des *groupes limites*, correspondant à des points du *bord* de la multiplicité S. Ce sont les groupes dont le polygone générateur présente un ou plusieurs côtés infinitésimaux. On voit, en effet, qu'on peut toujours construire un polygone générateur dont un des côtés soit aussi petit que l'on veut. Cela ne suffit pas d'ailleurs pour que S soit une multiplicité ouverte; car, en vertu du paragraphe IX de la *Théorie des groupes fuchsiens*, un même groupe peut être engendré par une infinité de polygones équivalents et il est possible que parmi ces polygones, on puisse toujours en choisir un dont tous les côtés soient supérieurs à une limite donnée.

Ainsi, il n'est pas évident que S est une multiplicité fermée et il est nécessaire de le démontrer, par une discussion spéciale à chaque cas particulier, avant d'affirmer qu'à tout point de S' correspond un point de S. C'est ce que M. Klein a négligé de faire. *Il y a là une difficulté dont on ne peut triompher en quelques lignes.*

IX. — Deuxième lemme.

Supposons que nous fassions varier notre polygone R_0 d'une façon continue et de telle manière que les éléments de ce polygone soient des fonctions continues d'un certain paramètre t. Envisageons maintenant l'équation fuchsienne que l'on peut former à l'aide de R_0 et le type T auquel appartient cette équation. Soit

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0 \qquad (\text{de genre } p) \tag{2}$$

cette équation fuchsienne. Le type T sera défini quand on connaîtra les $3p-3$ modules de la relation (2) et les points singuliers de l'équation (1); ces quantités s'appelleront les *paramètres* du type.

J'ai fait voir au paragraphe I du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* que les fonctions Θ que l'on peut former à l'aide de R_0 sont des fonctions continues de t et l'on peut en conclure que les paramètres du type T sont aussi des fonctions continues de t, ce qui est fort important au point de vue de l'application de la méthode de continuité.

Je vais pousser la chose plus loin. Je suppose que, lorsque t tend vers zéro, deux ou plusieurs côtés décroissent indéfiniment. (Il s'agit ici de leur longueur géométrique et non de leur L.) Je supposerai, par exemple, que deux côtés conjugués, ou que $2q$ côtés conjugués deux à deux, deviennent infiniment petits, de telle façon que ceux des côtés de R_0 qui restent finis soient encore conjugués deux à deux. R_0 est alors un de ces polygones limites que nous étudierons en détail un peu plus loin.

Passons à la limite, et faisons $t=0$, de telle façon que les $2q$ côtés infinitésimaux de R_0 s'annulent absolument et que R_0 se réduise par conséquent à un autre polygone R'_0 n'ayant que $2n-2q$ côtés conjugués deux à deux. Considérons le groupe G engendré par R_0. A chaque paire de côtés conjugués de R_0 correspond une substitution de G, c'est celle qui change l'un de ces deux côtés en son conjugué, et le groupe G est précisément dérivé des n substitutions qui correspondent ainsi aux divers côtés de R_0. Parmi ces substitutions nous en distinguerons $n-q$ qui correspondront aux $n-q$ paires de côtés de R_0 qui restent finis. Le groupe dérivé de ces $n-q$ substitutions s'appellera G'' et sera contenu dans G. Soit G' le groupe engendré par R'_0 : il sera isomorphe à G'', puisque, à chacun des côtés *finis* de R_0 correspond un côté de R'_0. Lorsque t tend vers zéro, le transformé de R_0, par une substitution quelconque de G'', tend vers le transformé de R'_0 par la substitution correspondante de G'.

Nous appellerons A la portion du cercle fondamental qui est occupée par les transformés de R_0 par les substitutions de G'', et B celle qui est occupée par les transformés de R_0 par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G''.

Le polygone R_0 est par hypothèse de la première famille, ou du premier ordre de la deuxième ou de la sixième famille; à la limite, le polygone R_0 appartiendra à la deuxième ou à la sixième famille; mais il pourra appartenir au premier ou au second ordre de ces familles, c'est-à-dire qu'il pourra ne pas admettre ou admettre des cycles hyperboliques [1].

Dans le premier cas, R_0 sera de la première catégorie; dans le second, de la deuxième catégorie.

Dans le premier cas, les transformés de R_0 par les substitutions de G remplissent tout le cercle fondamental (cf. *Théorie des groupes fuchsiens*, § VI). Par conséquent, lorsque t tendra vers zéro, la superficie totale de B tendra vers zéro, et en même temps la plus petite distance de B à l'origine tendra vers 1, c'est-à-dire vers le rayon du cercle fondamental.

Dans le second cas, ce sera l'inverse et la superficie de B ne tendra pas vers zéro.

Supposons donc que R_0 soit de la première catégorie. Dans ce cas, R'_0 engendrera une équation fuchsienne

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi'(x, y)v, \tag{1'}$$

$$\psi'(x, y) = 0, \tag{2'}$$

qui appartiendra à un type T' moins compliqué que T. Supposons, pour fixer les idées, $q=1$. Dans ce cas, R'_0 aura deux côtés de moins que R_0. Il arrivera alors, ou bien que l'équation (1') aura un point singulier de moins que l'équation (1), ou bien que la relation (2') sera de genre $p-1$ au lieu d'être de

[1] *Voir* la note, p. 279. N. E. N.

genre p et que l'équation (1') admettra deux points singuliers de plus que l'équation (1). (Vide infra, p. 355.)

Supposons par exemple, pour fixer les idées, que ce soit le premier cas qui se présente. Je dis que les modules de la relation (2) vont tendre vers ceux de la relation (2') et que les points singuliers de l'équation (1) vont tendre vers ceux de l'équation (1') de telle façon que, parmi les points singuliers de l'équation (1), il y en ait deux qui tendent vers un seul et même point singulier de l'équation (1').

Je vais montrer d'abord que les fonctions thétafuchsiennes engendrées par R_0 tendent vers celles qui sont engendrées par R'_0.

Considérons les séries

$$\Theta(z, H) = \Sigma H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m},$$

$$\Theta'(z, H) = \Sigma H\left(\frac{\alpha'_i z + \beta_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)(\gamma'_i z + \delta'_i)^{-2m},$$

où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle quelconque et où $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ et $\left(z, \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)$ désignent respectivement une substitution quelconque du groupe G et du groupe G'. Je dis que

$$\lim_{t=0} \Theta(z) = \Theta'(z).$$

On peut trouver un contour C entourant le point z et assez petit pour qu'il soit intérieur à R_0 et à R'_0 et qu'il reste intérieur à R_0 pour toutes les valeurs suffisamment petites de t. On appellera σ la S de ce contour, λ la L du plus grand arc de cercle orthogonal au cercle fondamental qui puisse être tracé à l'intérieur de C; on appellera r une quantité quelconque, Λ la L de la droite Oz et, l'on posera, comme dans le paragraphe I du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. I, p. 206),

$$K = \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2\Lambda} + e^{-2\Lambda} + 2)^m e^{2\lambda + 2mr}.$$

Appelons S_n et S_n la somme des termes des séries Θ et Θ' qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ et $\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}$ situés à l'intérieur du cercle M dont le centre est l'origine et dont le R est $(n-1)r$. Soit

$$\Theta = S_n + R_n, \qquad \Theta' = S'_n + R'_n.$$

Soit h la plus grande valeur que puisse prendre le module de H pour des transformés du point z; nous aurons

$$\operatorname{mod} R_n < \frac{K h e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2(1-m)r}}, \qquad \operatorname{mod} R'_n < \frac{K h e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2(1-m)r}}.$$

Nous pourrons donc prendre n assez grand pour que

$$\operatorname{mod} R_n < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \operatorname{mod} R'_n < \frac{\varepsilon}{3},$$

ε étant une quantité donnée.

Le nombre n est désormais fixe et, par conséquent, le cercle M.

Nous pourrons maintenant prendre τ assez petit pour que, t variant de τ à o, aucun des transformés de z ne sorte du cercle M ou n'entre dans ce cercle et pour que les divers transformés de z par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G'' soient tous extérieurs à ce cercle.

Alors, t variant de τ à o, S_n sera une fonction continue de t, puisque c'est une somme d'un nombre fini de fonctions continues de t; pour $t = 0$, S_n se réduira à S'_n; on pourra donc prendre t assez petit pour que

$$\operatorname{mod}(S'_n - S_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura alors

$$\operatorname{mod}(\Theta - \Theta') < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε. C. Q. F. D.

Les fonctions fuchsiennes x et y qui entrent dans l'équation (2) peuvent être choisies arbitrairement; nous poserons

$$x = \frac{\Theta(z, H)}{\Theta(z, H_1)}, \qquad y = \frac{\Theta(z, H_2)}{\Theta(z, H_1)},$$

H, H_1 et H_2 étant trois fonctions rationnelles arbitrairement choisies. Faisons de même

$$x_1 = \frac{\Theta'(z, H)}{\Theta'(z, H_1)}, \qquad y_1 = \frac{\Theta'(z, H_2)}{\Theta'(z, H_1)};$$

il viendra

$$x_1 = \lim_{t=0} x, \qquad y_1 = \lim_{t=0} y.$$

On voit donc qu'à la limite, la relation qui lie x et y se réduira à celle qui lie x_1 et y_1 et que, par conséquent, les modules de la relation (2) se réduisent à ceux de la relation (2').

De même nous aurons

$$\lim\left[\frac{1}{2}\,\frac{x'''x'}{(x')^4}-\frac{3}{4}\,\frac{(x'')^2}{(x')^4}\right]=\frac{1}{2}\,\frac{x_1'''x_1'}{(x_1')^4}-\frac{3}{4}\,\frac{(x_1'')^2}{(x_1')^4},$$

x', x'', ... désignant les dérivées première, seconde, ... de x par rapport à z.

Il résulte de là que

$$\lim\varphi(x, y)=\varphi'(x_1, y_1),$$

et, par conséquent, les points singuliers de l'équation (1) tendront vers ceux de (1').

C. Q. F. D.

Rien de tout cela ne reste vrai si le polygone R_0 est de la deuxième catégorie.

Dans le cas où le polygone R_0 est symétrique, la chose peut se démontrer d'une manière toute différente.

Supposons, par exemple, un quadrilatère curviligne $\alpha\beta\gamma\delta$, dont les côtés soient des arcs de cercle orthogonaux au cercle fondamental, et dont les angles soient des parties aliquotes de π; je les appelle α, β, γ, δ. Si nous prenons le symétrique de ce quadrilatère par rapport au côté $\beta\gamma$, nous obtiendrons, en adjoignant ces deux quadrilatères l'un à l'autre, un hexagone qui engendrera un système de fonctions fuchsiennes. Mais on peut aussi engendrer ces mêmes fonctions en cherchant à faire la représentation conforme du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ sur un cercle de centre 0 et de rayon 1. Si z est un point intérieur au quadrilatère et x le point correspondant du cercle, x est une fonction fuchsienne de z.

Supposons maintenant que le côté $\gamma\delta$ devienne infiniment petit, puis s'annule, le quadrilatère se réduira à un triangle $\alpha\beta\gamma$, dont le sommet γ sera sur le cercle fondamental et de telle façon que l'angle $\alpha\gamma\beta$ soit nul. Considérons donc le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$; je suppose que le côté $\gamma\delta$ soit déjà très petit, mais ne soit pas encore nul. On peut mener une infinité de cercles $\beta_i\gamma_i$ tangents en γ_i au cercle $\beta\gamma$ et coupant en β_i le cercle $\alpha\beta$ sous un angle égal à β. Menons un de ces cercles $\beta_1\gamma_1$, de telle façon que le triangle $\alpha\beta_1\gamma_1$ soit tout entier intérieur au quadrilatère, mais soit d'ailleurs aussi grand que possible. Menons encore un autre de ces cercles $\beta_2\gamma_2$, de telle façon que le quadrilatère soit tout entier intérieur au triangle $\alpha\beta_2\gamma_2$, mais que ce triangle soit d'ailleurs aussi petit que possible.

Soit z_0 un point intérieur à $\alpha\beta_1\gamma_1$. Supposons qu'on fasse sur le cercle de rayon 1 et de centre o, la représentation conforme de $\alpha\beta_1\gamma_1$, puis de $\alpha\beta\gamma\delta$, puis de $\alpha\beta_2\gamma_2$, de telle façon qu'au point z_0 corresponde le centre o. Soient respectivement x_1, x et x_2 les points du cercle qui correspondent à un point z de $\alpha\beta_1\gamma_1$, ou de $\alpha\beta\gamma\delta$, ou de $\alpha\beta_2\gamma_2$. On aura

$$\operatorname{mod} x_1 > \operatorname{mod} x > \operatorname{mod} x_2.$$

Lorsque le côté $\gamma\delta$ s'annulera tout à fait, les deux triangles $\alpha\beta_1\gamma_1$ et $\alpha\beta_2\gamma_2$ se confondront et il est aisé de montrer qu'on aura

$$\lim \operatorname{mod} x_1 = \lim \operatorname{mod} x_2;$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod} x_1 = \lim \operatorname{mod} x,$$

$$\lim x_1 = \lim x. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette démonstration, dont je n'ai d'ailleurs donné qu'un aperçu, ne s'appliquerait pas au cas où R_0 ne serait pas symétrique.

X. — Types symétriques.

Je vais appliquer d'abord à un cas simple la méthode de continuité.

Soit

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x) v$$

une équation telle que φ soit rationnel en x, que les points singuliers soient tous réels et que l'équation déterminante relative à chacun d'eux ait une racine double. Le type T dont fait partie cette équation sera dit *symétrique*, parce que si ce type contient une équation fuchsienne, le polygone générateur correspondant est symétrique.

Je dis que tout type symétrique contient une équation fuchsienne.

Si le nombre des points singuliers est égal à 3, on peut toujours, par un changement linéaire de variable, supposer que ces points sont précisément o, 1 et ∞; alors on sait qu'il existe une équation fuchsienne dans le type T, car cette équation est précisément celle qui définit le carré du module d'une transcendante elliptique en fonction du rapport des périodes.

Supposons maintenant que le type T admette quatre points singuliers; on peut toujours, par un changement linéaire de variable, supposer que ces quatre points sont

$$0, \quad 1, \quad a \quad \text{et} \quad \infty,$$

a étant une quantité réelle positive plus grande que 1.

Soient maintenant α, β, γ, δ quatre points situés sur le cercle fondamental, et je suppose qu'en parcourant ce cercle, on les rencontre précisément dans l'ordre α, β, γ, δ. Décrivons quatre cercles, orthogonaux au cercle fondamental, et passant respectivement par les points α et β, β et γ, γ et δ, δ et α. Nous aurons ainsi un certain quadrilatère. Construisons le quadrilatère symétrique du premier par rapport au cercle $\delta\alpha$ par exemple; l'ensemble de ces deux quadrilatères formera un polygone R_0 qui engendrera un groupe fuchsien symétrique de genre 0 et de la deuxième famille que j'appelle G.

Formons les fonctions fuchsiennes correspondantes et en particulier la fonction

$$x = f(z),$$

à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Pour achever de définir cette dernière fonction nous écrirons

$$f(\alpha) = 0, \qquad f(\beta) = 1, \qquad f(\delta) = \infty$$

et nous poserons

$$f(\gamma) = c;$$

c sera réel positif et plus grand que 1. Alors z sera défini en fonction de x comme le rapport de deux intégrales de l'équation fuchsienne

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x) v,$$

où φ est rationnel en x, où les points singuliers seront 0, 1, c et ∞, et de telle sorte que chaque équation déterminante ait une racine double.

Pour faire voir que T contient une équation fuchsienne, il suffit donc de montrer qu'on peut choisir α, β, γ, δ de telle sorte que

$$c = a.$$

Supposons que les points α, β, δ restent fixes et qu'on fasse décrire au point γ l'arc $\beta\delta$ du cercle fondamental, depuis le point β jusqu'au point δ.

Voici ce qui se passera :

1° Les séries thétafuchsiennes définies au paragraphe I du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* seront des fonctions continues de γ, car elles sont uniformément convergentes, comme je l'ai fait voir dans ce paragraphe.

2° Il en sera donc de même des fonctions fuchsiennes elles-mêmes et par conséquent de c.

3° En vertu du lemme fondamental, c ne pourra prendre deux fois la même valeur.

4° Lorsque le point γ se rapprochera indéfiniment du point β, le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ se réduira au triangle $\alpha\beta\delta$, et le polygone R_0 se réduira au quadrilatère R_0 formé de ce triangle et du triangle symétrique par rapport au cercle $\alpha\delta$. Le second lemme nous apprend donc que c tendra vers l'unité.

5° Pour la même raison, quand γ tendra vers δ, c tendra vers l'infini.

En résumé, quand γ variera en suivant le cercle fondamental depuis β jusqu'à δ, c croîtra d'une façon continue depuis 1 jusqu'à l'infini; c prendra donc la valeur a qui est comprise entre 1 et l'infini. C. Q. F. D.

Supposons maintenant un type T admettant non plus quatre, mais cinq points singuliers. On pourra toujours supposer par un changement linéaire de variables que ces cinq points singuliers sont

$$0, \quad 1, \quad a, \quad b, \quad \infty$$

avec les inégalités

$$1 < a < b, \tag{1}$$

a et b étant des quantités réelles.

Si nous regardons a et b comme les coordonnées d'un point dans le plan, nous verrons qu'à chaque type T correspond un point d'une région plane limitée par les deux droites $a = 1$, $a = b$ et par la droite $b = \infty$. Cette région n'est autre chose que la multiplicité S' définie dans le paragraphe VIII. On voit qu'avec notre manière de considérer les choses, cette multiplicité est *ouverte*.

Prenons maintenant sur le cercle fondamental cinq points α, β, γ, δ, ε se succédant sur ce cercle, précisément dans cet ordre. Il en résulte que l'on a

$$\arg\alpha > \arg\beta > \arg\gamma > \arg\delta > \arg\varepsilon.$$

Construisons le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, puis le pentagone symétrique par rapport au côté $\alpha\varepsilon$ et nous aurons un polygone R_0 qui engendrera un groupe fuchsien G. Parmi les fonctions fuchsiennes correspondant à ce groupe, appelons $x = f(z)$ celle à l'aide de laquelle les autres s'expriment rationnellement et qui, de plus, est telle que

$$f(\alpha) = 0, \qquad f(\beta) = 1, \qquad f(\varepsilon) = \infty.$$

Les quantités

$$f(\gamma) = a, \qquad f(\delta) = b$$

sont réelles positives et telles que

$$1 < a < b.$$

Lorsque $\gamma - \beta$ tendra vers zéro, a tendra vers 1; lorsque $\gamma - \delta$ tendra vers zéro, $a - b$ tendra vers zéro; enfin, lorsque $\delta - \varepsilon$ tendra vers zéro, b croîtra indéfiniment. De plus, lorsque α, β et ε restant fixes, on fera varier γ et δ, a et b seront des fonctions continues de γ et de δ.

Si l'on considère les arguments de γ et de δ comme les coordonnées d'un point dans un plan, ces arguments étant soumis aux inégalités

$$\arg\beta < \arg\gamma < \arg\delta < \arg\varepsilon,$$

le point correspondant sera situé à l'intérieur d'un triangle limité par les trois droites

$$\arg\beta = \arg\gamma, \qquad \arg\gamma = \arg\delta, \qquad \arg\delta = \arg\varepsilon.$$

Ce triangle ne sera autre chose que la multiplicité S qui sera ouverte comme la multiplicité S'.

Cela posé, à chaque point de S correspond un point et un seul de S'; à chaque point de S' ne peut correspondre plus d'un point de S. A chaque point de la périphérie de S correspond un point de la périphérie de S'. Il résulte de là nécessairement qu'à tout point de S' correspond un point de S.

En d'autres termes, on peut toujours choisir le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ de telle façon que a et b aient des valeurs données, c'est-à-dire que tout type fuchsien symétrique n'admettant que cinq points singuliers contient une équation fuchsienne.

La démonstration est absolument la même pour un plus grand nombre de points singuliers; d'où cette conclusion :

Tout type fuchsien symétrique contient une équation fuchsienne.

On voit que, dans le cas particulier des types symétriques, l'application de la méthode de continuité ne présente aucune difficulté.

On peut tirer de ce qui précède une conclusion importante.

Considérons une fonction y de x, qui ne peut cesser d'être holomorphe en x que si x prend une des n valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$; supposons, de plus, que ces n valeurs sont réelles.

Considérons le type fuchsien symétrique qui admet les n points singuliers a_1, a_2, ..., a_n. Il contient une équation fuchsienne et, dans cette équation, la variable est une fonction fuchsienne du rapport z des intégrales

$$x = f(z).$$

Cette fonction n'existe pas à l'extérieur du cercle fondamental; si nous supposons $a_n = \infty$, elle est holomorphe à l'intérieur de ce cercle et elle ne peut prendre aucune des valeurs a_1, a_2, ..., a_n.

Il résulte de là, qu'à l'intérieur du cercle fondamental, y est holomorphe en z.

Donc, *si y est une fonction de x admettant seulement un nombre fini de points singuliers qui soient tous réels, on peut trouver une variable z telle que y et x, exprimées en fonctions de z, n'existent pas à l'extérieur du cercle fondamental et soient holomorphes à l'intérieur de ce cercle.*

On peut supposer en particulier que y est une fonction algébrique, ou l'intégrale d'une équation linéaire à coefficients algébriques, telle que tous les points singuliers soient réels.

XI. — Généralisation du théorème précédent.

Nous n'avons encore appliqué la méthode de continuité qu'aux types symétriques; mais, avant d'aborder l'étude de types plus compliqués, nous allons tirer du résultat obtenu tout le parti possible. Soit

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x) v$$

une équation telle que $\varphi(x)$ soit rationnel en x, que les points singuliers soient a_1, a_2, ..., a_n, mais ne soient pas tous réels, et que chaque équation déterminante ait une racine double.

Appelons T le type dont fait partie cette équation.

Je démontrerai plus loin que ce type contient une équation fuchsienne, mais ce n'est pas cela que j'ai en vue pour le moment; je veux faire voir qu'il y a un type subordonné à T qui contient une équation fuchsienne; en d'autres termes, qu'il existe une fonction fuchsienne qui ne peut prendre à l'intérieur du cercle fondamental aucune des valeurs a_1, a_2, ..., a_n et qui, de plus, ne peut prendre non plus certaines autres valeurs b_1, b_2, ..., b_k.

Nous nous regardons donc comme libres d'adjoindre, au tableau des quantités a, telles quantités qu'il nous conviendra d'y ajouter. Nous pouvons toujours supposer que si le tableau des nombres a contient une quantité imaginaire, il contient aussi sa conjuguée; car si cette conjuguée n'y était pas contenue, on l'y adjoindrait.

Je suppose que le théorème soit vrai quand le tableau des quantités a ne contient que $q-1$ couples de valeurs imaginaires et je vais faire voir qu'il est vrai quand ce tableau contient q semblables couples. Cela suffira, car, dans le paragraphe précédent, j'ai démontré le théorème pour le cas où toutes les quantités a sont réelles.

Supposons donc que le tableau des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ contient $n-2q$ quantités réelles

$$(1) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-2q}$$

et $2q$ quantités imaginaires conjuguées deux à deux

$$(2) \qquad a'_1, \quad a'_2, \quad \ldots, \quad a'_{2q}.$$

Posons

$$(3) \qquad \varphi(x) = (x-a_1)(x-a'_2)\ldots(x-a'_{2q});$$

$\varphi(x)$ sera un polynome entier à coefficients réels. L'équation

$$\varphi'(x) = 0$$

aura au moins une racine réelle, et par conséquent au plus $q-1$ couples de racines imaginaires. Soient

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{2q-1}$$

les racines de cette équation. Posons

$$n-2q = p, \qquad 2q-1 = m.$$

Parmi les quantités suivantes :

$$(4) \qquad 0, \quad \varphi(a_1), \quad \varphi(a_2), \quad \ldots, \quad \varphi(a_p); \qquad \varphi(c_1), \quad \varphi(c_2), \quad \ldots, \quad \varphi(c_m),$$

il y aura au plus $q-1$ couples de valeurs imaginaires.

On peut donc construire une fonction fuchsienne $F(z)$ qui ne peut prendre aucune de ces valeurs, puisque le théorème est supposé vrai pour un système de valeurs ne contenant que $q-1$ couples de quantités imaginaires conjuguées.

Posons

$$\varphi(x) = F(z).$$

On voit d'abord que x est fonction uniforme de z; en effet, cela ne pourrait cesser d'avoir lieu que si l'on avait

$$\varphi'(x) = 0;$$

d'où

$$x = c_i, \qquad \mathrm{F}(z) = \varphi(c_i),$$

ce qui est impossible.

De plus, x ne peut prendre aucune des valeurs

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p,$$

sans quoi l'on aurait

$$\mathrm{F}(z) = \varphi(a_i),$$

ce qui est impossible, ni aucune des valeurs

$$a'_1, \quad a'_2, \quad \ldots, \quad a'_{2q}$$

sans quoi l'on aurait

$$\mathrm{F}(z) = 0,$$

ce qui est impossible.

La dérivée de x par rapport à z ne peut jamais s'annuler, sans quoi celle de F par rapport à z s'annulerait également, ce qui n'a jamais lieu.

D'ailleurs, x est une fonction fuchsienne de z. En effet, soit

$$\mathrm{F}(z) = \varphi(x) = y, \qquad v = \sqrt{\frac{d\mathrm{F}}{dz}};$$

on aura, puisque F est une fonction fuchsienne,

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = \psi(y)v,$$

$\psi(y)$ étant une fonction rationnelle en y.

Si nous posons ensuite

$$w = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

d'où

$$v = w\sqrt{\varphi'(x)},$$

il viendra

$$(5) \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = \left\{ [\varphi'(x)]^2 \psi[\varphi(x)] + \frac{3}{4}\left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} \right\} w,$$

où le coefficient de w est une fonction rationnelle en x.

Ainsi, x est une fonction uniforme de z, c'est-à-dire du rapport des deux intégrales de l'équation (5). C'est donc une fonction fuchsienne.

Ainsi x est une fonction fuchsienne qui ne peut prendre aucune des valeurs (1) et (2), mais qui, de plus, ne peut prendre non plus aucune des valeurs telles que $\varphi(x) = \varphi(a_i)$ ou $\varphi(x) = \varphi(e_i)$.

Appelons

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_k$$

ces valeurs.

L'équation (5), qui est une équation fuchsienne, admet comme points singuliers

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p, \quad a'_1, \quad a'_2, \quad \ldots, \quad a'_{2q}, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_k$$

et de telle sorte que toutes les équations déterminantes aient une racine double. Elle appartient donc à un type subordonné à T.

Ainsi, il est toujours possible de trouver une fonction fuchsienne $x = f(z)$ qui ne peut prendre n valeurs *données*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

et qui ne peut prendre non plus k autres valeurs non données

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_k.$$

A cette fonction fuchsienne correspond une équation fuchsienne dont les points singuliers sont les a et les b et dont toutes les équations déterminantes ont une racine double. Cette équation fait partie d'un type subordonné à T.

Soit maintenant y une fonction de x qui n'admet d'autre point singulier que les a. Si l'on pose $x = f(z)$, y sera fonction uniforme de z.

C'est ce qui arrivera en particulier lorsque y sera l'intégrale d'une équation linéaire à coefficients algébriques.

Ainsi, *on peut toujours trouver une variable z, dont la variable x et les intégrales d'une pareille équation sont des fonctions uniformes.*

XII. — Polygones limites.

Je dirai que deux polygones générateurs R_0 et R'_0 de deux groupes fuchsiens G et G' appartiennent à une même classe lorsqu'ils satisferont aux conditions suivantes :

1° Le nombre des côtés des deux polygones est le même.

2° Si deux côtés de R_0 sont conjugués, les deux côtés de même rang de R'_0

sont également conjugués. Il en résulte que les sommets des deux polygones se répartissent en un même nombre de cycles de telle façon qu'à chaque cycle de R_0 corresponde un cycle de R'_0, et réciproquement.

3° La somme des angles de deux cycles correspondants est la même.

Les polygones d'une même classe dépendent d'un certain nombre de paramètres. Supposons par exemple, pour fixer les idées, qu'ils soient complètement définis (¹) lorsqu'on se donne trois paramètres x, y, z, mais que ces trois paramètres ne soient pas indépendants et soient liés entre eux par une relation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Si nous regardons x, y et z comme les coordonnées d'un point dans l'espace, à chaque polygone de la classe correspond un point d'une surface S_4 définie par l'égalité (1), de sorte qu'à la classe tout entière correspond cette surface ou une portion de cette surface.

Mais, en général, pour que le polygone R_0 puisse être le polygone générateur d'un groupe fuchsien, x, y et z doivent satisfaire non seulement à l'égalité (1), mais encore à certaines inégalités (2). Aussi à la classe considérée correspond seulement une partie de la surface S_4 et cette partie est limitée par certaines courbes frontières dont on obtient l'équation en remplaçant dans une des inégalités (2) le signe de l'inégalité par celui de l'égalité.

Prenons un exemple. Soit un polygone R_0 de la seconde famille et du genre zéro; ce sera, par exemple, un hexagone $abcdef$. Les côtés ab et cb, cd et ed, ef et af sont conjugués de telle sorte qu'il y a quatre cycles b, d, f et ace. Les six sommets devront satisfaire à la relation suivante :

$$-(a-b)(c-d)(e-f) = (b-c)(d-e)(f-a).$$

Soit $\varphi(\alpha)$ le rapport anharmonique de α par rapport aux trois points b, d et f de telle sorte que

$$\varphi(b) = \infty, \qquad \varphi(d) = 0, \qquad \varphi(f) = 1.$$

Posons

$$\varphi(a) = y, \qquad \varphi(c) = x, \qquad \varphi(e) = z.$$

Le polygone R_0 sera entièrement défini quand on connaîtra x, y et z; mais

(¹) Il reste bien entendu que deux polygones ne sont pas distincts lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une substitution linéaire qui n'altère pas le cercle fondamental.

entre ces trois paramètres nous avons la relation suivante :

$$(1') \qquad x(1-z) = z(1-y).$$

C'est l'équation d'un paraboloïde.

Mais x, y et z doivent satisfaire en outre aux inégalités

$$(2') \qquad x < 0 < z < 1 < y,$$

de sorte qu'on ne doit conserver qu'une portion du paraboloïde (1'). Cette portion doit être regardée comme limitée par les six droites suivantes :

$$(3) \qquad x = z = 0,$$

$$(4) \qquad x = 0, \qquad y = 1,$$

$$(5) \qquad y = z = 1,$$

$$(6) \qquad z = 1, \qquad x = \infty,$$

$$(7) \qquad x = y = \infty,$$

$$(8) \qquad y = \infty, \qquad z = 0.$$

Ce seront les courbes frontières de la portion utile du paraboloïde ; à chaque point de cette portion utile correspondra *un* polygone de la classe envisagée et réciproquement.

Supposons maintenant que, dans la classe considérée, il faille p paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pour définir complètement le polygone R_0 et que ces p paramètres satisfassent d'une part à une égalité (1), d'autre part à certaines inégalités (2). Si l'on regarde $x_1, x_2, \ldots, x_p$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à p dimensions, cette égalité et ces inégalités définiront une portion de surface, une multiplicité (*Mannigfaltigkeit*), comme disent les Allemands. J'appellerai M_1 cette multiplicité qui aura $p-1$ dimensions. Elle sera en général *ouverte* et sera limitée par des multiplicités frontières de $p-2$ dimensions, puisque les x satisfont non seulement à une égalité, mais encore à des inégalités. Ces multiplicités frontières sont analogues aux courbes frontières dont il a été parlé plus haut et l'on obtient leurs équations en remplaçant dans l'une des inégalités (2) le signe de l'inégalité par celui de l'égalité.

Considérons un point de la multiplicité M_1 qui soit infiniment voisin de l'une des multiplicités frontières. A ce point correspondra un polygone dont certains éléments seront infinitésimaux et que j'appellerai pour cette raison *polygone limite*.

Nous allons envisager d'abord une classe de polygones R_0, du genre zéro, de la deuxième famille ; le nombre des côtés sera $2n$: chaque côté de rang impair sera le conjugué du côté dont le rang est plus élevé d'une unité (le côté de rang $2p-1$ sera le conjugué du côté de rang $2p$). De cette façon, si je désigne par la notation α_p le sommet qui sépare les côtés de rang p et de rang $p+1$, chaque sommet d'indice impair formera un cycle à lui tout seul, pendant que tous les sommets d'indice pair formeront un seul cycle. Il y aura donc en tout $n+1$ cycles et tous les sommets seront d'ailleurs sur le cercle fondamental. Pour définir un pareil polygone, il suffit de se donner $2n-3$ de ces sommets, les trois autres étant supposés fixes. D'ailleurs, entre ces $2n-3$ paramètres nous avons la relation

$$(1'') \qquad -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_{2n-1}-\alpha_{2n}) = (\alpha_{2n}-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_{2n-2}-\alpha_{2n-1}),$$

outre les inégalités

$$(2'') \qquad \arg\alpha_1 < \arg\alpha_2 < \arg\alpha_3 < \ldots < \arg\alpha_{2n} < \arg\alpha_1 + 2\pi.$$

Je considère, d'autre part, les fonctions fuchsiennes engendrées par R_0 et, parmi elles, une de celles à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. Je l'appelle $f(z)$. Les points singuliers de l'équation fuchsienne correspondante sont alors au nombre de $n+1$; ce sont :

$$f(\alpha_1), \quad f(\alpha_3), \quad \ldots, \quad f(\alpha_{2n-1})$$

et

$$f(\alpha_2) = f(\alpha_4) = \ldots = f(\alpha_{2n}).$$

Je vais chercher quels sont les polygones limites de la classe en question. Pour les trouver, il faut dans l'une des inégalités (2'') remplacer le signe de l'inégalité par celui de l'égalité; d'où

$$\arg\alpha_i = \arg\alpha_{i+1}, \qquad \alpha_i = \alpha_{i+1},$$

c'est-à-dire qu'un des côtés du polygone R_0 doit devenir infiniment petit. Mais, en vertu de l'équation (1''), si un côté de rang pair devient infiniment petit, il faut qu'un côté de rang impair le devienne également, et réciproquement. Il y aura donc toujours au moins deux côtés qui s'annuleront. De là trois espèces de polygones limites :

1° Ceux dont deux côtés conjugués s'annulent;

2° Ceux dont deux côtés non conjugués s'annulent;

3° Ceux dont plus de deux côtés s'annulent à la fois.

Ainsi, dans le cas du paraboloïde (1'), les droites frontières (3), (5) et (7) correspondent à des polygones limites de la première espèce; les droites (4), (6) et (8) à des polygones de la deuxième espèce et les points

$$x = z = 0, \quad y = 1; \quad x = 0, \quad y = z = 1; \quad \ldots,$$

qui appartiennent à la fois à deux de ces droites frontières, correspondent à des polygones de la troisième espèce.

Les polygones limites de la troisième espèce sont évidemment des cas particuliers de ceux des deux premières. Laissons-les pour un instant de côté et cherchons à montrer que ceux de la deuxième espèce se ramènent à ceux de la première.

En effet, si nous envisageons un polygone de la deuxième espèce, l'un de ses côtés infinitésimaux sera de rang pair. Je puis supposer que l'on ait numéroté les côtés de telle façon que ce soit précisément le côté de rang 2, $\alpha_1\alpha_2$. L'autre côté infinitésimal sera, par exemple, $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$. Ces deux côtés seront séparés par $p-1$ paires de côtés conjugués $\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_3\alpha_4$; $\alpha_4\alpha_5$ et $\alpha_5\alpha_6$; etc.; $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$ et $\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}$. Joignons, par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, α_{2p-1} à α_1; nous partagerons ainsi le polygone R_0 en deux autres r_0 et r'_0; r_0 contiendra par exemple le sommet α_{2p} et r'_0 le sommet α_2. Soit r''_0 le transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$ en $\alpha_{2p}\alpha_{2p-1}$, et posons

$$R'_0 = r_0 + r''_0.$$

Le polygone R'_0 sera équivalent à R_0, il admettra deux côtés infinitésimaux, à savoir $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ et le transformé de $\alpha_1\alpha_2$. Ces deux côtés ne seront plus séparés que par $p-2$ paires de côtés conjugués. En opérant sur R'_0 comme on a opéré sur R_0, on obtiendra un polygone R''_0 où les deux côtés infinitésimaux ne seront plus séparés que par $p-3$ paires de côtés conjugués et, en continuant de la sorte, on finira par arriver à un polygone S_0, équivalent à R_0 et dont les deux côtés infinitésimaux seront consécutifs. Tous les polygones R_0, R'_0, R''_0, ..., S_0 auront une partie commune qui sera r_0. Le côté infinitésimal $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ et son conjugué $\alpha_{2p+1}\alpha_{2p+2}$ appartiendront donc à S_0. Le second côté infinitésimal sera par exemple $\beta\alpha_{2p}$. Joignons maintenant $\beta\alpha_{2p+1}$ par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Le polygone S_0 se trouvera divisé en deux parties, le triangle $\alpha_{2p}\beta\alpha_{2p+1} = s'_0$ et $s_0 = S_0 - s'_0$. Soit γ le transformé de β par la substitution qui change $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ en $\alpha_{2p+2}\alpha_{2p+1}$ et soit $\alpha_{2p+2}\gamma\alpha_{2p+1} = s''_0$ le triangle transformé de s'_0 par cette substitution. Le polygone $S'_0 = s_0 + s''_0$ sera équivalent à S_0 et il est aisé de voir qu'il n'a que deux côtés infinitésimaux, à savoir $\beta\alpha_{2p+1}$ et $\gamma\alpha_{2p+1}$ qui sont conjugués.

Il est vrai que le polygone S'_0, quoique équivalent à R_0, n'appartient pas à la même classe, parce que les paires de côtés conjugués sont distribuées d'une autre manière: mais il est aisé, par des transformations convenables, de ramener le polygone S_0 à un polygone équivalent S''_0 admettant comme S_0 les côtés infinitésimaux conjugués $\beta\alpha_{2p+1}$ et $\gamma\alpha_{2p+1}$ et dont chaque côté de rang impair est conjugué du côté pair qui le suit.

Nous sommes ainsi amenés à nous occuper principalement des polygones limites de la première espèce.

Considérons un pareil polygone dont les deux côtés conjugués soient $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_1$. Nous distinguerons deux catégories de polygones de la première espèce :

1° Ceux de la première catégorie seront tels que

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_{2n}-\alpha_1}=1;$$

2° Et ceux de la deuxième catégorie seront tels que

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_{2n}-\alpha_1}\neq 1.$$

Dans le premier cas, on a, entre les sommets du polygone, les relations suivantes :

$$(9)\qquad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_{2n},$$

$$(10)\qquad -(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_{2n-1}-\alpha_1)=(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_{2n-2}-\alpha_{2n-1}).$$

Le polygone R_0 se réduit donc (lorsque passant à la limite on annule ses côtés infinitésimaux) à un polygone R'_0 tout à fait analogue, mais dont le nombre des côtés n'est plus que $2n-2$ au lieu de $2n$.

Disons quelques mots des groupes G et G' engendrés par ces deux polygones R_0 et R'_0. Appelons S_i la substitution parabolique qui change $\alpha_{i-1}\alpha_i$ en $\alpha_{i+1}\alpha_i$ (i étant essentiellement impair). Le groupe G sera dérivé des n substitutions

$$S_1,\quad S_3,\quad \ldots,\quad S_{2n-1}.$$

La résultante

$$S_1S_3S_5\ldots S_{2n-1}$$

sera parabolique et admettra le point double α_{2n}.

Lorsque R_0 se réduit à R'_0, les substitutions S_3, ..., S_{2n-1} deviennent S'_3, ..., S'_{2n-1} et restent paraboliques, mais la substitution S_1 devient illusoire et n'a plus aucun sens. Le groupe G' est donc dérivé des $n-1$ substitutions

$$S'_3, \quad \ldots, \quad S'_{2n-1}.$$

En vertu de la relation (1^a), la résultante

$$S'_3 \ldots S'_{2n-1}$$

est parabolique.

Donc les sommets d'ordre pair de R'_0 forment un cycle parabolique (troisième sous-catégorie), et par conséquent R_0 et ses transformés par les diverses substitutions de G' rempliront tout le cercle fondamental (cf. *Théorie des groupes fuchsiens*, paragraphe VI).

Alors, en appliquant le second lemme, on verrait que la différence

$$f(\alpha_1) - f(\alpha_2)$$

tend vers zéro et que le type T, dont fait partie l'équation fuchsienne engendrée par R_0, se réduit à un type T' plus simple n'admettant plus que n points singuliers.

Supposons maintenant que deux côtés $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_1$ tendent vers zéro de telle façon que

$$\lim \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1} > 1.$$

La relation (1^a) cessera d'avoir lieu. La résultante

$$S'_3 S'_5 \ldots S'_{2n-1}$$

sera hyperbolique et non parabolique; les sommets d'ordre pair de R'_0 formeront un cycle hyperbolique (quatrième sous-catégorie) et par conséquent les transformés de R'_0 par les substitutions de G' ne rempliront pas tout le cercle fondamental, mais seulement une portion de cercle limitée par une infinité de circonférences (cf. *Théorie des groupes fuchsiens*, paragraphe VI).

Le second lemme n'est donc pas applicable, ce qui montre quelle différence profonde sépare les polygones limites de la première et de la deuxième catégorie.

On pourrait faire une théorie tout à fait analogue des polygones limites de la troisième espèce, qui ne sont que des cas particuliers de ceux de la première et de la deuxième.

Comme deuxième exemple, nous considérerons un polygone R_0 du genre zéro dont les côtés seront disposés comme dans l'exemple précédent, mais qui appartiendra à la première famille, et dont par conséquent tous les sommets seront à l'intérieur du cercle fondamental et tous les cycles seront elliptiques (première catégorie).

Nous appellerons

$$a_1, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_{2n-1}$$

les angles de ce polygone qui ont leurs sommets en

$$\alpha_1, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{2n-1}$$

et b la somme des autres angles du polygone. Ces divers angles doivent être des parties aliquotes de 2π; je les regarderai comme donnés; la classe à laquelle appartient R_0 est alors parfaitement définie. Dans ce qui va suivre, nous envisagerons la L des côtés de ce polygone et non leur longueur géométrique. Dans l'exemple précédent, quand nous disions qu'un côté était infiniment petit, cela s'entendait de sa longueur; ici, au contraire, cela s'entendra de sa L [qui n'est autre chose que la longueur au point de vue de la géométrie non euclidienne (cf. *Théorie des groupes fuchsiens*, paragraphe I; *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, paragraphe I)].

Cela posé, comment peut-on concevoir que le polygone R_0 devienne un polygone limite? Cela pourrait se concevoir de trois manières :

1° Si un côté devenait infiniment petit;

2° Si un angle s'annulait;

3° Si un côté devenait infiniment grand.

Il est aisé de voir que les deux premiers cas ne se présenteront jamais, sans que le troisième se présente également; examinons donc le troisième.

Supposons qu'un côté de R_0, $\alpha_{2n}\alpha_1$, par exemple, devienne infini; il en sera de même du conjugué $\alpha_1\alpha_2$. Mais l'angle de ces deux côtés, qui est a_1, est donné et fini. Donc la diagonale $\alpha_{2n}\alpha_2$ est infinie. Mais cette diagonale est plus petite que la somme des $2n-2$ autres côtés. Donc l'un de ces côtés est infini. Ce sera par exemple $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$, et il en sera de même par conséquent de son conjugué $\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}$. Joignons, par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, les deux sommets α_1, α_{2p-2}. Nous aurons ainsi divisé R_0 en deux polygones partiels : r_0, qui comprendra le sommet α_2, et r'_0, qui comprendra le sommet α_{2n}. Soit maintenant r''_0 le transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_1\alpha_2$ en $\alpha_1\alpha_{2n}$. Le polygone $R'_0 = r_0 + r''_0$, qui est équivalent à R_0, a comme lui quatre côtés infinis, mais ces quatre côtés sont consécutifs. Il résulte de là que nous pouvons toujours supposer que les quatre côtés infinis de R_0 sont $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$. C'est ce que nous ferons.

On peut supposer aussi que R_0 a plus de quatre côtés infinis; mais ce n'est qu'un cas particulier que nous laisserons de côté pour le moment; nous supposerons donc que les $2n-4$ autres côtés sont finis. Dans ce cas, on peut démontrer sans trop de difficultés que la diagonale $\alpha_1\alpha_3$ est finie. Appelons r_0 le triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et r'_0 le reste de R_0. Appelons r''_0 le triangle $\alpha_3\beta\alpha_4$ transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_3\alpha_2$ en $\alpha_3\alpha_4$. Le polygone $R'_0 = r'_0 + r''_0$ sera équivalent à R_0 et il n'aura plus que deux côtés infinis $\alpha_1\alpha_{2n}$ et $\beta\alpha_4$ qui seront conjugués, pendant que les deux côtés conjugués $\alpha_1\alpha_3$ et $\alpha_3\beta$ seront finis. Ces deux derniers côtés ont leur L finie, mais leur longueur géométrique est infiniment petite. Supposons que nous passions à la limite et que ces deux côtés s'annulent. Le polygone R'_0 se réduira alors à un polygone R''_0 qui n'aura plus que $2n-2$ côtés par suite de la confusion des trois sommets α_1, α_3 et β. Parmi ces côtés, il y en a $2n-4$ qui ne diffèrent pas de ceux de R_0; les deux autres sont les côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_4$ qui sont conjugués; le sommet α_1, qui est situé sur le cercle fondamental, forme à lui tout seul un cycle qui peut être parabolique ou hyperbolique.

S'il est parabolique, ce qui arrive lorsque le cercle qui passe par $\alpha_1\alpha_{2n}$ et α_4 est tangent au cercle fondamental, le polygone limite est de la première catégorie.

S'il est, au contraire, hyperbolique, le polygone limite est de la deuxième catégorie.

Les propriétés des deux catégories sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Ainsi, si G est le groupe engendré par R_0, ce groupe sera dérivé de n substitutions elliptiques

$$S_1, \quad S_3, \quad \ldots, \quad S_{2n-1},$$

de telle façon que S_i ait pour point double α_i. Le groupe dérivé de

$$S_5, \quad S_7, \quad \ldots, \quad S_{2n-1} \quad \text{et de} \quad S_1 S_3$$

s'appellera G″. Lorsque R_0 se réduira à R''_0, les substitutions $S_5, S_7, \ldots, S_{2n-1}$ tendront vers des substitutions elliptiques $S'_5, S'_7, \ldots, S'_{2n-1}$ et S_1S_3 tendra vers une certaine substitution Σ. S_1 et S_3 deviendront illusoires. Le groupe G′

engendré par R''_0 sera dérivé de

$$S'_3, \quad S'_7, \quad \ldots, \quad S'_{2n-1} \quad \text{et} \quad \Sigma$$

et sera isomorphe à G''.

Si le polygone est de la première catégorie, Σ sera parabolique; les transformés de R''_0 par le groupe G' rempliront tout le cercle fondamental. Lorsque R_0 tendra vers R''_0, le transformé de R'_0 par une substitution de G'' tendra vers le transformé de R''_0 par la substitution correspondante de G', et la surface recouverte par les transformés de R'_0 par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G'' tendra vers zéro. En appliquant le deuxième lemme et en conservant les mêmes notations que plus haut, on verrait que la différence $f(\alpha_1) - f(\alpha_3)$ tend en même temps vers zéro.

Si au contraire le polygone est de la deuxième catégorie, Σ est hyperbolique et les transformés de R''_0 ne remplissent pas tout le cercle fondamental. Les déductions précédentes ne sont donc plus possibles et l'on ne peut affirmer que $f(\alpha_1) - f(\alpha_3)$ tende vers zéro.

On traiterait de même le cas où il y a plus de quatre côtés infinis.

Comme troisième exemple, nous choisirons un polygone R_0 de genre p, de la première famille, de $4p$ côtés, dont les côtés opposés sont conjugués et dont tous les sommets forment un seul cycle, pendant que la somme des angles est égale à 2π.

Ici encore on pourrait concevoir trois cas où le polygone deviendrait polygone limite :

1° Si l'un des côtés s'annulait (cela s'entend toujours de la L de ce côté);

2° Si un angle s'annulait;

3° Si un côté devenait infini.

Comme dans l'exemple précédent, les deux premiers cas ne se présenteront jamais sans que le troisième se présente en même temps et c'est ce troisième cas qu'il nous reste à examiner.

J'appelle, comme plus haut, α_i le sommet de rang i et je suppose que le côté $\alpha_{4p}\alpha_1$ et son conjugué $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ deviennent infinis. Soient β_1 le milieu de $\alpha_{4p}\alpha_1$ (j'entends par là que la L de $\alpha_{4p}\beta_1$ est égale à celle de $\beta_1\alpha_1$) et β_2 le milieu de $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$. Joignons $\beta_1\beta_2$ par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Ce sera une sécante de notre polygone R_0 et *cette sécante sera finie*. Cette sécante partagera le polygone R_0 en deux autres : r_0 qui contiendra le sommet α_1, et r'_0 qui contiendra le sommet α_{4p}. Soit maintenant S_p la substitution qui change $\alpha_p\alpha_{p+1}$ en son conjugué $\alpha_{3p}\alpha_{3p+1}$. Cette substitution changera

$$r_0 = \beta_1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}\beta_2$$

en

$$r''_0 = \beta'_1\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{2p-1}\alpha'_{2p}\beta_2,$$

où

$$\alpha'_p = \alpha_{3p+1}, \qquad \alpha_{p+1} = \alpha_{3p}.$$

Le polygone $R_0 = r_0 + r''_0$ sera équivalent à R_0; il aura $4p+2$ sommets qui se succéderont dans l'ordre suivant :

$$\beta'_1\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_p\alpha_{3p+2}\alpha_{3p+3}\ldots\alpha_{4p}\beta_1\beta_2\alpha_{2p+1}\alpha_{2p+2}\ldots\alpha_{3p}\alpha'_{p+2}\alpha'_{p+3}\ldots\alpha'_{2p}\beta'_2.$$

Ces $4p+2$ sommets forment deux cycles qui sont d'ailleurs tels que la somme des angles de chacun d'eux est égale à 2π. Quatre côtés sont infinis, à savoir : $\beta'_1\alpha'_1$, $\alpha_{4p}\beta_1$, $\beta_2\alpha_{2p+1}$, $\alpha'_{2p}\beta'_2$. La L des côtés $\beta_1\beta_2$ et $\beta'_1\beta'_2$ est finie et leur longueur géométrique est infiniment petite.

Si nous passons à la limite, cette longueur s'annulera absolument et les sommets β_1 et β_2, β'_1 et β'_2 se confondront. Le polygone R_0 se réduira alors à un autre polygone R''_0 qui n'aura plus que $4p$ sommets, deux sur le cercle fondamental β_1 et β'_1 et $4p-2$ en dehors de ce cercle. Chacun des sommets β_1 et β'_1 forme à lui tout seul un cycle qui peut être parabolique ou hyperbolique.

Étudions maintenant le groupe G engendré par le polygone R_0 ou, ce qui revient au même, par R'_0. Si nous appelons S_i la substitution qui change le côté $\alpha_i\alpha_{i+1}$ de R_0 en son conjugué $\alpha_{2p+i}\alpha_{2p+i+1}$, le groupe G sera dérivé des $2p$ substitutions

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_{2p},$$

entre lesquelles nous avons la relation

$$S_1S_2\ldots S_{2p} = S_{2p}S_{2p-1}\ldots S_2S_1.$$

Quelles sont les substitutions de G qui changent chaque côté de R'_0 en son conjugué ? Ce seront

S_p	qui change	$\beta_1\beta_2$	en	$\beta'_1\beta'_2$,
S_{2p}	»	$\alpha_{2p+1}\beta_2$	en	$\alpha_{4p}\beta_1$,
$S_p^{-1}S_{2p}S_p$	»	$\beta'_2\alpha'_{2p}$	en	$\beta'_1\alpha'_1$

et

$S_p^{-1}S_i$	»	$\alpha'_i\alpha'_{i+1}$	en	$\alpha_{2p+i}\alpha_{2p+i+1}$.

Lorsque le polygone R'_0 se réduit à R''_0, la substitution S_p devient illusoire et les substitutions S_{2p}, $S_p^{-1}S_{2p}S_p$ et $S_p^{-1}S_i$ se réduisent à certaines substitutions Σ, Σ' et S'_i. De ces substitutions dérive un groupe G' qui est précisément engendré par R''_0 et de telle façon que Σ et Σ' sont les deux substitutions qui changent la première $\alpha_{2p+1}\beta_1$ en $\alpha_{4p}\beta_1$, la seconde $\alpha'_{2p}\beta'_1$ en $\alpha'_1\beta'_1$.

Si les multiplicateurs de Σ et de Σ' sont égaux à 1, ces deux substitutions sont paraboliques; le polygone R''_0 sera dit alors de la première catégorie et ses transformés recouvriront tout le cercle fondamental. On en conclut, comme dans les deux exemples qui précèdent, que le deuxième lemme est applicable et que, par conséquent, les fonctions fuchsiennes engendrées par R_0 tendent vers les fonctions fuchsiennes engendrées par R''_0, quand R'_0 tend vers R''_0.

Entrons dans plus de détails. Soient x et y deux fonctions fuchsiennes engendrées par R'_0; il y aura entre ces deux fonctions une relation algébrique

$$\varphi(x, y) = 0,$$

qui sera de genre p, puisque R_0 est de genre p. Si cette relation est regardée comme l'équation d'une courbe de degré m, cette courbe aura

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

points doubles. Lorsque R_0 se réduira à R''_0, le genre de cette courbe devra diminuer d'une unité, puisque le polygone R''_0 est de genre $p-1$, c'est-à-dire que *la courbe devra acquérir un nouveau point double*. A ce point double correspondront en réalité deux points analytiques différents (selon que le point double sera regardé comme appartenant à l'une ou à l'autre des branches de courbe qui y passent) et par conséquent *deux points réellement distincts du polygone* R''_0. Ces deux points seront β_1 et β'_1 qui sont, comme on le sait, sur la circonférence du cercle fondamental. Il résulte de là que les deux fonctions fuchsiennes $\lim x$ et $\lim y$ ne peuvent prendre à l'intérieur du cercle fondamental les deux valeurs qui correspondent au nouveau point double.

Il ne peut pas arriver que l'un des multiplicateurs de Σ et de Σ' soit égal à 1 et l'autre différent de 1, de telle façon que l'une de ces substitutions soit parabolique et l'autre hyperbolique. En effet, on a

$$\operatorname{mult} S_{2p} = \operatorname{mult} S_p^{-1} S_{2p} S_p,$$

d'où

$$\lim \operatorname{mult} S_{2p} = \lim \operatorname{mult} S_p^{-1} S_{2p} S_p$$

et

$$\text{mult}\,\Sigma = \text{mult}\,\Sigma'.$$

Il peut arriver, au contraire, que les deux multiplicateurs soient différents de 1 et les deux substitutions hyperboliques. Dans ce cas, R''_0 est dit de la deuxième catégorie. Le deuxième lemme n'est plus applicable et les fonctions fuchsiennes engendrées par R'_0 ne tendent pas vers celles qui sont engendrées par R''_0.

On traiterait de même le cas où plus de deux côtés de R_0 deviendraient infinis.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour montrer comment doit être traitée, dans chaque cas, la question des polygones limites.

Dans le cas du second exemple, nous dirons que le polygone limite R_0 est :

1° De la première espèce, s'il n'a que quatre côtés infinis et qu'ils soient consécutifs;

2° De la deuxième espèce, s'il n'a que quatre côtés infinis et qu'ils ne soient pas consécutifs (nous avons vu qu'un polygone de la deuxième espèce peut toujours être ramené à un polygone de la première);

3° De la troisième espèce, s'il a plus de quatre côtés infinis; on démontrerait aisément qu'on peut toujours ramener au cas où tous les côtés infinis sont consécutifs.

Dans le cas du troisième exemple, nous dirons que le polygone limite R_0 est :

1° De la première espèce, s'il n'a que deux côtés infinis;

2° De la troisième espèce, s'il a plus de deux côtés infinis.

XIII. — Polygones réduits.

Nous avons vu qu'aux différents polygones d'une même classe correspondaient un par un les différents points d'une multiplicité M_1. Mais à un même groupe fuchsien correspondent une infinité de polygones générateurs et par conséquent une infinité de points de M_1. En effet, le procédé du paragraphe IX de la *Théorie des groupes fuchsiens* permet de transformer le polygone R_0 en un autre R'_0 équivalent à R_0 et engendrant le même groupe fuchsien. De là une infinité de transformations qui changent un polygone en un autre équivalent, et par conséquent un point de M_1 en un autre point de cette multiplicité. Ces substitutions forment un groupe que j'appelle Γ et qui est évidemment discontinu. La multiplicité M_1 va se trouver partagée en une infinité de domaines D_0, D_1, ..., D_i, ..., de telle façon qu'à chaque substitution de Γ corresponde un de ces domaines et que ce domaine soit précisément le transformé de D_0 par cette subdivision. Cette substitution de M_1 à l'aide du groupe Γ est tout à fait analogue à la subdivision du cercle fondamental en une infinité de polygones R_0, R_1, ... à l'aide d'un groupe fuchsien quelconque. Nous allons d'ailleurs éclaircir ce qui précède par une comparaison simple.

Supposons que, dans le plan des xy, le point x, y représente la quantité imaginaire $z = x + iy$ et considérons un parallélogramme rectiligne R_0 ayant pour sommets 0, z_1, z_2 et $z_1 + z_2$. On pourra subdiviser le plan en une infinité de parallélogrammes égaux à R_0 et l'on engendrera ainsi le groupe $(z, z + \alpha z_1 + \beta z_2)$ où α et β sont des entiers quelconques; de ce groupe dériveront les fonctions doublement périodiques qui ont pour période z_1 et z_2. Mais ce parallélogramme peut être remplacé par un autre dont les sommets soient

$$0, \quad \alpha z_1 + \beta z_2, \quad \gamma z_1 + \delta z_2, \quad (\alpha + \gamma) z_1 + (\beta + \delta) z_2,$$

où α, β, γ, δ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ce second parallélogramme est équivalent au premier; je l'appellerai R_0. Pour définir R_0, nous nous donnerons le rapport $\frac{z_2}{z_1} = \omega$. Aux différents parallélogrammes possibles correspondront différents points du plan des ω ou plutôt de la partie de ce plan qui est au-dessus de l'axe des quantités réelles, partie que j'appellerai *partie positive du plan*. A R_0 correspondra le point $\frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha}$, de sorte que la partie positive du plan des ω va se trouver partagée en une infinité de domaines qui se transformeront les uns dans les autres quand on appliquera à ω la substitution $\left(\omega, \frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha}\right)$. A toute fonction doublement périodique correspondra un point de chacun de ces domaines et un seul. Mais, parmi tous les parallélogrammes équivalents à R_0, il y en a un qui est plus simple que tous les autres, c'est celui qui est tel que la forme quadratique positive

$$\bmod^2 (\xi z_1 + \eta z_2),$$

où ξ et η sont des indéterminées entières, soit une forme réduite. On peut dire alors que ce parallélogramme est lui-même réduit. On pourra définir ce parallélogramme réduit de la façon suivante :

1° Il devra être tel que la partie imaginaire de ω soit aussi grande que possible ;

2° Et parmi ceux qui correspondent à ce maximum de la partie imaginaire de ω et qui sont en nombre infini, il devra être tel que la valeur absolue de la partie réelle de ω soit aussi petite que possible.

On voit aisément alors que ω doit satisfaire aux inégalités

$$-\frac{1}{2} < \text{partie réelle de } \omega < \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{mod}\omega > 1.$$

Les points ω qui correspondent à des parallélogrammes réduits sont alors compris dans un domaine D_0 défini par ces inégalités et limité par deux droites et un cercle. Ce domaine D_0 et ses transformés par les diverses substitutions du groupe $\left(\omega, \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ remplissent alors toute la partie positive du plan des ω.

Nous pouvons opérer tout à fait de même dans le problème qui nous occupe, car il est tout à fait analogue, si ce n'est que les parallélogrammes sont remplacés par des polygones générateurs d'un groupe fuchsien, les fonctions doublement périodiques par des fonctions fuchsiennes, et la partie positive du plan des ω par la multiplicité M_1.

Parmi les polygones équivalents à R_0, il y en aura un que nous regarderons comme plus simple que tous les autres et que nous appellerons *polygone réduit*. Voici comment nous pourrons définir ce polygone réduit. Soit φ une fonction des coordonnées d'un point de la multiplicité M_1. Je supposerai que cette fonction est constamment comprise entre 0 et 1, et qu'elle n'atteint la valeur zéro que sur les frontières de la multiplicité M_1, c'est-à-dire aux points qui correspondent aux polygones limites. Elle pourra, d'ailleurs, être choisie arbitrairement. Cela posé, aux différents polygones équivalents à R_0, correspondront différents points de M_1 et par conséquent différentes valeurs de φ. Le polygone que nous appellerons *réduit* sera celui qui correspondra à la plus grande valeur de φ.

Cela posé, les points de M_1 qui correspondront aux polygones réduits rempliront un certain domaine que j'appelle D_0. Ce domaine et ses transformés par les diverses substitutions de Γ rempliront toute la multiplicité M_1. Le domaine D_0 sera limité par un certain nombre de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_q$

qui auront $p-1$ dimensions, si je suppose que M_1 en a p. Voyons quelle sera la forme des équations de ces multiplicités frontières. Soient α un point de M_1, αS le transformé de α par une substitution S convenablement choisie dans le groupe Γ; les équations cherchées seront de la forme suivante :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha S), \tag{1}$$

φ désignant la fonction définie plus haut. Si nous considérons un point α appartenant à l'une des multiplicités frontières m_1, m_2, ..., m_q, par exemple à celle qui est définie par l'équation (1), ce point correspondra à un polygone réduit, et il en sera de même du point αS qui correspondra à un polygone réduit équivalent au premier et qui appartiendra aussi à une multiplicité frontière. C'est ainsi que certaines classes de formes quadratiques contiennent deux formes réduites et qu'à un point d'un côté du polygone générateur d'un groupe fuchsien, correspond un point *équivalent* du côté conjugué. Les multiplicités m_1, m_2, ..., m_q se répartissent donc en paires de multiplicités conjuguées à la façon des côtés du polygone R_0. Ces multiplicités m sont limitées par des multiplicités m' de $p-2$ dimensions; celles-ci le sont elles-mêmes par des multiplicités m'' de $p-3$ dimensions et ainsi de suite. Ces multiplicités m', m'', etc. se répartissent en cycles à la façon des sommets du polygone R_0. Ces cycles peuvent d'ailleurs contenir une, deux, ou plusieurs d'entre elles; si un de ces cycles en contient plus de deux, il y aura plus de deux polygones réduits équivalents à un polygone donné.

Ainsi, en général, il n'y a qu'un polygone réduit équivalent à un polygone donné; mais dans certains cas exceptionnels il peut y en avoir deux ou plusieurs. C'est tout à fait ce qui arrive pour les formes quadratiques définies. On peut présenter la chose d'une autre manière. En général, parmi les valeurs de φ qui correspondent à une infinité de polygones équivalents, il y en a une qui est plus grande que toutes les autres; mais il peut arriver exceptionnellement qu'il y en ait deux ou plusieurs qui soient égales entre elles et plus grandes que toutes les autres.

Nous allons maintenant nous occuper d'une question fort importante : quand un polygone limite est-il réduit ? et nous examinerons successivement les trois exemples du paragraphe précédent.

Reprenons d'abord le polygone R_0 du premier exemple, en supposant que les deux côtés conjugués $\alpha_{2n}\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_2$ sont infiniment petits. Nous avons vu qu'en laissant de côté le cas exceptionnel des polygones limites de la troisième espèce, tous les polygones limites pouvaient être ramenés à ce cas. Nous négligerons donc, devant les quantités finies, les quantités de l'ordre de $\alpha_1\alpha_2$ et de $\alpha_1\alpha_{2n}$.

Je joins $\alpha_{2n-1}\alpha_2$. (Il faut entendre par là, ici comme dans tout ce qui va suivre, que je trace un arc de cercle passant par ces deux points et orthogonal au cercle fondamental.) Je divise ainsi le polygone R_0 en deux autres : $r_0 = \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2$ et $r'_0 = R_0 - r_0$.

Transformons r_0 par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}$ en $\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}$; nous obtiendrons pour transformé un quadrilatère

$$r''_0 = \alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}\alpha_{1,1}\alpha_{2,1}.$$

Posons maintenant

$$R_{0,1} = r'_0 + r''_0.$$

Le polygone $R_{0,1}$ qui sera équivalent à R_0 aura pour sommets α_{2n-1}, α_{2n}, α_2, α_3, ..., α_{2n-3}, α_{2n-2}, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$. On voit que $R_{0,1}$ a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{2n-2}$$

et trois sommets infiniment voisins de α_{2n-2}. Quant à la longueur des côtés infiniment petits, elle sera donnée par la relation

$$(9) \qquad \alpha_{1,1} - \alpha_{2,1} = (\alpha_1 - \alpha_2)\frac{(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})^2}{(\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n})^2}.$$

Joignons maintenant $\alpha_{2,1}\alpha_{2n-3}$, nous partagerons le polygone $R_{0,1}$ en deux autres : $r_{0,1} = \alpha_{1,1}\alpha_{2,1}\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-3}$ et $r'_{0,1} = R_{0,1} - r_{0,1}$. Soit maintenant $r''_{0,1} = \alpha_{1,2}\alpha_{2,2}\alpha_{2n-4}\alpha_{2n-3}$ le transformé de $r_{0,1}$ par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n-3}\alpha_{2n-2}$ en $\alpha_{2n-3}\alpha_{2n-4}$. Soit enfin $R_{0,2} = r'_{0,1} + r''_{0,1}$. Il est aisé de voir que $R_{0,2}$, qui est équivalent à $R_{0,1}$, a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{2n-3}$$

et trois sommets α_{2n-4}, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$ infiniment voisins de α_{2n-3}. On aura d'ailleurs

$$(9') \qquad \alpha_{1,2} - \alpha_{2,2} = (\alpha_1 - \alpha_2)\left[\frac{(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})(\alpha_{2n-4} - \alpha_{2n-3})}{(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1})(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-3})}\right]^2.$$

Nous allons opérer sur $R_{0,2}$ comme nous avons opéré sur R_0 et sur $R_{0,1}$. C'est-à-dire que nous joindrons $\alpha_{2,2}\alpha_{2n-4}$ et que nous poserons, en appelant $r''_{0,2}$ le transformé de $r_{0,2}$ par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n-4}\alpha_{2n-3}$ en

$\alpha_{2n-6}\alpha_{2n-5}$,

$$r_{0,2} = \alpha_{2n-4}\alpha_{2n-3}\alpha_{1,2}\alpha_{2,2}, \qquad r'_{0,2} = \mathrm{R}_{0,2} - r_{0,2},$$

$$\mathrm{R}_{0,3} = r'_{0,2} + r''_{0,2}.$$

On opérera ensuite sur $\mathrm{R}_{0,3}$ comme sur $\mathrm{R}_{0,2}$ et ainsi de suite.

Il est aisé de voir que $\mathrm{R}_{0,i}$ a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{2n-2}$$

et trois infiniment voisins de α_{2n-2i}.

Considérons en particulier le polygone $\mathrm{R}_{0,n-1}$. Il aura trois sommets infiniment voisins de α_2 et par conséquent de α_{2n}. Ce seront les sommets α_2, $\alpha_{1,n-1}$ et $\alpha_{2,n-1}$ (qu'il ne faut pas confondre avec α_{2n-1}). Il résulte de là que $\mathrm{R}_{0,n-1}$ différera infiniment peu de R_0. Ces deux polygones sont d'ailleurs équivalents, d'où il résulte que la transformation T qui change R_0 en $\mathrm{R}_{0,n-1}$ appartient au groupe Γ.

Posons

$$\mathrm{H} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_5)\ldots(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})}{(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)\ldots(\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n})}.$$

Nous aurons la relation suivante, qui est au polygone $\mathrm{R}_{0,n-1}$ ce que les relations (2) et (2') sont aux polygones $\mathrm{R}_{0,1}$ et $\mathrm{R}_{0,2}$:

$$\alpha_{1,n-1} - \alpha_{2,n-1} = (\alpha_1 - \alpha_2)\mathrm{H}^2$$

et, de même,

$$\alpha_2 - \alpha_{1,n-1} = (\alpha_{2n} - \alpha_1)\mathrm{H}^2.$$

Cela posé, reprenons notre fonction φ et supposons qu'elle se comporte régulièrement, ce qui ne présente pas de difficulté, puisque cette fonction est presque entièrement arbitraire. Pour un polygone qui a des côtés infiniment petits, la fonction φ est infiniment petite par hypothèse. Nous supposerons qu'elle est du premier ordre ainsi que $\alpha_1 - \alpha_2$. En négligeant les infiniment petits du second ordre, on peut dire que les trois quantités φ, $\alpha_1 - \alpha_2$ et $\alpha_1 - \alpha_{2n}$ sont proportionnelles. On a donc, pour le polygone R_0,

$$\varphi = (\alpha_1 - \alpha_2)\mathrm{F},$$

F ne dépendant que de la position des points

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \ldots, \quad \alpha_{2n-2}$$

et non de la longueur des côtés infiniment petits $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_{2n}$.

Appelons φ' et F′ les valeurs de φ et de F qui correspondent à $\mathrm{R}_{0,n-1}$; nous aurons :

$$F' = F \text{ à des infiniment petits près du premier ordre,}$$

$$\varphi' = \varphi H^2 \text{ à des infiniment petits près du second ordre.}$$

Si donc $H^2 > 1$, la substitution T transforme R_0 en un polygone équivalent qui correspond à une valeur de φ plus grande. *Le polygone* R_0 *n'est donc pas réduit.*

Si au contraire $H^2 < 1$, la substitution inverse de T transformera R_0 en un polygone équivalent correspondant à une valeur de φ plus grande, de sorte que R_0 ne sera pas non plus réduit.

Reste le cas où $H^2 = 1$. Mais H est essentiellement négatif. On aura donc $H = -1$. Mais cette relation, qui n'est autre que la relation (1^a) du paragraphe précédent, exprime que le polygone R_0 est de la première catégorie.

Ainsi, *un polygone limite ne peut être réduit que s'il est de la première catégorie.*

Nous allons obtenir le même résultat dans les deuxième et troisième exemples. Nous allons traiter d'abord le deuxième exemple, en supposant, pour fixer les idées,

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n-1}.$$

Je définirai, dans le deuxième comme dans le troisième exemple, le polygone réduit de la manière suivante. Parmi les polygones équivalents à un polygone donné, j'appellerai ainsi celui qui sera tel que le plus grand de ses côtés soit aussi petit que possible. S'il y en a plusieurs qui satisfassent à cette condition, je choisirai parmi eux celui qui sera tel que le deuxième côté (par ordre de grandeur décroissante) soit aussi petit que possible, et ainsi de suite. (Ici comme dans le paragraphe précédent, en ce qui concerne le deuxième et le troisième exemple, quand je dis qu'un côté est grand ou petit, il s'agit de sa L et non de sa longueur géométrique.)

Voici une proposition que je me borne à énoncer, et que je vais appliquer à mon dessein.

Soit un triangle ABC qui se déforme de telle façon que ses trois sommets tendent respectivement vers trois points A', B' et C' situés le premier sur le cercle fondamental, les deux autres à l'intérieur de ce cercle. Les deux côtés AB et AC croissent indéfiniment, pendant que BC reste fini; mais la différence des deux côtés AB et AC tend vers une limite finie λ :

$$\lim(AB - AC) = \lambda.$$

Cette limite ne dépend que de la position des trois points A′, B′, C′ et non de la manière dont A, B, C tendent vers A′, B′, C′. Par les points B′ et C′ on peut faire passer deux cercles tangents intérieurement au cercle fondamental. Soient M et N les points de contact. Joignons MN par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Cet arc de cercle coupera B′C′ en un point P tel que la L de PB′ soit égale à celle de PC′; je supposerai que B′ est à gauche de MN et C′ à droite. La limite λ sera positive si A′ est à droite de MN, négative si A′ est à gauche; elle sera nulle si A′ est en M ou bien en N.

Considérons donc le polygone R_0 dont nous allons faire croître indéfiniment les côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$ comme on l'a vu au paragraphe précédent. Il arrivera alors que les deux sommets α_{2n} et α_4 tendront vers deux points B′ et C′ intérieurs au cercle fondamental, pendant que α_1 tendra vers un point A′ situé sur ce cercle lui-même. En même temps, les points α_2 et α_3 tendent aussi vers A′, car les côtés $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_2\alpha_3$, qui ont leur L infiniment grande, ont leur longueur géométrique infiniment petite.

Nous pourrons trouver sur le cercle fondamental les points M et N définis plus haut; nous joindrons MN; je suppose d'abord que A′ soit comme B′ à gauche de MN. On aura, en vertu du lemme que je viens d'énoncer,

$$\lim \alpha_{2n} = B', \qquad \lim \alpha_4 = C', \qquad \lim \alpha_1 = \lim \alpha_2 = \lim \alpha_3 = A',$$

$$\alpha_2\alpha_4 > \alpha_2\alpha_{2n}, \qquad \alpha_3\alpha_4 > \alpha_3\alpha_{2n}.$$

Dans les deux triangles $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_{2n}$, on a

$$\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3\alpha_4, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_{2n},$$
$$\text{angle } \alpha_2\alpha_1\alpha_{2n} = \text{angle } \alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

et

$$\alpha_2\alpha_4 > \alpha_2\alpha_{2n},$$

d'où

$$\alpha_3\alpha_4 > \alpha_1\alpha_2.$$

Le côté $\alpha_3\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3$ est donc le plus grand côté de R_0 puisque tous les autres que $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_{2n}$ sont finis.

Je dis qu'on peut trouver un polygone équivalent à R_0 dont le plus grand côté soit plus petit que $\alpha_3\alpha_4$.

Joignons $\alpha_3\alpha_{2n}$, nous aurons partagé le polygone R_0 en deux autres :

$$r_0 = \alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad r'_0 = \alpha_3\alpha_4\alpha_5\ldots\alpha_{2n}.$$

Transformons r'_0 par la substitution qui change $\alpha_3\alpha_4$ en $\alpha_3\alpha_2$. Nous obtiendrons

$$r_0'' = \alpha_3' \alpha_4' \alpha_5' \dots \alpha_{2n}',$$

avec

$$\alpha_3' = \alpha_3, \qquad \alpha_4' = \alpha_2.$$

Le polygone $R_0' = r_0 + r_0''$ est équivalent à R_0. Il a $2n - 4$ côtés égaux aux $2n - 4$ côtés finis de R_0. Il admet aussi les deux côtés infinis

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_{2n},$$

qui appartiennent à R_0 et les deux côtés infinis

$$\alpha_3 \alpha_{2n} = \alpha_3 \alpha_{2n}',$$

qui n'appartiennent pas à R_0. Si $\alpha_3 \alpha_{2n} > \alpha_1 \alpha_2$, c'est $\alpha_3 \alpha_{2n}$ qui est le plus grand côté de R_0' et l'on a

$$\alpha_3 \alpha_{2n} < \alpha_3 \alpha_4. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si $\alpha_3 \alpha_{2n} < \alpha_1 \alpha_2$, c'est $\alpha_1 \alpha_2$ qui est le plus grand côté de R_0' et l'on a

$$\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_3 \alpha_4. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi, si le point A' est à gauche de MN, le polygone R_0 n'est pas réduit; mais, comme rien ne distingue la gauche de la droite, il n'est pas réduit non plus si A' est à droite de MN. Il faut donc que A' soit en M ou en N. Mais alors le cercle A'B'C' est tangent au cercle fondamental, ce qui veut dire que le polygone limite est de la première catégorie.

Ainsi, tout polygone limite réduit est de la première catégorie.

Passons au troisième exemple, c'est-à-dire à un polygone R_0 de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués. Joignons les sommets opposés; nous obtiendrons ainsi $4p$ diagonales. Je dis que si R_0 est réduit, le plus grand des $4p$ côtés du polygone est plus petit que la plus petite de ces $4p$ diagonales. J'appelle δ cette plus petite diagonale; si ce côté était plus grand que δ, on partagerait le polygone R_0 en deux autres r_0 et r_0' en traçant la diagonale δ. On appellerait ensuite r_0'' le transformé de r_0 par la substitution qui change le plus grand des côtés de R_0 en son conjugué. Le polygone $R_0' = r_0 + r_0''$ serait équivalent à R_0; il aurait ses côtés opposés conjugués; de plus, il admettrait tous les côtés de R_0 sauf le plus grand qui serait remplacé par la diagonale δ, qui par hypothèse est plus petite. Le plus grand côté de R_0' serait donc plus petit que celui de R_0 et R_0 ne serait pas réduit.

Cela posé, supposons, comme dans le paragraphe précédent, que les deux côtés $\alpha_{4p}\alpha_1$ et $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ croissent indéfiniment; il en sera de même des diagonales $\alpha_{4p}\alpha_{2p}$ et $\alpha_1\alpha_{2p+1}$; tous les autres côtés resteront finis. Supposons que les sommets α_{4p} et α_{2p+1} tendent vers deux points B' et C' intérieurs au cercle fondamental. Les sommets $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$ tendront vers un même point A' situé sur la circonférence de ce cercle et ce point A' est également celui avec lequel tendent à se confondre les sommets β_1 et β_2 du polygone R'_0. De ce fait résulte l'identité suivante :

$$\lim(\alpha_1\alpha_{4p} - \alpha_1\alpha_{2p+1}) = \lim(\alpha_{2p}\alpha_{4p} - \alpha_{2p}\alpha_{2p+1}).$$

Mais si le polygone R_0 est réduit, on a d'autre part, puisque les côtés sont plus petits que les diagonales,

$$\alpha_1\alpha_{4p} \leqq \alpha_1\alpha_{2p+1}, \qquad \alpha_{2p}\alpha_{4p} \geqq \alpha_{2p}\alpha_{2p+1}.$$

Donc on a

$$\lim(\alpha_1\alpha_{4p} - \alpha_1\alpha_{2p+1}) = 0.$$

On en conclut, comme dans l'exemple précédent, que le cercle A'B'C' est tangent au cercle fondamental et que le polygone R_0 est de la première catégorie.

Ainsi, tout polygone limite réduit est de la première catégorie.

Tout ce qui précède ne s'applique qu'aux polygones de la première espèce.

Passons d'abord aux polygones de la deuxième espèce qui peuvent, comme nous l'avons vu, être ramenés à un polygone limite de la première espèce. Supposons donc que P_0 soit un polygone de la deuxième espèce; ce polygone sera équivalent à un autre R_0 de la première espèce; si R_0 n'est pas de la première catégorie, je dis que P_0 n'est pas réduit.

En effet, envisageons la fonction φ définie plus haut; cette fonction, dans le cas du deuxième et du troisième exemple, sera, pour fixer les idées, l'inverse du plus grand côté de R_0.

La fonction φ correspondant soit au polygone P_0, soit au polygone R_0 sera infiniment petite. Soient a et b les points de M_1 qui correspondent à R_0 et à P_0; chacun de ces deux points sera infiniment près d'une des frontières de la multiplicité M_1; soient c et d les points de ces frontières qui sont respectivement le plus rapprochés l'un de a et l'autre de b. Les coordonnées du point a sont fonctions de celles du point b, puisque les deux polygones correspondants R_0 et P_0 dérivent l'un de l'autre d'après une loi déterminée. Si a et b sont très voisins des frontières, comme nous le supposons ici, la position du point c dépend de celle du point d, de telle façon que les coordonnées d'un de ces points soient fonctions continues de celles de l'autre. Maintenant si les points c et d restant fixes, *à des infiniment petits près*, le point a se rapproche du point c de telle façon que la distance infiniment petite ac diminue de moitié par exemple, la distance infiniment petite bd diminuera aussi de moitié.

Si nous appelons φ_1 et φ_2 les valeurs de φ qui répondent aux points a et b, nous aurons, à des infiniment petits près du second ordre,

$$\varphi_1 = \overline{ac}\, f_1(c), \qquad \varphi_2 = \overline{bd}\, f_2(d),$$

les fonctions f_1 et f_2 étant des fonctions finies, en général, et ne dépendant que de c et de d.

Si donc, les points c et d restant fixes ou ne variant qu'infiniment peu, la distance ac diminue dans un certain rapport, les deux fonctions infiniment petites φ_1 et φ_2 diminueront dans le même rapport.

Cela posé, nous avons vu que si R_0 n'est pas de la première catégorie, ce polygone n'est pas réduit et qu'on peut trouver un polygone équivalent R'_0 correspondant à une plus grande valeur de φ. Soit P'_0 le polygone de la deuxième espèce qui dérive de R'_0 comme P_0 de R_0; soient a', b', c', d' les points qui sont à R'_0 et P'_0 ce que les points a, b, c, d sont à R_0 et à P_0; soient φ'_1 et φ'_2 les valeurs de φ qui correspondent à R'_0 et à P'_0. Les points c' et d', il est aisé de le constater, différeront infiniment peu de c et de d; on aura donc

$$\frac{ac}{a'c'} = \frac{bd}{b'd'},$$

$$\varphi'_1 = a'c'\, f_1(c') = a'c'\, f_1(c),$$
$$\varphi'_2 = b'd'\, f_2(d') = b'd'\, f_2(d)$$

à des infiniment petits près et par conséquent

$$\frac{\varphi_1}{\varphi'_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi'_2}.$$

Mais on a

$$\varphi'_1 > \varphi_1,$$

on aura donc

$$\varphi'_2 > \varphi_2,$$

et par conséquent le polygone P_0 ne sera pas réduit.

Ainsi, *un polygone limite de la deuxième espèce ne peut être réduit que s'il est équivalent à un polygone de la première espèce et de la première catégorie.*

Le cas des polygones de la troisième espèce, qui sont un cas particulier de ceux de la première et de la deuxième, se traiterait d'après les mêmes principes. Nous n'allons étudier ici qu'un seul exemple. Nous fixerons ainsi les idées, et le lecteur se rendra mieux compte de la façon dont nous surmontons les différentes difficultés que si nous étudiions directement le cas général.

Nous choisirons le polygone R_0 du second exemple en supposant que les six côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\alpha_5$ et $\alpha_5\alpha_6$ croissent indéfiniment.

Nous supposerons que ce polygone est réduit, et nous allons faire voir qu'il est de la première catégorie, c'est-à-dire que les cinq sommets α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 tendent à se confondre en un seul point situé sur la circonférence du cercle fondamental, et cela de telle sorte que le cercle $\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_6$ soit tangent au cercle fondamental.

Pour cela, nous nous appuierons sur les deux principes suivants :

1° Si le polygone R_0 est réduit, les côtés issus d'un sommet de rang impair sont plus petits que la diagonale qui joint ce sommet à un sommet quelconque de rang pair. En effet, soient C le côté $\alpha_1\alpha_2$, par exemple, et D une diagonale joignant α_1 à un sommet quelconque de rang pair. Il est aisé de construire un polygone R'_0 équivalent à R_0 et admettant mêmes côtés (en grandeur) que R_0, sauf que le côté C est remplacé par D. Si l'on avait $C > D$, le plus grand côté de R_0 serait plus grand que le plus grand côté de R_0 et R_0 ne serait pas réduit.

2° Supposons que les trois sommets d'un triangle ABC tendent respectivement vers trois points A', B', C', situés, le premier à l'intérieur du cercle fondamental, et les deux autres sur la circonférence de ce cercle. *Si les deux points B' et C' sont distincts l'un de l'autre*, les trois côtés croîtront indéfiniment, l'angle BAC tendra vers une limite finie, ainsi que la différence

$$AB + AC - BC,$$

et, par conséquent, *le côté* BC *sera plus grand que chacun des deux autres.*

Cela posé, supposons que, dans le polygone réduit R_0, les deux sommets α_{2n} et α_6 tendent vers deux points fixes B' et C' du plan. Les cinq sommets α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, dont la distance à α_6 est infinie, tendront vers certains points du cercle fondamental.

Si l'on avait

$$\lim \alpha_4 \text{ [illegible] } \lim \alpha_5,$$

on aurait, en vertu du deuxième principe,

$$\alpha_4\alpha_5 > \alpha_5\alpha_{2n},$$

ce qui est contraire au premier principe.

De même, si l'on avait

$$\lim\alpha_4 > \lim\alpha_3, \qquad \lim\alpha_3 > \lim\alpha_2 \qquad \text{ou} \qquad \lim\alpha_2 > \lim\alpha_1,$$

on aurait

$$\alpha_3\alpha_4 > \alpha_3\alpha_{2n}, \qquad \alpha_2\alpha_3 > \alpha_3\alpha_{2n} \qquad \text{ou} \qquad \alpha_2\alpha_1 > \alpha_1\alpha_6,$$

ce qui serait contraire au premier principe.

Donc les cinq sommets $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ tendent vers un seul et même point A' du cercle fondamental.

Joignons les deux points M et N définis plus haut. Si A' était à gauche de MN (c'est-à-dire du même côté que B'), on aurait

$$\alpha_5\alpha_{2n} < \alpha_5\alpha_6,$$

et s'il était à droite

$$\alpha_1\alpha_6 < \alpha_1\alpha_{2n},$$

ce qui serait contraire au premier principe.

Ainsi A' est en M ou en N, c'est-à-dire que le cercle A'B'C' est tangent au cercle fondamental, c'est-à-dire que R_0 est de la première catégorie.

C. Q. F. D.

XIV. — Méthode de continuité.

Tous les lemmes que nous avons établis vont nous permettre d'appliquer avec toute rigueur la méthode de continuité.

Considérons une infinité de types T appartenant à une même classe et définis par un certain nombre de paramètres qui seront, si l'équation générale du type s'écrit

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0, \tag{2}$$

les modules de la relation (2) et les points singuliers de l'équation (1). Soit q le nombre de ces paramètres. Ces paramètres vont définir un point d'une certaine multiplicité M à q dimensions. Je dis que cette multiplicité est fermée et ne présente pas de frontière. En effet, Riemann a démontré que si une multiplicité à q dimensions était limitée par une autre multiplicité, cette autre multiplicité devrait être à $q-1$ dimensions. C'est ainsi qu'une surface, par exemple, ne peut être *découpée* (zerschnitten) que par une ligne et non par un point.

Or, en faisant varier les paramètres du type, on ne pourrait arriver à la frontière de M qu'en atteignant certains points singuliers de cette multiplicité, correspondant au cas où le type T se réduit à un type T' plus simple (cf. § IX, p. 334). Or cela ne peut arriver que de deux manières :

1° Ou bien, si deux points singuliers de (1) venaient à se confondre; mais il faut pour cela une condition *complexe*, c'est-à-dire deux conditions *réelles*;

2° Ou bien, si le genre de la relation (2) s'abaisse d'une unité, c'est-à-dire si la courbe représentée par cette relation acquiert un nouveau point double. Mais ici encore il faut pour cela deux conditions réelles.

Ainsi, dans l'un comme dans l'autre cas, il faut s'imposer deux conditions, et les points singuliers qui satisfont à ces conditions forment une multiplicité à $q-2$ dimensions qui ne peut servir de frontière à M qui en a q. J'appellerai $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ ces multiplicités à $q-1$ dimensions que je viens de définir.

Considérons maintenant le domaine D_0 défini au paragraphe XIII. A chacun des points de ce domaine correspond un polygone R_0 et par conséquent une équation fuchsienne. Considérons les paramètres du type auquel elle appartient : ils définiront un certain point de la multiplicité M. Ainsi, à tout point de D_0 correspondra un point de M et un seul. D'autre part, à tout point μ de M correspondant à un type fuchsien qui contient une équation fuchsienne, correspondra un point δ de D_0 et un seul. Il y a exception toutefois si le point δ se trouve sur l'une des multiplicités $m_1, m_2, \ldots$ qui séparent D_0 du reste de la multiplicité M_1. Dans ce cas, en effet, il y a deux ou plusieurs polygones équivalents réduits, de sorte qu'au point μ correspondent deux ou plusieurs points δ. Au domaine D_0 tout entier correspondra ou bien une portion de M, ou bien cette multiplicité tout entière.

Je dis que le premier cas ne se présentera pas. En effet, s'il se présentait, la multiplicité M serait partagée en deux parties : celle qui correspond à D_0 et celle qui ne correspond pas à D_0, et ces deux parties devraient être séparées l'une de l'autre par une multiplicité frontière, qui devrait avoir, d'après le théorème de Riemann, $q-1$ dimensions.

Or, comment pourrait-il arriver que, le point δ de D_0 se mouvant dans ce domaine, le point correspondant μ de M atteignît cette multiplicité frontière hypothétique?

Est-ce parce que le déterminant fonctionnel des coordonnées de μ par rapport à celles de δ s'annulerait? Mais cela n'arrivera jamais, puisque le lemme du paragraphe VII montre qu'à tout point μ ne peut correspondre qu'un seul point δ.

Est-ce parce que le point δ atteindrait l'une de ces multiplicités m_1, m_2, ... qui séparent le domaine D_0 des autres parties de la multiplicité M_1? Mais supposons, par exemple, que le point δ franchisse une multiplicité m_1 qui sépare le domaine D_0 d'un autre domaine D_1. Le point μ franchira alors une certaine multiplicité μ_1 qui correspondra à m_1; mais le point δ étant entré dans le domaine D_1 qui fait encore partie de la multiplicité M_1, à ce point δ correspondra encore un polygone R_0 et par conséquent une équation fuchsienne et un point de la multiplicité M. La multiplicité μ_1 ne sépare donc pas les types fuchsiens qui contiennent des équations fuchsiennes, de ceux qui n'en contiennent pas.

Est-ce enfin parce que le point δ atteindrait la limite même de la multiplicité M_1? Il arriverait alors que le polygone R_0 correspondant deviendrait un *polygone limite*. Mais comme δ est intérieur à D_0, le polygone R_0 est réduit et par conséquent *de la première catégorie ou équivalent à un polygone de la première catégorie*. Mais le second lemme nous a fait voir que, lorsque R_0 tendait à se réduire à un polygone limite de la première catégorie, le type correspondant T tendait à se réduire à un type plus simple T', c'est-à-dire que deux des points singuliers de (1) tendaient à se confondre, ou bien que le genre de (2) tendait à s'abaisser d'une unité. Donc, lorsque le point δ, en restant intérieur à D_0, tend vers une des frontières de M_1, le point correspondant μ tend vers l'une des multiplicités σ_1, σ_2, ... Mais ces multiplicités n'ont que $q-2$ dimensions. Elles ne peuvent donc partager M en deux parties.

Donc M ne se partage pas en deux parties, l'une correspondant à D_0, l'autre ne correspondant pas à D_0.

Donc *tout type fuchsien contient une équation fuchsienne.*

C. Q. F. D.

XV. — Application particulière.

Nous allons donner des principes qui précèdent une application particulière. Nous choisirons pour cela le cas le plus simple qui puisse se présenter, c'est-à-dire le premier exemple du paragraphe XII, en supposant que R_0 n'a que six côtés. C'est le cas du paraboloïde (1') du paragraphe XII. Cet exemple facilitera l'intelligence de ce qui précède.

Dans le cas qui nous occupe, la multiplicité M_1 est représentée comme on l'a vu par le paraboloïde (1'). Voyons ce que devient la multiplicité M.

L'équation fuchsienne engendrée par R_0 admet quatre points singuliers et de telle façon que les quatre équations déterminantes aient chacune une racine double.

Soient α, β, γ, δ ces quatre points singuliers. Soit $\psi(\mu)$ le rapport anharmonique de μ par rapport aux trois points β, γ, δ de telle sorte que

$$\psi(\beta) = 0, \qquad \psi(\gamma) = 1, \qquad \psi(\delta) = \infty.$$

Posons

$$\psi(\alpha) = X.$$

Le type auquel appartient l'équation fuchsienne considérée est entièrement défini quand on connaît X. La multiplicité M se réduit donc à la sphère ou au plan représentatif de la quantité complexe X.

Quand on permute de toutes les manières possibles les quatre points singuliers, on obtient pour X les six valeurs suivantes :

$$X, \quad 1 - X, \quad \frac{1}{X}, \quad \frac{1}{1-X}, \quad 1 - \frac{1}{X}, \quad \frac{X}{X-1}. \tag{1}$$

On peut partager le plan des X en six régions :

$$\rho_0 + \rho'_0, \quad \rho_1 + \rho'_1, \quad \rho_2 + \rho'_2, \quad \rho_3 + \rho'_3, \quad \rho_4 + \rho'_4, \quad \rho_5 + \rho'_5.$$

La figure 15 indique cette subdivision; les deux cercles et les droites qui y sont représentées ont pour équations

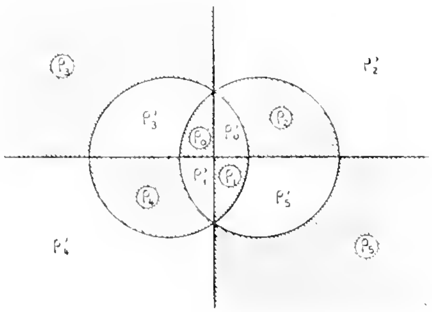
$$\operatorname{mod} X = 1, \qquad \operatorname{mod}(1 - X) = 1, \qquad \text{partie réelle de } X = \frac{1}{2},$$
$$\text{partie imag. de } X = 0.$$

On voit aisément que, si X est intérieur à ρ_0 et si X_0 est la quantité imaginaire conjuguée de X, les quantités $1 - X$, $\frac{1}{1-X}$, $\frac{X}{X-1}$, $1 - \frac{1}{X}$, $\frac{1}{X}$, $1 - X_0$,

$X_0, \frac{1}{X_0}, 1 - \frac{1}{X_0}, \frac{X_0}{X_0 - 1}, \frac{1}{1 - X_0}$ font respectivement partie de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$, $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$.

Maintenant il s'agit de subdiviser le paraboloïde $(1')$ en une infinité de domaines $D_0, D_1, \ldots$ comme il a été dit au paragraphe XIII, c'est-à-dire de telle façon que D_0 contienne les points de ce paraboloïde qui correspondent à

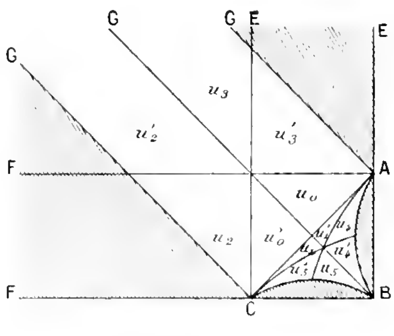
Fig. 15.



des polygones R_0 réduits et qu'à chaque point de M corresponde un point et un seul de chacun de ces domaines. Ce ne sera pas tout. De même que M se partage en douze régions ρ et ρ', de même D_0 se partagera en douze régions partielles qui correspondront respectivement aux douze régions de M; et il en sera de même de chacun des domaines D_1, D_2, etc.

La figure 16 représente le paraboloïde $(1')$ projeté sur le plan des xy; la

Fig. 16.



droite BCF a pour équation $y = 1$ et la droite BAE, $x = 0$. La droite $x = 0$, $y = 1$ se projette tout entière au point B. La partie non hachée représente la projection de D_0. Cette projection est limitée par les droites CG et AG et par les paraboles AB et BC. Elle est subdivisée en douze régions par les droites AC, CE, AF, BG et par deux courbes.

Ces droites ont pour équations

$$\begin{array}{llllll} \text{CG}, & x+y=0; & \text{BG}, & x+y=1; & \text{AG}, & x+y=2; \\ \text{AC}, & x-y=-1; & \text{AF}, & y=2; & \text{CE}, & x=-1. \end{array}$$

Les deux paraboles AB et BC sont tangentes aux droites AC et BG. Enfin les deux autres courbes tracées sur cette figure sont des arcs de coniques. On voit que le domaine D_0 est divisé en douze régions u_i et u'_i correspondant respectivement aux douze régions ρ_i et ρ'_i.

Voici comment il faut s'y prendre pour démontrer que, quand le point δ parcourt sur la multiplicité M_1 le domaine u_i ou u'_i, le point correspondant μ de la multiplicité M parcourt la région ρ_i ou ρ'_i.

Soit R'_0 le polygone symétrique de R_0 par rapport à sa diagonale be. J'appellerai a', b', c', d', e', f' les sommets de R'_0: mais afin qu'ils se présentent dans le même ordre circulaire que ceux de R_0, a' sera le symétrique de c, c' celui de a; d' sera le symétrique de f, f' celui de d; quant à b' et e', ils ne différeront pas de b et e. Grâce à ces conventions, on voit aisément que les nouvelles valeurs de x, y, z sont respectivement

$$1-y, \quad 1-x, \quad 1-z.$$

Soit maintenant X' la valeur de X qui correspond au polygone R'_0; on voit aisément que l'on a

$$X' = 1 - X_0.$$

Si en particulier le polygone R_0 est symétrique par rapport à be, il ne diffère pas de R'_0; on a

$$x+y=1, \qquad z=\frac{1}{2},$$
$$X = 1 - X_0.$$

Si donc le point δ décrit la droite BG, le point μ décrira la droite

$$\text{partie réelle de } X = \frac{1}{2}.$$

On voit de même que si l'on change R_0 dans le polygone symétrique par rapport à la diagonale cf, x, y et z se changent en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{y}$ et X en $\frac{1}{X_0}$. On en conclut que, si R_0 est symétrique par rapport à cf, c'est-à-dire si le point δ

décrit la droite CE, le point μ décrit le cercle

$$\bmod X = 1.$$

Le polygone R_0 est équivalent à un polygone R_0' qu'on obtient en joignant bf, et en transformant le triangle baf par la substitution qui change ba en bc. On obtient ainsi un polygone $bfedcf'$, f' étant le transformé de f par la substitution en question. Prenons le symétrique de R_0' par rapport à la diagonale bd. Ce symétrique pourra être regardé comme dérivé d'un certain polygone R_0'' de la même façon que R_0' de R_0. On voit aisément qu'en changeant R_0 et R_0'', on change x, y et z en $\frac{z^2}{x}$, $1+\frac{z(z-1)}{x}$ et z, et X en X_0.

Si donc le point δ décrit la droite AC, le point μ décrira la droite

$$X = X_0, \qquad \text{partie imaginaire de } X = 0.$$

Le problème suivant : *Étant donné un type fuchsien, trouver le groupe fuchsien qui engendre une équation fuchsienne contenue dans ce type*, est un problème très compliqué dont nous dirons quelques mots plus loin.

Mais, d'après ce qui précède, dans les cas particuliers suivants :

$$X = \frac{1}{2}, \qquad X = -1, \qquad X = 2, \qquad X = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \qquad X = \frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

il se résout par de simples considérations de symétrie, et l'on trouve respectivement pour les paramètres qui définissent le polygone générateur du groupe fuchsien correspondant :

$$x = -\frac{1}{2}, \qquad y = \frac{3}{2}, \qquad z = \frac{1}{2};$$

$$x = -1, \qquad y = 3, \qquad z = \frac{1}{3};$$

$$x = -2, \qquad y = 2, \qquad z = \frac{2}{3};$$

$$x = -1, \qquad y = 2, \qquad z = \frac{1}{2};$$

$$x = -\frac{1}{4}, \qquad y = \frac{3}{4}, \qquad z = \frac{1}{2}.$$

J'appelle S_1, S_2 et S_3 les opérations dont il a été question plus haut et dont voici la définition d'après les changements qu'elles font subir à x, y, z

et X :

$$S_1, \quad (x, y, z; 1-y, 1-x, 1-z) \qquad (X, 1-X_0);$$

$$S_2, \quad \left(x, y, z; \frac{1}{x}, \frac{1}{z}, \frac{1}{y}\right) \qquad \left(X, \frac{1}{X_0}\right);$$

$$S_3, \quad \left(x, y, z; \frac{z^2}{x}, 1+\frac{z(z-1)}{x}, z\right) \qquad (X, X_0).$$

Envisageons :

1° Le groupe Γ_1 dérivé de ces trois substitutions. Si l'on transforme le triangle u_0 par toutes les substitutions de ce groupe, on obtiendra une infinité de triangles analogues qui rempliront toute la multiplicité M_1.

2° Le groupe Γ_2 formé de toutes les combinaisons en *nombre pair* des substitutions S_1, S_2 et S_3. Ce que ce groupe a de remarquable, c'est qu'il est isomorphe au groupe

$$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont des entiers tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

3° Le groupe Γ formé de toutes celles des substitutions du groupe Γ_1 qui n'altèrent pas X. Si l'on applique à D_0 toutes les transformations de Γ, on obtient une série de domaines D_1, D_2, etc. qui remplissent toute la multiplicité M_1. Le groupe Γ est isomorphe au groupe des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont entiers et où

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \qquad \alpha\equiv\delta\equiv 1, \qquad \beta\equiv\gamma\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

c'est-à-dire au groupe que l'on rencontre dans l'étude de la fonction modulaire.

Chacun des domaines D_1, D_2, etc. est divisé en douze régions de la même façon que D_0 est divisé en douze régions u_i et u'_i. Mais D_0 peut être regardé aussi comme divisé en deux triangles

$$T_0 = u_0 + u'_0 + u_2 + u'_2 + u_3 + u'_3$$

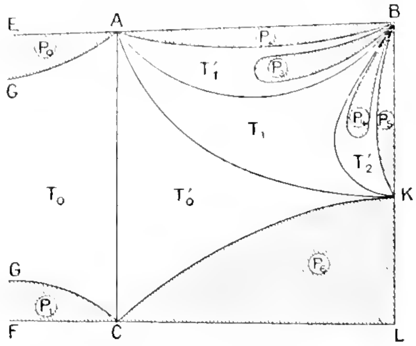
et

$$T'_0 = u_1 + u'_1 + u_4 + u'_4 + u_5 + u'_5.$$

De même, chacun des domaines D_1, D_2, etc. sera regardé comme partagé en deux triangles T_1 et T'_1, T_2 et T'_2 etc. C'est ce mode de subdivision que nous avons adopté dans les figures 17, 18 et 19 qui représentent en perspective des portions du paraboloïde (1').

Dans la figure 17, la droite BKL représente la génératrice $x=0$, $y=1$ qui, dans la figure 16, n'était représentée que par le point B. On remarquera aussi,

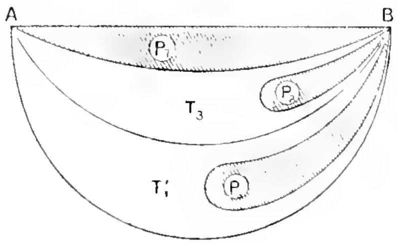
Fig. 17.



dans cette figure, les cinq triangles T_0, T'_0, T_1, T'_1, T'_2 non hachés, et les portions P_0 à P_6 du paraboloïde où la subdivision n'est pas représentée et qui sont couvertes de hachures. On verra aussi que chacun des deux triangles T'_1 et T'_2 a deux de ses sommets confondus en B.

La figure 18 représente, à plus grande échelle, la subdivision de la région

Fig. 18.

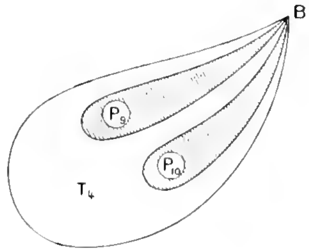


$T_1 - P_2 - P_3$. La portion P_2 a été divisée en un triangle T_3 et deux régions hachées P_7 et P_8. Les régions hachées sont, dans les quatre figures 16, 17, 18 et 19, celles où la subdivision n'est pas représentée.

Enfin la figure 19 représente le détail de la région P_3 qui est divisée en un triangle T_4 et de deux régions hachées P_9 et P_{10}. On voit que le triangle T_4 a ses trois sommets confondus en B.

Ces figures suffisent pour qu'on se rende compte de toutes les particularités de la subdivision. En effet, la région P_6 ou CKL se traite comme la région AKB; les régions P_0 et P_4 se traitent comme la région ABLC, sauf qu'une partie de la figure est rejetée à l'infini. Les régions P_5 et P_7 se traitent comme P_2; enfin P_4, P_8, P_9 et P_{10} se traitent comme P_3.

Fig. 19.



Les points des droites BE et FL correspondent à des polygones de la première espèce et, sur ces droites, les points A et C sont les seuls qui correspondent à des polygones de la première catégorie; ce sont les seuls aussi qui fassent partie de D_0. Sur la droite BL qui correspond à des polygones de la deuxième espèce, le point K est le seul qui fasse partie de D_0. Et, en effet, la substitution S_3 le change dans le point

$$x = y = \infty, \qquad z = \frac{1}{2}$$

qui correspond à un polygone de la première catégorie.

XVI. — Théorie des sous-groupes.

Nous venons de démontrer que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne; il faut maintenant trouver l'équation fuchsienne contenue dans un type fuchsien donné, ou bien encore trouver le groupe fuchsien correspondant.

Mais, avant d'aborder ce problème, il faut dire quelques mots des sous-groupes contenus dans un groupe fuchsien donné.

Ces sous-groupes sont de deux sortes :

1° Les sous-groupes d'indice fini, c'est-à-dire ceux qui sont tels qu'on peut obtenir toutes les substitutions du groupe principal en multipliant toutes les substitutions du sous-groupe par un nombre fini de substitutions.

2° Les sous-groupes d'indice infini.

A un autre point de vue, les sous-groupes sont encore de deux sortes :

1° Les sous-groupes distingués (*ausgzeichnet*), comme disent les Allemands, c'est-à-dire ceux qui sont permutables à toutes les substitutions du groupe principal.

2° Les sous-groupes non distingués.

[Cf. KLEIN, *Mathematische Annalen*, Bd 17; WALTHER DYCK, *Ueber reguläre Riemann'sche Fläche, Gruppentheoretische Studien* (*Mathematische Annalen*, Bd 17, 20).]

Les sous-groupes d'indice fini ne sont autre chose que des groupes fuchsiens. Soient G le groupe principal et g le sous-groupe qui y est contenu. Soient R_0 le polygone générateur de G; R_1, R_2, ... ses divers transformés par les diverses substitutions de ce groupe. Soit P_0 le polygone générateur de g. Il est aisé de voir que P_0 est formé par la réunion d'un certain nombre de polygones R_0, R_1, R_2, ..., R_n.

Choisissons d'une manière quelconque $n+1$ polygones parmi les polygones

$$R_0, \quad R_1, \quad R_2, \quad \ldots.$$

Soient, par exemple, R_0, R_1, R_2, ..., R_n ces $n+1$ polygones et supposons que leur ensemble forme un seul tout simplement connexe. Soit P_0 cet ensemble. Un certain nombre de côtés des polygones R resteront libres; ce seront les côtés de P_0. Il reste à voir comment ces côtés doivent être distribués en paires de côtés conjugués. Soient $a_0 b_0$ un côté de R_0, $a'_0 b'_0$ son conjugué; soient $a_1 b_1$, $a'_1 b'_1$ les côtés homologues de R_1; $a_2 b_2$, $a'_2 b'_2$ ceux de R_2, etc. Parmi les $n+1$ côtés $a_i b_i$, il y en aura un certain nombre p qui resteront libres; de même parmi les $n+1$ côtés $a'_i b'_i$, il y en aura p, c'est-à-dire un nombre précisément égal, qui resteront libres. Nous pourrons alors conjuguer chacun des côtés $a_i b_i$ restés libres à l'un des côtés $a'_i b'_i$ restés libres et cela d'une manière arbitraire. Tous les côtés de P_0 se trouveront ainsi répartis en paires de côtés conjugués.

Il y a encore une condition pour que P_0 puisse engendrer un groupe discontinu : c'est que, si l'on répartit ses sommets en cycles, la somme des angles de chaque cycle soit une partie aliquote de 2π. Si cette condition est remplie, P_0 engendrera un groupe fuchsien qui sera un sous-groupe de G. On obtiendra d'ailleurs de la sorte tous les sous-groupes d'indice fini de G.

Soient maintenant

$$(1)\qquad X = F_1(z),\quad Y = F_2(z),\quad F_3(z),\quad \ldots$$

les fonctions fuchsiennes engendrées par G et

$$(2)\qquad x = f_1(z),\quad y = f_2(z),\quad f_3(z),\quad \ldots$$

les fonctions fuchsiennes engendrées par g. La classe des fonctions fuchsiennes (2) contiendra la classe des fonctions (1) tout entière comme cas particulier.

Supposons d'abord que G et g soient tous deux de genre 0. Alors, toutes les fonctions (1) s'expriment rationnellement en X, toutes les fonctions (2) rationnellement en x. On en conclut que X est une fonction rationnelle de x. Il est d'ailleurs facile de trouver les coefficients de cette fonction rationnelle, quand on connaît les valeurs de X pour les différents sommets de R_0.

Si maintenant G est de genre 0 et g de genre p, toutes les fonctions (1) sont rationnelles en X, et X est rationnel en x et en y.

Il peut arriver enfin que ni G, ni g ne soient de genre 0. Dans ce cas, X et Y sont rationnels en x et y, et la réciproque n'est pas vraie.

Il est à remarquer que cette théorie est tout à fait analogue à celle de la transformation des fonctions elliptiques. Qu'est-ce en effet que cette transformation? Elle consiste à étudier la relation qui a lieu entre les fonctions elliptiques engendrées par le groupe

$$(3)\qquad (z,\ m\omega_1 + n\omega_2)\quad (\omega_1,\ \omega_2 \text{ périodes données; } m,\ n \text{ entiers quelconques})$$

et les fonctions elliptiques engendrées par le groupe

$$(4)\qquad (z,\ m\Omega_1 + n\Omega_2),$$

en choisissant ces nouvelles périodes Ω_1, Ω_2 de telle sorte que ce second groupe soit un sous-groupe du premier. Remarquons également que si l'on applique ces principes aux fonctions fuchsiennes engendrées par l'équation de la série hypergéométrique, on retrouvera sans peine les résultats obtenus par M. Goursat dans sa remarquable Thèse (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 1881).

Dans le cas particulier où g est un sous-groupe distingué, la subdivision de P_0 en $n+1$ polygones R est régulière, même après qu'on a plié et déformé P_0 de façon à recoller ensemble les côtés conjugués et à faire de ce polygone une surface fermée. De plus, les relations entre X, Y, x et y sont d'une nature particulière. Ainsi, si par exemple G et g sont tous deux de genre 0, le groupe de l'équation algébrique qui lie X et x est une seule fois transitif.

Considérons en particulier un exemple qui nous sera utile dans la suite. Supposons que R_0 soit un polygone

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_3\beta_2$$

symétrique par rapport à sa diagonale $\alpha_1\alpha_{n+1}$ de telle sorte que β_i soit symétrique de α_i. Je suppose de plus que les côtés symétriques sont conjugués et que tous les sommets sont sur le cercle fondamental et tous les angles nuls. Soit $X = F(z)$ une des fonctions fuchsiennes engendrées par R_0 et à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. On aura pu choisir $F(z)$ de telle façon que cette fonction reste réelle sur tout le périmètre de R_0 et sur la diagonale $\alpha_1\alpha_{n+1}$. [Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. I, p. 232 et 272)] (¹).

Cette fonction donnera alors la représentation conforme du polygone

$$r_0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_1$$

sur un demi-plan. Soit maintenant R_1 le transformé de R_0 par la substitution qui change $\beta_i\beta_{i+1}$ en $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Ce polygone sera symétrique de R_0 par rapport à $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Considérons maintenant le polygone $P_0 = R_0 + R_1$ et regardons comme conjugués deux côtés de ce polygone s'ils sont symétriques par rapport à $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Tous les cycles de ce polygone étant paraboliques, il engendrera un système de fonctions fuchsiennes. Je choisirai parmi elles une de celles à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et qui de plus restent réelles sur tout le périmètre de R_0 et de R_1.

Je l'appellerai $x = f(z)$. Cette fonction donnera la représentation conforme sur un demi-plan, non plus de r_0 comme dans le cas précédent, mais du polygone R_0 tout entier.

Pour achever de définir x je supposerai

$$f(\alpha_1) = 0, \qquad f(\alpha_{n+1}) = \infty$$

et j'aurai

$$x = \pm\sqrt{\frac{X - F(\alpha_1)}{X - F(\alpha_{n+1})}}.$$

Nous pourrons prendre indifféremment le signe + ou le signe —.

(¹) Ce Tome, p. 204 et 238.

Poussons la chose plus loin. Soit P_1 le polygone symétrique de P_0 par rapport à un de ses côtés que j'appelle C. Soit $Q_0 = P_0 + P_1$ et regardons comme conjugués deux côtés de Q_0 symétriques par rapport à C. Soit y une fonction fuchsienne engendrée par Q_0 et à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Je suppose que y soit réel le long du périmètre de Q_0 et par conséquent le long de C.

Je pose d'ailleurs

$$y = \varphi(z), \qquad \varphi(\alpha_i) = 0, \qquad \varphi(\alpha_{i+1}) = \infty;$$

d'où

$$y = \sqrt{\frac{x - f(\alpha_i)}{x - f(\alpha_{i+1})}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{X - F(\alpha_1)}{X - F(\alpha_{n+1})}} - \sqrt{\dfrac{F(\alpha_i) - F(\alpha_1)}{F(\alpha_i) - F(\alpha_{n+1})}}}{\sqrt{\dfrac{X - F(\alpha_1)}{X - F(\alpha_{n+1})}} - \sqrt{\dfrac{F(\alpha_{i+1}) - F(\alpha_1)}{F(\alpha_{i+1}) - F(\alpha_{n+1})}}}}.$$

Cet exemple montre quelle est la nature des relations qui existent entre les fonctions fuchsiennes dérivées d'un groupe fuchsien G et celles qui dérivent d'un sous-groupe de G.

Nous allons maintenant dire quelques mots des groupes distingués d'indice fini ou infini. Voici comment on peut être conduit à envisager de tels groupes. Soit

$$(5) \qquad \frac{d^p w}{dx^p} + \varphi_{p-1}\frac{d^{p-1} w}{dx^{p-1}} + \ldots + \varphi_0 w = 0$$

une équation linéaire où les coefficients φ soient rationnels en x. Supposons que les points singuliers de cette équation soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

et de telle façon que les racines de l'équation déterminante relative à a_i soient toutes des multiples de $\frac{1}{K_i}$, K_i étant un entier positif. Si l'on ne peut trouver aucun nombre entier tel que ces racines soient multiples de $\frac{1}{K_i}$, on fera $K_i = \infty$.

Nous pourrons, en vertu des paragraphes VIII à XIV, trouver une équation fuchsienne

$$(6) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = \psi(x) v$$

admettant pour points singuliers

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

et de telle façon que la différence des racines de l'équation déterminante relative à a_i soit $\frac{1}{K_i}$. Cette équation fuchsienne appartiendra à un type fuchsien que j'appelle T.

Soit z le rapport des intégrales; x sera une fonction fuchsienne de z et j'appelle G le groupe de cette fonction. Les intégrales

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3, \quad \ldots, \quad w_p$$

de l'équation (5) sont des fonctions uniformes de z. Soit S une substitution de G. Quand nous appliquerons à z cette substitution, les intégrales w deviendront

$$w_1^1, \quad w_2^1, \quad w_3^1, \quad \ldots, \quad w_p^1,$$

et il est clair que les w_i^1 sont des fonctions linéaires des w_i; j'appellerai Σ la substitution linéaire qui fait passer des w_i aux w_i^1 et j'écrirai pour abréger

$$w(z.S) = [w(z)]\Sigma. \tag{7}$$

Cette équation exprimera que quand z subit la substitution S, les w subissent la substitution Σ.

Les substitutions Σ formeront un groupe Γ qui sera isomorphe à G; mais cet isomorphisme pourra être holoédrique ou mériédrique. S'il est mériédrique, il y aura une infinité de substitutions

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p, \quad \ldots \tag{8}$$

du groupe G auxquelles correspondra la substitution unité dans le groupe Γ. Ces substitutions (8) formeront un sous-groupe g du groupe G. Je dis que ce sous-groupe est distingué. En effet, soient s une substitution de G ne faisant pas partie de g, et σ la substitution correspondante du groupe Γ. Soit S_i une substitution de g; je dis que $s^{-1}S_is$ fera aussi partie de g. En effet, nous aurons

$$w(zS_1) = w(z),$$
$$w(zs^{-1}S_1) = w(zs^{-1}),$$
$$w(zs) = [w(z)]\sigma,$$
$$w(zs^{-1}S_1s) = [w(zs^{-1}S_1)]\sigma = [w(zs^{-1})]\sigma,$$
$$w(z) = w(zs^{-1}s) = [w(zs^{-1})]\sigma$$

ou enfin

$$w(zs^{-1}S_1s) = w(z). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous sommes ainsi conduits à envisager des groupes g distingués et à indice fini ou infini et des fonctions w de z qui ne sont pas altérées par les substitutions de ces sous-groupes. Supposons que l'équation (5) s'intègre algébriquement, alors le groupe des substitutions Σ est d'ordre fini; donc g est un sous-groupe d'indice fini. Ainsi, la question de l'intégration algébrique des équations linéaires se ramène à celle des sous-groupes distingués d'indice fini et de la transformation des fonctions fuchsiennes. Nous nous occuperons de tout cela plus tard.

Lorsque g est d'indice infini, on peut trouver néanmoins quelque chose d'analogue au polygone générateur d'un groupe fuchsien. Soient, en effet,

$$1, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots, \quad s_p, \quad \ldots \tag{9}$$

une infinité de substitutions de G, choisies de telle sorte que si

$$1, \quad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \ldots, \quad \sigma_p, \quad \ldots \tag{10}$$

sont les substitutions correspondantes de Γ, le tableau (10) contienne chacune des substitutions de Γ et ne la contienne qu'une fois.

Soient maintenant

$$R_0, \quad R_1, \quad R_2, \quad R_3, \quad \ldots, \quad R_p, \quad \ldots$$

les polygones analogues à R_0 et correspondant aux diverses substitutions du tableau (9). L'ensemble de ces polygones formera une région Q_0 qui sera une sorte de polygone générateur du groupe g.

Si, en particulier, l'équation (5) est du second ordre et que nous appelions t le rapport des intégrales, t sera une fonction uniforme de z, inaltérée par les substitutions de g. Supposons maintenant que (5) appartienne au type T et que x soit une fonction kleinéenne de t n'existant que dans un de ces domaines D dont la limite n'est pas une courbe analytique et dont il a été question dans le *Mémoire sur les groupes kleinéens*. Alors le groupe g se réduira à la substitution unité et t ne pourra prendre qu'une fois et une seule chacune des valeurs intérieures à D. La relation entre t et z nous donne alors la représentation conforme de D sur un cercle.

J'arrive au point le plus important. Je suppose que (5) soit une équation fuchsienne appartenant à un type T′ et que le type T soit subordonné à T′. Alors x est fonction fuchsienne de t. Il arrive alors que t est fonction uniforme de z inaltérée par g. Elle peut prendre toutes les valeurs intérieures au cercle fondamental et n'en peut prendre d'autres. Elle ne peut prendre d'ailleurs chacune d'elles qu'une seule fois à l'intérieur de Q_0, mais elle peut prendre chacune d'elles une infinité de fois à l'intérieur du cercle fondamental.

Il reste à examiner ce qui se passe quand les coefficients φ de l'équation (5), au lieu d'être rationnels en x, sont rationnels en x et y, ces deux variables étant liées par la relation

$$\theta(x, y) = 0. \tag{11}$$

Je vais considérer une équation (6)

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \psi(x) v, \tag{6}$$

où ψ est rationnel en x et qui admet pour points singuliers non seulement ceux de l'équation (5), mais encore ceux de l'équation (11), c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles $\frac{d\theta}{dy} = 0$. Si b est un point singulier de cette espèce et si, dans le voisinage de ce point singulier, λ valeurs de y se permutent entre elles de la manière bien connue, la différence des racines de l'équation déterminante de (6) devra être $\frac{1}{K}$, K étant un multiple de λ. Remarquons bien ce qui suit pour éviter toute confusion; à chaque valeur de x correspondent plusieurs points de la surface de Riemann (11). Si l'un de ces points est un point singulier de (5), en général il n'en sera pas de même des autres, et cependant tous ces points analytiques sont alors des points singuliers de (6); car $\varphi(x)$ est rationnel en x et indépendant de y; et, par conséquent, il n'y a pas lieu de s'inquiéter de savoir à quel feuillet de la surface de Riemann appartient le point analytique correspondant.

Cela posé, soient G le groupe de l'équation (6), z le rapport des intégrales; x sera une fonction fuchsienne de z; y sera une fonction uniforme de z, mais elle ne restera pas inaltérée par toutes les substitutions de G. Si j'appelle g' le groupe formé par toutes les substitutions de G qui n'altèrent pas y, ce groupe sera un sous-groupe d'indice fini de G; mais il ne sera pas distingué en général [à moins que le groupe de l'équation algébrique (11) ne soit une seule fois transitif].

Si, au contraire, je considère à la fois les m valeurs de y qu'on peut tirer de l'équation (11) en la supposant de degré m en y, et si j'appelle g'' le groupe formé par les substitutions de G qui n'altèrent *aucune* de ces m valeurs, g'' sera un sous-groupe distingué.

Appelons enfin g le groupe formé par les substitutions de G qui n'altèrent pas les intégrales de l'équation (5); ce sera un sous-groupe d'ordre fini de G et de g'. Considéré comme sous-groupe de G, il ne sera pas distingué; comme sous-groupe de g', il sera distingué.

Nous pourrons regarder le groupe g' comme engendré par un polygone P'_0 formé par la réunion de m polygones transformés de R_0; le groupe g sera engendré par une région Q_0 formée par la réunion d'une infinité de polygones transformés de P'_0. Quant à g'', il sera engendré par un polygone P''_0 formé par la réunion de ω polygones transformés de R_0, ω étant l'ordre du groupe de l'équation algébrique (11). Si ce dernier groupe est une seule fois transitif, $\omega = m$, et g' et g'' ne diffèrent pas l'un de l'autre.

XVII. — Troisième problème. Types symétriques.

On a vu au paragraphe X avec quelle facilité on démontre que tout type fuchsien symétrique contient une équation fuchsienne; nous allons faire voir maintenant comment on peut calculer, avec une approximation indéfinie, les coefficients de cette équation.

Considérons un type symétrique T :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x) v; \tag{1}$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en x, tous les points singuliers de cette équation sont réels et toutes les équations déterminantes ont une racine double. Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

les points singuliers réels en question. Au lieu de supposer que ces points singuliers sont réels, nous supposerons qu'ils sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon 1. Il est aisé, en effet, de passer d'un cas à l'autre par un changement linéaire de la variable x. Il s'agit de déterminer les coefficients restés arbitraires dans l'équation (1) de telle façon que cette équation soit fuchsienne. Supposons le problème résolu. Soit z le rapport des intégrales. La variable x sera une fonction fuchsienne de z et le polygone générateur R_0 de cette fonction sera symétrique et aura tous ses sommets sur le cercle fondamental. Il sera partagé par une de ses diagonales en deux polygones symétriques r_0 et r'_0. Je suppose que le centre du cercle fondamental soit intérieur à r_0 et j'appelle b un certain point que je suppose *réel* et intérieur également à r_0. La fonction

$$x = f(z)$$

sera une des fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. J'achèverai de la définir par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} x &= 1, && \text{quand } z \text{ est situé sur le périmètre de } r_0, \\ x &= 0, && \text{pour } z = 0, \\ \arg x &= 0, && \text{pour } z = b. \end{aligned}$$

La fonction $x = f(z)$ nous donne alors la représentation conforme du polygone r_0 sur le cercle de centre O et de rayon 1. Cela posé, soient R_1, R_2, ... les divers transformés de R_0 par le groupe engendré par ce polygone. Ces polygones rempliront tout le cercle fondamental et chacun d'eux sera subdivisé en deux parties symétriques r_1 et r'_1, r_2 et r'_2, etc. Considérons un certain nombre de polygones r_i et r'_k dont l'ensemble forme un seul tout simplement connexe. Soit P_0 le polygone formé par cet ensemble. Considérons la fonction

$$y = \theta(z),$$

qui donne la représentation conforme de P_0 sur le cercle de centre O et de rayon 1. Pour achever de définir y, je suppose

$$\theta(0) = 0, \qquad \arg\theta(b) = 0.$$

Cette fonction $\theta(z)$ sera une fonction fuchsienne dont le groupe g sera un sous-groupe du groupe G de la fonction $f(z)$. Il résulte de là que x est une fonction $\varphi(y)$ rationnelle en y. Il est d'ailleurs facile (et nous reviendrons sur ce point un peu plus loin) de trouver les coefficients de la fonction $\varphi(y)$, quand on connaît les points singuliers a et la situation relative des différents polygones r_i et r'_k dont l'ensemble constitue P_0. Or les quantités a nous sont données et nous pouvons disposer arbitrairement de la situation relative des polygones r_i et r'_k. Les coefficients de la fonction rationnelle $\varphi(y)$ peuvent donc être regardés comme connus.

Nous pourrons toujours, à la condition de prendre un assez grand nombre de polygones r_i et r'_k, choisir ces polygones de telle sorte que le cercle de centre O et de rayon ρ soit tout entier intérieur à P_0, et cela quelque grand que soit ρ, pourvu, bien entendu, que ce rayon reste inférieur à 1. On aura alors l'inégalité suivante :

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y < \frac{\operatorname{mod} z}{\rho}.$$

On pourra donc choisir un rayon ρ suffisamment voisin de 1 et par conséquent un polygone P_0 suffisamment grand pour que la différence entre mod z et mod y soit aussi petite que l'on veut. En d'autres termes, quand ρ tend vers l'unité, on a

$$\lim \operatorname{mod} y = \operatorname{mod} z.$$

Mais ce n'est pas tout. Soient

$$z = \xi + i\eta, \qquad u = \log \operatorname{mod} \frac{y}{z}, \qquad v = \arg \frac{y}{z}.$$

Supposons que z soit un certain point tel que

$$\operatorname{mod} z < \rho_1 < \rho < 1,$$

ρ_1 étant une quantité positive convenablement choisie. Nous aurons, à l'intérieur du cercle de rayon ρ,

$$0 < u < \log \frac{1}{\rho}.$$

On en conclut qu'à l'intérieur du cercle de rayon ρ_1 on a

$$\left|\frac{du}{d\xi}\right| < \frac{4 \log\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)^2} > \left|\frac{du}{d\eta}\right|.$$

Mais

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{dv}{d\eta}, \qquad \frac{du}{d\eta} = \frac{dv}{d\xi}.$$

On en conclut que $\frac{dv}{d\xi}$ et $\frac{dv}{d\eta}$ tendent *uniformément* vers zéro quand ρ tend vers 1. Or, pour $z = b$, on a $v = 0$; on peut donc écrire

$$v = \int_b^z \left\{ \frac{dv}{d\xi} d\xi + \frac{dv}{d\eta} d\eta \right\},$$

d'où l'on conclut

$$\lim v = 0 \qquad \text{pour} \qquad \lim \rho = 1$$

et

$$\lim(u + iv) = 0,$$

$$\lim \frac{y}{z} = 1, \qquad \lim y = z.$$

Je vais maintenant démontrer que, pour une valeur quelconque de z, la limite de la fonction rationnelle $\varphi(z)$ [qui n'est autre que $\varphi(y)$, où y est remplacé par z] est précisément la fonction fuchsienne $f(z)$. Nous avons

$$y = \theta(z).$$

Posons, de même,

$$z = \theta(z_1).$$

Je dis que

$$\lim z_1 = z.$$

En effet, lorsque z est à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon ρ_1, nous avons

$$\operatorname{mod} \frac{dy}{dz} > 1 - \frac{\log\left(\frac{1}{\rho}\right)\sqrt{3}}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)^2}.$$

J'appelle, pour abréger, K le second membre de cette inégalité. Or, nous avons

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{mod} z_1 < \operatorname{mod} z < \rho_1.$$

Il vient donc

$$|z_1 - z| < |y - z| \frac{1}{K}.$$

Or,

$$\lim |y - z| = 0, \qquad \text{donc} \qquad \lim |z - z_1| = 0.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\varphi(z) = f(z_1).$$

Mais $f(z)$ est une fonction continue et, comme la différence $z - z_1$ tend vers zéro, nous aurons

$$\lim f(z_1) = f(z)$$

ou

$$\lim \varphi(z) = f(z). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On démontrerait de même que la limite de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\varphi(z)$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(z)$.

Il s'agit de profiter de ce qui précède pour calculer les coefficients restés arbitraires dans l'équation (1). Soit p le nombre de ces coefficients que nous appellerons pour abréger les coefficients c. Soient v_1 et v_2 deux intégrales de l'équation (1) définie comme il suit :

$$\text{pour } x = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad \frac{dv_1}{dx} = 1,$$

$$\text{pour } x = 0, \qquad v_2 = 1, \qquad \frac{dv_2}{dx} = 0.$$

Le rapport $\frac{v_1}{v_2}$ est alors une fonction de x parfaitement définie. Calculons dans le développement de cette fonction les coefficients de

$$x^2, \quad x^3, \quad x^4, \quad \ldots, \quad x^{p+3}.$$

Ces $p+2$ coefficients s'exprimeront rationnellement en fonctions des coefficients c et des points singuliers a. Mais nous aurons

$$(2) \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\alpha z}{z+\gamma},$$

α et γ étant deux constantes que nous ne connaissons pas encore. Nous avons dans l'identité (2) une relation entre $x = f(z)$ et z. On peut en tirer les $p+2$ premiers coefficients du développement de $f(z)$ suivant les puissances de z en fonctions rationnelles de α, de γ, des c et des a. On peut donc avoir réciproquement les c, α et γ en fonctions rationnelles des a et des $p+2$ premiers coefficients du développement de $f(z)$. Or les a nous sont donnés, les coefficients du développement de $f(z)$ peuvent aussi être regardés comme connus, puisque ce sont les limites des coefficients du développement de $\varphi(z)$; les coefficients c peuvent donc aussi être calculés avec une approximation indéfinie.

On peut se proposer, au lieu de calculer les coefficients de l'équation (1), de trouver directement le groupe de cette équation. Voici comment on peut opérer.

Supposons que x décrive, dans le sens positif, un contour fermé autour du point singulier a_i; z se changera en $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, la substitution

$$S_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

étant parabolique; en même temps y se changera en y_i. Si la valeur initiale de z est o, sa valeur finale sera $\frac{\beta_i}{\delta_i} = \lambda_i$; si la valeur initiale de y est o, sa valeur finale s'appellera μ_i. La connaissance de λ_i suffit pour déterminer la substitution S_i; mais, quand on connaît la fonction rationnelle $\varphi(y)$, la détermination de μ_i n'est qu'une question d'algèbre. On a d'ailleurs

$$\lambda_i = \lim \mu_i.$$

On déterminera ainsi toutes les substitutions S_i et par conséquent le groupe G. Il y a, d'autre part, entre les λ_i une relation algébrique qui facilitera le calcul.

Il reste maintenant à entrer plus profondément dans la question et à voir comment on peut effectivement calculer les coefficients de la fonction rationnelle $\varphi(y)$. Le calcul dépend naturellement du choix des polygones r_i et r'_k dont l'ensemble constitue P_0. Mais ce choix est lui-même à peu près arbitraire et nous sommes forcés, pour fixer les idées, de choisir certains exemples particuliers. Il est bien entendu que ce ne sont là que des exemples, et nous ne voulons pas dire que le choix que nous allons faire soit le meilleur et le plus simple. Il est même probable que l'expérience et la pratique conduiront à faire un choix différent.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les sommets de r_0 correspondant respectivement aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Considérons le polygone P_0^1 formé de r_0 et du polygone symétrique de r_0 par rapport à l'un de ses côtés, à $\alpha_1\alpha_n$ par exemple. Appelons y_1 la fonction y qui est engendrée par ce polygone P_0^1, et z_1 une fonction liée à y_1 par une relation linéaire convenablement choisie et dont nous déterminerons plus tard les coefficients. Nous aurons alors

$$z_1 = \sqrt{\frac{x-a_1}{x-a_n}}, \qquad y_1 = \frac{A_1 z_1 + B_1}{C_1 z_1 + D_1}.$$

Considérons maintenant un polygone P_0^2 formé de P_0^1 et du polygone symétrique de P_0^1 par rapport à l'un de ses côtés que j'appelle C. J'appelle y_2 et z_2 des fonctions qui sont à P_0^2 ce que y_1 et z_1 sont à P_0^1 et j'appelle b et c les valeurs de z_1 aux extrémités du côté C. Nous aurons alors

$$z_2 = \sqrt{\frac{z_1-c}{z_1-d}}, \qquad y_2 = \frac{A_2 z_2 + B_2}{C_2 z_2 + D_2}.$$

On opérera sur P_0^2 comme on a opéré sur P_0^1 et ainsi de suite *ad infinitum*. On calculera ainsi successivement les valeurs de

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_i, \quad \ldots.$$

Pour passer de z_i à y_i, il faut connaître les coefficients de la relation linéaire

$$y_i = \frac{A_i z_i + B_i}{C_i z_i + D_i}.$$

On déterminera ces coefficients de telle façon que y_i s'annule avec x, ait son module égal à 1 en même temps que x, et soit réel pour une certaine valeur réelle de x.

Il reste encore quelque chose d'arbitraire dans le mode de génération des polygones $P_0^1, P_0^2, \ldots$. Pour former P_0^i à l'aide de P_0^{i-1}, on annexe à ce polygone son symétrique par rapport à l'un de ses côtés C; comment choisir ce côté C? Il conviendra de choisir celui des côtés de $P_0''^{-1}$ dont on suppose que la longueur géométrique doit être la plus grande.

Je répète que je n'ai voulu donner ici qu'un exemple et que mon intention n'est pas de recommander ce mode de génération des polygones P_0 de préférence à tout autre. Je crois au contraire qu'il serait plus avantageux de s'arranger de façon que le groupe de la fonction fuchsienne $\theta(z)$ soit toujours un sous-groupe distingué de G.

Dirigé de la sorte, le calcul des coefficients c de l'équation (1) ne laisserait pas d'être assez long si l'on voulait pousser l'approximation très loin. Mais on peut, pour la plupart des applications, se contenter d'une approximation grossière. En effet, si les coefficients c, au lieu d'avoir exactement les valeurs qui conviendraient à l'équation fuchsienne, sont seulement suffisamment voisins de ces valeurs, la variable x n'est plus fonction fuchsienne du rapport z des intégrales, mais elle en est encore fonction kleinéenne, ce qui suffit dans presque tous les cas.

Voici comment ce que l'on vient de voir peut s'appliquer au cas des types non symétriques. Soit

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \psi(x, y)v, \tag{3}$$

$$\theta(x, y) = 0 \tag{4}$$

une équation appartenant à un type fuchsien T. Ce type contient une équation fuchsienne et, si j'appelle t le rapport des intégrales de cette équation fuchsienne, les variables x et y seront des fonctions fuchsiennes de t. Mais nous ne nous proposons pas pour le moment de trouver les coefficients de cette équation fuchsienne elle-même; nous voulons seulement trouver une équation fuchsienne dans un type T' subordonné à T. Pour cela, soit

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n \tag{5}$$

le tableau des points singuliers de l'équation (3) et de ceux de la relation (4). Nous avons vu, au paragraphe XI, qu'il existe toujours une équation fuchsienne

$$\frac{d^2v}{dx^2} = F(x)v, \tag{6}$$

où $F(x)$ est rationnel et qui admet pour points singuliers, non seulement les n quantités données (5), mais encore k autres quantités non données b_1,

$b_2, \ldots, b_k$. De plus, toutes les équations déterminantes ont une racine double.

Or, si l'on se reporte à ce qui a été dit dans ce paragraphe XI, on verra que nous avons formé cette équation (6) à l'aide d'une autre équation fuchsienne dont tous les points singuliers étaient réels et qui, par conséquent, appartenait à un type symétrique. D'ailleurs, nous venons de voir que les coefficients d'une équation fuchsienne contenue dans un type symétrique donné peuvent être regardés comme connus. Il en sera donc de même de ceux de l'équation (6).

Cela posé, soit z le rapport des intégrales de (6); x sera une fonction fuchsienne de z, ayant pour groupe G. D'ailleurs, y sera une fonction uniforme de z. Si g' est le groupe des substitutions de G qui n'altèrent pas y (*cf.* paragraphe précédent), y sera une fonction fuchsienne de z ayant pour groupe g'; le groupe g' engendrera alors une équation fuchsienne qui ne sera autre que

$$\frac{d^2v}{dx^2} = F(x)v \tag{6}$$

avec la relation

$$\theta(x, y) = 0. \tag{4}$$

Cette nouvelle équation fuchsienne [que je regarde comme différente de l'équation (6) non accompagnée de la relation (4)] fera partie d'un type T' subordonné à T et nous avons vu que ses coefficients sont connus. Le problème que nous nous proposions est donc résolu.

XVIII. — Troisième problème; cas général.

Reprenons les équations (3), (4) et (6) du paragraphe précédent. Appelons R_0 le polygone générateur de G, P_0 celui de g'. Le groupe g formé des substitutions de g' qui n'altèrent pas les intégrales de l'équation (3) est un sous-groupe distingué de g'. Il est parfaitement déterminé et il est engendré par une région Q_0 qui joue le rôle de polygone générateur, mais qui a une infinité de côtés. Ces côtés sont conjugués deux à deux de telle façon qu'un côté soit le transformé de son conjugué par une des substitutions du groupe g. Deux points appartenant à ces deux côtés conjugués seront dits *correspondants* lorsque l'un d'eux sera le transformé de l'autre par cette substitution.

Maintenant il s'agit de déterminer les coefficients restés arbitraires dans l'équation (3) de telle façon que cette équation soit fuchsienne. Soient t le rapport des intégrales de l'équation (3) supposée fuchsienne et z le rapport des intégrales de l'équation (6); *il s'agit de déterminer t en fonction de z.*

Je suppose, pour déterminer complètement t, qu'il s'annule en même temps que z. Alors t sera une fonction uniforme de z, inaltérée par les substitutions de g et de telle sorte que

$$\operatorname{mod} t < 1.$$

En outre, t pourra prendre toutes les valeurs dont le module est inférieur à 1.

Ceci étant posé, je dis que l'on a l'identité suivante :

$$(7) \qquad \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} = \sum_i \log \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}.$$

Dans cette identité, les substitutions $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ sont les substitutions de g et le signe Σ se rapporte à toutes les substitutions de ce groupe. Cela posé, considérons une infinité de cercles

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

ayant tous pour centre le point O et dont les rayons $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ vont en croissant avec n et tendent vers 1 quand n croît indéfiniment.

Parmi les termes de la série (7), il y en aura un certain nombre p qui deviendront infinis à l'intérieur du cercle C_n. J'appelle leur somme θ_n. Il s'agit de démontrer que

$$\lim \theta_n = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} \qquad \text{pour} \qquad n = \infty.$$

Je remarque, de plus, que $\log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$, le terme général de la série (7) $\log \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}$, et par conséquent θ_n, sont essentiellement *réels* et *positifs*.

Soit

$$z = \xi + i\eta;$$

soit u_n une fonction réelle de ξ et de η qui, à l'intérieur de C_n, satisfasse à l'équation

$$(8) \qquad \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 u_n}{d\eta^2} = 0,$$

qui soit nulle le long de la circonférence de ce cercle et qui, enfin, soit telle que la différence

$$\log \operatorname{mod} \frac{1}{t} - u_n$$

soit holomorphe à l'intérieur de ce même cercle. Nous aurons les inégalités

$$0 < u_n < \log \bmod \frac{1}{t}$$

et de plus

$$u_n < u_{n+1},$$

et l'on en conclut que u_n est constamment croissant avec n et constamment inférieur à $\log \bmod \frac{1}{t}$, ce qui veut dire que, pour $n = \infty$, u_n tend vers une limite finie que j'appelle u.

J'ai inséré, dans un des derniers *Bulletins de la Société mathématique de France* (Paris, Gauthier-Villars, 1883), un petit travail intitulé *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions*, dans lequel je démontre que si y est une fonction quelconque non uniforme de x, on peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient des fonctions uniformes de z. On n'a qu'à répéter ici la suite des raisonnements que j'ai faits dans ce travail pour voir que u est une fonction analytique de ξ et de η et qu'on peut trouver une seconde fonction v de ξ et de η telle que $u + iv$ soit une fonction analytique monogène de z. On aura d'ailleurs

$$\log \bmod \frac{1}{t} \geqq u.$$

Il s'agit de faire voir que c'est le signe $=$ qu'il faut prendre et non le signe de l'inégalité $>$. Pour cela, étudions de plus près la fonction u. Je dis que cette fonction n'est pas altérée par les substitutions de g. En effet, soit

$$S = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

l'une de ces substitutions et posons

$$u'_n(z) = u_n\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Il y a une autre manière de définir la fonction u'_n. En effet, soit C'_n le cercle transformé de C_n par la substitution inverse de S. La fonction u'_n satisfera comme u_n à l'équation (8); elle sera nulle le long de C'_n et la différence

$$\log \bmod \frac{1}{t} - u'_n$$

sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle.

Nous aurons donc une infinité de cercles

$$C'_1, \quad C'_2, \quad \dots, \quad C'_n, \quad \dots$$

et une infinité de fonctions

$$u'_1, \quad u'_2, \quad \dots, \quad u'_n, \quad \dots$$

engendrées à l'aide de ces cercles comme les u_i le sont à l'aide des cercles C_i. Nous aurons d'ailleurs

$$\lim u'_n(z) = u\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \qquad \text{pour} \qquad n = \infty.$$

Cela posé, quelque grand que soit n, on pourra trouver un cercle C'_p tout entier extérieur à C_n et un cercle C_q tout entier extérieur à C'_p. On aura alors

$$u_n(z) < u'_p(z) < u_q(z).$$

Mais, pour $n = \infty$, on a

$$p = q = \infty.$$

Donc

$$\lim u_n = \lim u_q = u,$$

donc

$$\lim u'_p(z) = u(z)$$

et enfin

$$u(z) = u\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On en conclut

$$v\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = v(z) + \text{const.}$$

Considérons maintenant la fonction

$$V = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} - u$$

dans le plan des t et posons

$$t = \xi_1 + i\eta_1.$$

La fonction V sera une fonction uniforme de t. En effet, quand t, après avoir décrit un contour quelconque, revient à sa valeur initiale, z est revenu à sa valeur initiale ou bien a subi une des substitutions du groupe g. Dans l'un et l'autre cas, la fonction u et par conséquent V n'ont pas été altérées.

D'ailleurs, V satisfait à l'équation

$$(8') \qquad \frac{d^2 V}{d\xi_1^2} + \frac{d^2 V}{d\eta_1^2} = 0.$$

Considérons dans le plan des t le cercle

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \rho^2,$$

ρ étant une constante plus petite que 1.

La fonction V sera holomorphe ([1]) à l'intérieur de ce cercle; d'ailleurs, elle sera, *le long de la circonférence de ce cercle*, toujours comprise entre zéro et $\log\frac{1}{\rho}$. Donc, en vertu d'une propriété bien connue de l'équation (8'), on aura, *à l'intérieur de ce même cercle*,

$$0 < V < \log\frac{1}{\rho}.$$

Mais ρ peut être choisi aussi voisin que l'on veut de l'unité; il faut donc que l'on ait

$$V = 0$$

ou

$$\log \operatorname{mod}\frac{1}{t} = u. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Mais, d'autre part, nous avons les inégalités suivantes, faciles à démontrer :

$$\log \operatorname{mod}\frac{1}{t} > \theta_n > u_n.$$

Or, pour $n = \infty$, $\lim u_n = \log \operatorname{mod}\frac{1}{t}$; on a donc aussi

$$\lim \theta_n = \log \operatorname{mod}\frac{1}{t};$$

ce qui démontre l'identité

$$\log \operatorname{mod}\frac{1}{t} = \Sigma \log \operatorname{mod}\frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}, \tag{7}$$

qui donne t en fonction de z.

Ainsi, en supposant l'existence de l'équation fuchsienne (3) et par conséquent de la fonction t, nous avons démontré que la série (7) est convergente et que la somme de cette série est précisément $\log \operatorname{mod}\frac{1}{t}$. Réciproquement, en

---

([1]) En effet, il ne pourrait y avoir doute à ce sujet que pour certains points isolés qui correspondent à des sommets de R_0 situés sur le cercle fondamental. Mais on sait que si une fonction V est holomorphe à l'intérieur d'un cercle, sauf en certains points isolés pour lesquels on ne sait rien, si elle satisfait à l'équation (8'), si enfin elle est uniforme et qu'elle reste comprise entre deux limites données, cette fonction reste holomorphe, même pour les points isolés en question.

supposant la convergence de la série (7), on pourrait démontrer que la somme de cette série définit le logarithme du module du rapport des intégrales d'une équation fuchsienne appartenant au type T. On démontrerait par conséquent que ce type contient une équation fuchsienne. Mais cette démonstration serait fort longue et serait, d'ailleurs, inutile.

On pourrait toutefois en faire un usage sur lequel je voudrais dire quelques mots. Soit T'' un type tel que T soit subordonné à T''; T', qui est subordonné à T, sera subordonné à T''. Supposons que l'on sache que T'' contient une équation fuchsienne; soient (3') cette équation et t_1 le rapport de ses intégrales. Soit g_1 le groupe des substitutions de G qui n'altèrent pas t_1; g sera un sous-groupe de g_1. Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$(7') \qquad \log \operatorname{mod} \frac{1}{t_1} = \Sigma \log \operatorname{mod} \frac{c_i z + d_i}{a_i z + b_i}$$

$\left(z, \dfrac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)$ étant la substitution générale du groupe g_1. Mais la série (7) peut s'obtenir en supprimant certains termes de la série (7'). Elle est donc convergente et par conséquent le type T contient une équation fuchsienne.

Ainsi tout type subordonné à un autre type qui contient une équation fuchsienne contient lui-même une équation fuchsienne. Ce principe dispenserait, dans un très grand nombre de cas, de l'application de la méthode de continuité.

XIX. — Réflexions sur la convergence de la série précédente.

Voici comment on pourrait chercher à démontrer directement la convergence de la série (7) du paragraphe précédent.

Au paragraphe I du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, nous avons démontré la convergence de la série suivante :

$$\Sigma \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4},$$

où $\left(z, \dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ est la substitution générale d'un groupe fuchsien G. En revanche, toujours dans le cas d'un groupe fuchsien, la série

$$(9) \qquad \Sigma \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2}$$

n'est pas convergente. Mais elle peut l'être quand il s'agit, non plus d'un groupe fuchsien, mais d'un sous-groupe d'indice infini contenu dans un groupe fuchsien, par exemple du groupe g dont nous nous occupons ici.

Je dis que si la série (9) est convergente, il en est de même de la série (7). En effet, soit

$$\rho_i = \operatorname{mod} \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i};$$

nous aurons

$$\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2} = \frac{1 - \rho_i^2}{1 - \operatorname{mod}^2 z}$$

et

$$\frac{\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\log \frac{1}{\rho_i}} = \frac{\rho_i - 1}{\log \rho_i} \frac{\rho_i + 1}{1 - \operatorname{mod}^2 z}.$$

Quand i croît indéfiniment, ρ_i tend vers l'unité et l'on a

$$\lim \frac{\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\log \frac{1}{\rho_i}} = \frac{2}{1 - \operatorname{mod}^2 z}.$$

Ainsi, le rapport d'un terme de la série (9) au terme correspondant de la série (7) tend vers une limite finie, quand l'ordre du terme considéré croît indéfiniment.

Donc, les deux séries sont convergentes ou divergentes en même temps.

Cela posé, soit z un point quelconque intérieur à Q_0. Considérons un cercle C dont la S soit

$$(10) \qquad \frac{\pi}{4}(e^{2R} + e^{-2R} - 2)$$

et qui contienne à son intérieur le point z; soit $F(R)$ la S de la partie de ce cercle qui est intérieure à Q_0. Soit maintenant $f(R)$ la plus petite valeur que puisse prendre $F(R)$ quand on fait varier le cercle C, sa S restant toujours constante, et le point z restant toujours à l'intérieur de C. Alors $f(R)$ sera une fonction continue de R, croissant constamment et indéfiniment avec R.

Soit N le nombre des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ qui sont intérieurs au cercle qui a pour centre le point O et dont la S est précisément égale à l'expression (10). Nous aurons

$$N < \frac{\pi}{4 f(R)}(e^{2R} + e^{-2R} - 2).$$

Soient maintenant $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ une série de valeurs de R, positives et d'ailleurs croissant constamment et indéfiniment avec n. Soit K_n le cercle qui a pour centre le point O et dont le R est R_n. Soit U_n la somme de tous les termes de la série (9) qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ extérieurs à K_{n-1} et intérieurs à K_n.

La série (9) pourra être remplacée par la série

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \tag{11}$$

où nous aurons

$$U_n = K \frac{e^{2R_n} + e^{-2R_n} + 2}{f(R_n)(e^{2R_{n-1}} + e^{-2R_{n-1}} + 2)} < K' \frac{e^{2(R_n - R_{n-1})}}{f(R_n)},$$

K et K′ étant deux constantes convenablement choisies.

Les séries (7), (9) et (11) seront donc convergentes si l'on peut choisir les R_n de telle façon que la série

$$\sum \frac{e^{2(R_n - R_{n-1})}}{f(R_n)} \tag{12}$$

soit convergente. Or, c'est ce qui a lieu si l'intégrale

$$\int_a^\infty \frac{dR}{f(R)} \tag{13}$$

a une valeur finie.

Telle est donc la condition suffisante de la convergence de la série (7). Il faudrait donc chercher à démontrer que l'intégrale (13) est finie, ce qui pourra se faire en étudiant la forme de la région Q_0.

Lorsqu'on l'aura fait, cette démonstration dispensera dans tous les cas de l'application de la méthode de continuité.

XX. — Résumé.

Dans ce Mémoire, après avoir montré à calculer les paramètres du groupe d'une équation linéaire donnée, j'ai exposé quelques propriétés de ces paramètres considérés comme fonctions des coefficients de cette équation, ou inversement de ces coefficients regardés comme fonctions des paramètres du groupe.

J'ai abordé ensuite un autre problème. Considérons une équation de la forme suivante :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

$$\theta(x, y) = 0, \tag{2}$$

où φ et θ sont rationnels en x et y. Je suppose que la relation (2) est donnée, ainsi que les points singuliers de l'équation (1) et l'équation déterminante relative à chacun d'eux, mais que tous les autres coefficients de l'équation (1) restent arbitraires. Je suppose, de plus, que la différence des racines de chaque équation déterminante est nulle ou est une partie aliquote de l'unité. J'appelle z le rapport des intégrales et je considère x comme fonction de z.

J'ai montré qu'on peut disposer, *d'une manière et d'une seule*, de ces coefficients restés arbitraires de telle façon que x soit fonction fuchsienne de z, n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle et j'ai fait voir comment il fallait diriger le calcul des coefficients.

On peut disposer de ces mêmes coefficients *d'une infinité de manières*, de telle façon que x soit fonction kleinéenne de z *n'existant pas dans tout le plan*. Enfin, on peut encore disposer de ces coefficients *d'une manière et d'une seule*, de telle sorte que x soit fonction fuchsienne ou kleinéenne de z, *existant dans toute l'étendue du plan*. Ce dernier point n'a pas été démontré; il faudrait, pour le faire, appliquer la méthode de continuité.

Considérons maintenant une équation linéaire quelconque

$$\frac{d^m v}{dx^m} = \Sigma \varphi_p \frac{d^p v}{dx^p}, \qquad \theta(x, y) = 0,$$

les φ et θ étant rationnels en x et y. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les intégrales de cette équation. On peut trouver une variable z de telle façon que z soit le rapport des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels en x et y, et que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ainsi que x et y soient des fonctions uniformes de z. Il peut arriver d'ailleurs que x, considérée comme fonction de z, soit, ou une fonction rationnelle, ou une fonction doublement périodique, ou une fonction fuchsienne n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle, ou une fonction kleinéenne n'existant pas dans tout le plan, ou enfin une fonction fuchsienne ou kleinéenne existant dans tout le plan. Nous laisserons de côté ce dernier cas.

Alors, ce dernier cas étant laissé de côté, on pourra choisir cette variable z d'une infinité de manières en satisfaisant à toutes les conditions énoncées plus haut. J'appelle $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ les différentes variables z obtenues de la sorte. Mais, parmi toutes ces variables, on peut en choisir une et une seule que j'appelle z_1 et qui est plus simple que toutes les autres. En général, x sera fonction fuchsienne de z_1 (n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle); mais, dans certains cas particuliers, elle pourra en être fonction rationnelle ou doublement périodique. Dans tous les cas, z_1 sera fonction uniforme des autres variables $z_2, \ldots, z_n, \ldots$, ce qui explique pourquoi x, y et les v qui sont uniformes en z_1 sont aussi uniformes en $z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$.

Ainsi, nous pouvons exprimer les intégrales d'une équation linéaire à coefficients algébriques par des fonctions uniformes d'une variable z.

Il reste à étudier les propriétés de ces fonctions uniformes et à les développer en séries. C'est ce que je ferai dans le prochain Mémoire, qui sera le dernier de cette série.

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS ZÉTAFUCHSIENNES (1)

Acta mathematica, t. 5, p. 209-278; 1884.

I. — Introduction.

Considérons une équation linéaire quelconque d'ordre p

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \sum_{k=0}^{k=p-1} \varphi_k(x, y) \frac{d^k v}{dx^k} = 0, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0, \tag{2}$$

où les φ sont des fonctions rationnelles et où la relation (2) est algebrique. Soit maintenant une équation auxiliaire

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \theta(x, y) w, \tag{3}$$

où $\theta(x, y)$ est une fonction rationnelle telle que *tous les points singuliers de l'équation* (1) *appartiennent à l'équation* (3). Soit a un point singulier appartenant à la fois aux deux équations; ce point singulier, regardé comme appartenant à (1), nous conduira à une équation déterminante E de degré p; regardé comme appartenant à (3), il nous conduira à une équation déterminante E′ du second degré. Soit δ la différence des deux racines de E. Je suppose que θ ait été choisi de telle sorte que δ *soit nul* ou bien que, δ *étant une partie aliquote de l'unité, toutes les racines de l'équation* E′ *soient des multiples de* δ. Dans le cas où, *dans le voisinage du point* a, *les intégrales*

(1) Terminé le 30 mai 1884; imprimé du 22 juillet au 11 septembre 1884. N. E. N.

de l'équation (1) *seraient irrégulières, δ devrait être supposé nul.* Il faut enfin que, même pour les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à l'équation (1), δ soit nul ou soit une partie aliquote de l'unité et que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières.

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer θ. Supposons même que l'on choisisse arbitrairement les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à (1) et les équations déterminantes relatives à tous les points singuliers de (3), en satisfaisant toutefois aux diverses conditions que nous venons d'énoncer. Quand ce choix sera fait, θ ne sera pas encore entièrement déterminé, et il restera un certain nombre de paramètres arbitraires. Dans divers Mémoires, antérieurement insérés aux *Acta mathematica*, j'ai démontré qu'on pouvait disposer de ces paramètres :

1° D'une manière et d'une seule, de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle.

2° D'une infinité de manières, de telle façon que x et y soient fonctions kleinéennes de z n'existant pas dans tout le plan.

3° D'une manière et d'une seule, de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes et kleinéennes de z existant dans tout le plan.

Dans tous ces cas, les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions uniformes de z.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que l'équation (3) ait été choisie de telle sorte que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont le centre est 0 et le rayon 1 (1^{re}, 2^e et 6^e familles). Alors les intégrales de l'équation (1) pourront se mettre sous la forme du quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances de z et convergentes tant que z reste intérieur au cercle fondamental; elles sont donc *toujours* convergentes puisque la variable z ne peut jamais sortir de ce cercle.

Envisageons un cas particulier remarquable, celui où δ est nul pour tous les points singuliers de l'équation (3), et où par conséquent x et y sont des fonctions fuchsiennes de la deuxième famille. Dans ce cas, les intégrales de l'équation (1), de même que x et y, sont des fonctions holomorphes de z à l'intérieur du cercle fondamental. Toutes ces fonctions peuvent se développer en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z et *toujours* convergentes, puisque le cercle de convergence est le cercle fondamental et que la variable ne sort jamais de ce cercle. Quant aux coefficients de ces séries, on les calcule aisément par récurrence et par la méthode des coefficients indéterminés, dès que l'on connaît les coefficients des équations (1), (2) et (3).

Ainsi on peut trouver des développements des intégrales qui sont toujours valables, et à ce point de vue il est, dès à présent, permis de dire que nous savons intégrer toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

Mais les développements ainsi obtenus ne sont pas satisfaisants pour l'esprit, parce que les différents termes ne se déduisent pas les uns des autres par une loi simple. Il faut donc chercher à exprimer les intégrales par des séries dont tous les termes soient donnés par une formule générale simple, comme l'étaient par exemple les termes des séries thétafuchsiennes. Tel est l'objet du présent Mémoire. Les séries que je vais chercher à obtenir seront moins propres peut-être au calcul numérique que les développements suivant les puissances de z, mais elles seront plus instructives et nous permettront de pénétrer plus profondément dans l'étude intime des fonctions qu'elles représentent.

Toutefois, dans ce qui va suivre, je serai obligé de supposer que l'équation (1) a toutes ses intégrales *régulières* pour employer l'expression de MM. Fuchs, Thomé et Frobenius. Dans le cas où il y aurait des intégrales irrégulières, rien de ce que je vais dire ne serait plus applicable et je ne sais, au sujet de ces équations irrégulières, rien de plus que ce que j'ai démontré dans les quatre Mémoires antérieurs. J'avais, il est vrai, dans les *Mathematische Annalen*, énoncé un résultat particulier sur ces équations irrégulières, mais ce résultat est inexact; j'avais été trompé par une fausse interprétation d'un théorème de M. Klein dont je ne connaissais pas la démonstration.

II. — Classification des équations linéaires.

Soient

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \sum \varphi_k(x, y)\frac{d^k v}{dx^k} = 0, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^p u}{dx^p} + \sum \varphi'_k(x, y)\frac{d^k u}{dx^k} = 0, \tag{1'}$$

deux équations linéaires d'ordre p à coefficients rationnels en x et y. Je dirai que ces deux équations appartiennent à la même *famille* si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme

$$u = \Lambda\left(F_0 v + F_1\frac{dv}{dx} + F_2\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + F_{p-1}\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}\right),$$

v étant l'intégrale générale de l'équation (1), les F étant des fonctions rationnelles de x et de y, et Λ une fonction quelconque de x et de y. Elles appartiendront à la même *espèce* si la fonction Λ est égale à 1.

Si les deux équations (1) et (1′) sont de la même espèce, elles auront *même groupe*, c'est-à-dire que, lorsque le point (x, y) décrira un contour quelconque sur la surface de Riemann (2), les intégrales de l'équation (1′) subiront précisément la même substitution linéaire que les intégrales de l'équation (1). Si les deux équations sont seulement de la même famille, elles n'ont plus même groupe; mais, quand le point (x, y) décrit un contour quelconque, on obtient les valeurs finales des intégrales de (1′) en appliquant aux valeurs initiales la substitution qu'ont subie les intégrales de (1) et en multipliant ensuite tous les résultats ainsi obtenus *par un même facteur*. Ainsi, les *rapports* des intégrales de (1′) ont subi précisément la même transformation que les rapports des intégrales de (1).

Soit

$$u' = \frac{u}{\Lambda} = \mathrm{F}_0 v + \mathrm{F}_1 \frac{dv}{dx} + \ldots + \mathrm{F}_{p-1} \frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}},$$

u' satisfera à une équation à coefficients rationnels en x et y

$$(1'') \qquad \frac{d^p u'}{dx^p} + \sum \varphi''_k \frac{d^k u'}{dx^k} = 0.$$

On aura alors, en faisant $u = \Lambda u'$ dans (1′) et divisant par Λ,

$$(1''') \qquad \frac{d^p u'}{dx^p} + p \frac{\Lambda'}{\Lambda} \frac{d^{p-1} u'}{dx^{p-1}} + \varphi'_{p-1} \frac{d^{p-1} u'}{dx^{p-1}} + \ldots = 0.$$

Les deux équations (1″) et (1‴) étant irréductibles, doivent être identiques; d'où

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\varphi''_{p-1} - \varphi'_{p-1}}{p}.$$

Il suit de là que la dérivée logarithmique de Λ est rationnelle en x et y. Donc, Λ est une de ces fonctions étudiées par M. Appell et analogues aux fonctions doublement périodiques de deuxième espèce. De plus, quand, sur la surface de Riemann (2), le point analytique (x, y) décrit un cycle ou bien un contour fermé autour d'un point singulier, la fonction Λ est simplement multipliée par un facteur constant.

Étudions maintenant ce qui se passe dans le voisinage d'un point quelconque, et pour cela rappelons les différents cas qui peuvent se présenter, d'après les travaux de M. Fuchs :

1° Il peut arriver que le point singulier $x = a$ que l'on étudie soit *irrégulier*, c'est-à-dire que, parmi les intégrales, il y en ait au moins une qui soit irrégulière et par conséquent développable en série de la forme suivante :

$$(x-a)^{\alpha}\Sigma\, A_n(x-a)^n,$$

où dans la série l'exposant n peut prendre toutes les valeurs entières positives et négatives.

Il est aisé de voir que, si le point $x = a$ est un point irrégulier pour l'équation (1), il sera aussi un point irrégulier pour toutes les équations de la même espèce. Quant aux équations de la même famille, elles auront toutes aussi un point irrégulier au point a [sauf dans le cas particulier où l'on pourrait rendre les intégrales de l'équation (1) régulières en les multipliant par une même fonction μ].

Nous supposerons d'ailleurs, dans tout ce qui va suivre, qu'aucune des équations que nous considérons ne présente de point irrégulier. Ainsi, tous les points singuliers de (1) et de (1') seront supposés *réguliers*.

2° Il peut arriver ensuite que le point singulier $x = a$ soit *logarithmique*, c'est-à-dire que, parmi les intégrales de l'équation (1), il y en ait au moins une de la forme

$$(x-a)^{\alpha}[\varphi + \psi\log(x-a)],$$

φ et ψ étant holomorphes. Si le point $x = a$ est un point logarithmique pour l'équation (1), il sera aussi un point logarithmique pour toutes les équations de la même famille.

3° Il peut arriver enfin que le point $x = a$ soit un point singulier *ordinaire* ou un point *non singulier*. Dans ce cas, il y a p intégrales de la forme suivante :

$$(x-a)^{\lambda_1}\varphi_1, \quad (x-a)^{\lambda_2}\varphi_2, \quad \ldots, \quad (x-a)^{\lambda_p}\varphi_p,$$

les φ étant holomorphes. Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les racines d'une équation facile à former et qu'on appelle *équation déterminante*. *En général*, lorsque cette équation a une racine double ou deux racines ne différant que d'un nombre entier, on a affaire à un point singulier logarithmique; il peut arriver cependant, si certaines conditions sont remplies, que le point singulier soit ordinaire, quoique la différence de deux racines de l'équation déterminante soit un entier.

Il peut se faire alors :

1° Ou bien que l'équation aux différences des racines de l'équation déterminante n'ait pas toutes ses racines entières, auquel cas le point $x = a$ est un point singulier *proprement dit*.

2° Ou bien que les p racines de l'équation déterminante soient de la forme

$$k + h_1, \quad k + h_2, \quad \ldots, \quad k + h_p,$$

k étant une quantité non entière et $h_1, h_2, \ldots, h_p$ étant des entiers. Alors $x = a$ (s'il n'est pas logarithmique, ce que je suppose) est un point *à apparence singulière*. [Cf. *Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. 4, p. 217).]

3° Ou bien que les p racines soient entières. Alors, pour $x = a$, toutes les intégrales sont holomorphes ou méromorphes; ce point est un point singulier *polaire* (s'il n'est pas logarithmique, ce que je suppose toujours).

4° Enfin, si les p racines en question sont précisément

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad (p-1),$$

on a affaire à un point *non singulier*.

Que se passera-t-il dans le voisinage d'un point non logarithmique si l'on passe de l'équation (1) à une équation de la même famille ou de la même espèce ?

Soit $x = a$ un point non logarithmique; considérons trois équations linéaires (1), (1') et (1''), la seconde de la même espèce que (1), la troisième de la même famille que (1). Soient (3), (3') et (3'') les équations déterminantes relatives à ces trois équations différentielles et au point $x = a$. Soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

les racines de (3). Celles de (3') seront

$$\alpha_1 + h_1, \quad \alpha_2 + h_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p + h_p$$

et celles de (3'') seront

$$\beta + \alpha_1 + h_1, \quad \beta + \alpha_2 + h_2, \quad \ldots, \quad \beta + \alpha_p + h_p,$$

β étant quelconque et les h étant des entiers positifs ou négatifs.

D'où les conséquences suivantes : Si le point $x = a$ est un point singulier *proprement dit* pour l'équation (1), il en sera un aussi pour les équations (1') et (1'). Si ce point est un point *non singulier* pour l'équation (1), il sera non singulier ou polaire pour (1') et il sera non singulier, polaire ou à apparence singulière pour (1'').

Donc, deux équations de la même famille ont les mêmes points singuliers proprement dits (logarithmiques ou non logarithmiques). Mais les points à apparence singulière (et en particulier les points polaires) peuvent être différents.

Supposons maintenant que les deux équations (1) et (1') soient dépourvues de second terme, c'est-à-dire que

$$\varphi_{p-1} = \varphi'_{p-1} = 0.$$

Dans ce cas, la somme des racines de l'équation déterminante est égale à

$$\frac{p(p-1)}{2}.$$

Supposons que ces racines soient toutes entières sans être précisément égales à

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad (p-1),$$

c'est-à-dire que nous ayons affaire à un point singulier polaire. La somme des racines doit être égale à la somme des $p-1$ premiers nombres. D'ailleurs deux racines ne peuvent être égales, car il est aisé de constater que l'équation déterminante relative à un point singulier non logarithmique ne peut avoir deux racines égales. Donc une au moins des racines devra être négative; donc le point $x = a$ est un pôle pour une des intégrales de l'équation (1), ce qui justifie le nom de *point polaire* donné à cette sorte de point singulier.

Envisageons d'abord des équations du second ordre. La somme des racines de l'équation déterminante est égale à 1; leur différence est égale à 1 pour les points non singuliers, à un nombre entier plus grand que 1 pour les points à apparence singulière, à un nombre non entier pour les points singuliers non logarithmiques, à 0, à 1 ou à un entier pour les points logarithmiques.

Nous ferons les conventions suivantes : Si, pour un point à apparence singulière, cette même différence est égale à $n+1$, nous dirons que nous avons affaire à un point à apparence singulière du $n^{\text{ième}}$ ordre, ou encore à n points à apparence singulière confondus. Si, pour un point singulier logarithmique ou non, cette même différence, dont nous pouvons toujours supposer la partie réelle positive, est égale à $n + \lambda$, λ étant un nombre dont la partie réelle λ_1

satisfait aux inégalités

$$0 \leqq \lambda_1 < 1,$$

nous dirons que nous avons affaire à un point singulier et à n points à apparence singulière confondus.

Grâce à ces conventions, l'énoncé du théorème qui va suivre est un peu simplifié. Je dis que, si l'équation (1) a un nombre pair de points à apparence singulière, il en sera de même de l'équation (1') et inversement. En effet, soit

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi v = 0 \tag{1}$$

l'équation (1), posons

$$u = \Lambda\left(F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx}\right).$$

Soient Λ_0, Λ_1 et M des fonctions telles que

$$\Lambda_0 F_0 = \frac{dM}{dx}, \qquad \Lambda_0 F_1 = M, \qquad \Lambda = \Lambda_0 \Lambda_1,$$

d'où

$$u = \Lambda_1 \frac{d}{dx}(Mv).$$

Il résulte de là que le passage d'une équation du second ordre à une autre de même famille peut toujours être obtenu par la série d'opérations suivantes :

1° Multiplier la fonction inconnue par un facteur convenable.
2° La différentier.
3° La multiplier de nouveau par un facteur convenable.

La première et la dernière de ces trois opérations ne modifient pas la différence des racines de l'équation déterminante. La seconde opération seule peut altérer cette différence. Voici comment : je suppose d'abord que l'on ait, pour la fonction inconnue v, le développement suivant :

$$v = \lambda(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots) + \mu(B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots),$$

λ et μ étant des constantes d'intégration ; ce développement montre de plus que les racines de l'équation déterminante sont 0 et 1. Si l'on a

$$\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = h,$$

il viendra, pour le développement de $\frac{dv}{dx}$,

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(3\mathrm{D}x^2 + \ldots) + (\mu + \lambda h)(\mathrm{B}' + 2\mathrm{C}'x + 3\mathrm{D}''x^2 + \ldots),$$

ce qui montre que les racines de l'équation déterminante sont devenues o et 2. Ainsi, la différentiation peut faire apparaître de nouveaux points à apparence singulière, mais elle en peut aussi faire disparaître. Soit, en effet,

$$v = \lambda(\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \ldots) + \mu(\mathrm{C}'x^2 + \mathrm{D}'x^3 + \ldots)$$

le développement de v. On voit que l'équation déterminante a pour racines o et 2. Si l'on différentie, il vient

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(\mathrm{B} + 2\mathrm{C}x + \ldots) + \mu(2\mathrm{C}'x + 3\mathrm{D}'x^2 + \ldots),$$

où l'on voit que les racines sont devenues o et 1. En général, toutes les fois que l'une des racines de l'équation déterminante sera nulle, sans que l'autre soit égale à 1, la différentiation fera augmenter ou diminuer d'une unité la différence de ces racines, et elle ne pourra la faire varier si l'une des racines n'est pas nulle.

Soit

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi_1 \frac{dv}{dx} + \varphi_0 v = 0 \tag{4}$$

l'équation à laquelle satisfait v; sa dérivée

$$w = \frac{dv}{dx}$$

satisfera à

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_0'}{\varphi_0}\right)\frac{dw}{dx} + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1 \varphi_0'}{\varphi_0} + \varphi_1'\right) w = 0. \tag{5}$$

Il s'est introduit par la différentiation de nouveaux points à apparence singulière, définis par l'équation

$$\varphi_0 = 0.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, que l'infini soit un point singulier ordinaire, d'où il résulte que φ_0 doit être une fonction rationnelle de degré -2. La fonction φ_0 aura $2d + s$ infinis, parmi lesquels d infinis doubles et s infinis simples. Elle aura k zéros, de sorte que

$$k = 2d + s - 2$$

ou

$$k \equiv s \pmod 2.$$

A chaque infini simple de φ_0 correspond une équation déterminante dont une des racines est nulle; par conséquent, par la différentiation la différence de ces racines diminuera ou augmentera d'une unité. D'après les conventions faites plus haut, il disparaîtra ou il s'introduira un point à apparence singulière. Ainsi, par le fait des s infinis simples de φ_0, il s'introduira σ pareils points, où

$$\sigma \equiv s \pmod 2.$$

Par le fait des k zéros de φ_0, il s'introduira k points à apparence singulière, de sorte qu'il s'en est introduit en tout

$$k + \sigma \equiv 0 \pmod 2.$$

Donc, la parité du nombre des points à apparence singulière n'a pas varié.

III. — Réduction des équations linéaires.

Parmi les équations d'une même famille, il en est une que l'on peut regarder comme plus simple que toutes les autres. On peut se proposer, étant donnée une équation linéaire, de trouver la transformation qui la *réduira* à l'équation la plus simple de sa famille.

Afin d'éviter des complications inutiles et qui ne touchent pas au fond des choses, je traiterai un cas particulier.

Je supposerai que l'équation à réduire est du second ordre et que ses coefficients sont rationnels en x, et j'écrirai cette équation sous la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi_0 v = 0. \tag{1}$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les points singuliers; $b_1, b_2, \ldots, b_h$ les points à apparence singulière; je supposerai que les racines des équations déterminantes relatives à ceux-ci soient $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Réunissons dans une même classe toutes les équations de la forme (1) où les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_k, \infty$ sont les mêmes avec les mêmes équations déterminantes, et où la parité du nombre h de points apparents est la même. Chaque classe contiendra une infinité de familles. Il y aura un certain nombre de fonctions des coefficients des équations d'une même classe qui auront la même valeur pour celles de ces équations qui appartiennent à une même famille. Ce sont des invariants qui définissent la famille et différents de ceux qui définissent la classe. Combien y a-t-il de pareils invariants ? En d'autres termes, combien faut-il de conditions pour que deux équations, qui sont déjà supposées appartenir à une même classe, appartiennent aussi à une même famille ?

Soit θ une fonction rationnelle quelconque de x. Posons

$$-\varphi_0+\psi=\theta^2-\frac{d\theta}{dx}.$$

La fonction

$$u=\frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\theta v+\frac{dv}{dx}\right)$$

satisfera à l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2}+u\left(-\frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi}+\frac{3}{4}\frac{\psi'^2}{\psi^2}-\frac{\psi'\theta}{\psi}+2\theta'-\varphi_0\right)=0. \tag{2}$$

Le coefficient de u, que nous appellerons Φ pour abréger, admet comme infinis doubles :

1° Les infinis de φ_0, qui sont en général des infinis de ψ;

2° Les zéros de ψ.

Le rapport des intégrales de (1) subit certaines substitutions linéaires formant un groupe G lorsque la variable x décrit certains contours dans son plan. Si les équations (1) et (2) appartiennent à la même famille, le rapport des intégrales de (2) subira *les mêmes* substitutions linéaires formant le même groupe G, et réciproquement, si ces deux rapports subissent les mêmes substitutions, les deux équations appartiennent à la même famille.

Il résulte de là que le nombre cherché des invariants est au plus égal au nombre des paramètres arbitraires du groupe G. Or, ce groupe est dérivé de k substitutions, ce qui fait $3k$ paramètres, puisque chaque substitution dépend de 3 paramètres. Mais les équations (1) et (2) sont assujetties à appartenir à une classe déterminée; on connaît les multiplicateurs de ces k substitutions correspondant à des contours infiniment petits décrits autour de chaque point singulier et celui de la substitution qui correspond à un contour infiniment grand. Il reste $2k-1$ paramètres. Mais, si l'on remarque que deux groupes G et $\sigma^{-1}G\sigma$, où σ est une substitution linéaire quelconque, ne doivent pas être regardés comme distincts, on verra qu'il n'y a en réalité que $2k-4$ paramètres arbitraires.

Ainsi, le nombre des invariants ne peut dépasser $2k-4$. Il sera précisément égal à ce nombre, si l'on peut trouver dans chaque classe une équation admettant un groupe donné, sans que les coefficients de ce groupe soient assujettis à aucune relation d'égalité. Comme nous démontrerons plus loin ce théorème, nous admettrons que le nombre des invariants est $2k-4$ en nous dispensant de faire le calcul direct, qui ne présente d'ailleurs pas de difficulté.

L'équation *réduite*, c'est-à-dire la plus simple des équations d'une famille donnée, dépendra donc encore de $2k-4$ paramètres. Quel est donc le minimum des points à apparence singulière que l'on peut lui attribuer? Supposons que l'équation (2) soit réduite. Elle admettra k points singuliers et h' points apparents; la fonction Φ qui est de degré -2 a donc $k+h'$ infinis doubles et dépend par conséquent de $3k+3h'-1$ coefficients. Mais il y a entre eux $2k+2h'+1$ relations qui expriment que l'équation appartient à la classe considérée et que les h' points en question sont bien des points à apparence singulière. Il reste donc $k+h'-2$ paramètres. Or, ce nombre doit être au moins égal à $2k-4$. On doit donc avoir

$$h' \geq k-2.$$

Mais on a de plus

$$h \equiv h' \pmod 2;$$

le nombre minimum des points apparents est donc $k-2$ si k et h sont de même parité et $k-1$ si k et h sont de parité différente. Dans le premier cas, il n'y a dans la famille qu'un nombre fini d'équations n'ayant que $k-2$ points apparents et l'on peut prendre l'une d'elles comme équation réduite. Dans le second cas, au contraire, il y a une infinité d'équations de la même famille n'ayant que $k-1$ points apparents.

On peut encore prendre l'une d'elles pour équation réduite, mais cela ne suffit pas pour la déterminer. Nous achèverons de la définir en lui imposant cette condition que l'un des points apparents devra avoir une valeur déterminée, par exemple 0.

Voici maintenant comment on peut arriver à réduire l'équation linéaire (1). Nous supposerons d'abord que k et h sont de même parité. Soient alors

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k$$

les points singuliers,

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_h$$

les points à apparence singulière.

La fonction φ_0 pourra s'écrire

$$\sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{B_i}{x-a_i} + \sum \frac{C_i}{(x-b_i)^2} + \sum \frac{D_i}{x-b_i}.$$

On aura d'ailleurs

$$(3) \qquad C_i = +\frac{3}{4}, \qquad D_i^2 + E_i = 0,$$

en supposant, pour fixer les idées, que tous les points apparents soient distincts entre eux et distincts des points singuliers. Dans ces équations, E_i représente le résultat de la substitution de b_i à la place de x dans la fonction

$$\varphi_0 - \frac{C_i}{(x-b_i)^2} - \frac{D_i}{x-b_i}.$$

Posons maintenant

$$\psi = \frac{\alpha(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_h)(x-d_1)(x-d_2)\ldots(x-d_{k-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_k)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\ldots(x-c_m)^2},$$

où α, les d et les c sont jusqu'à nouvel ordre indéterminés et où $2m = h-k$; il est clair que m ne peut être négatif, car si h était plus petit que k la réduction serait terminée.

Nous allons disposer des indéterminées de telle façon que la fonction

$$R = -\varphi_0 + \psi,$$

qui est rationnelle de degré -2, puisse se mettre sous la forme

$$\theta^2 - \frac{d\theta}{dx},$$

θ étant rationnel et de degré -1.

Soient en général $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les infinis de θ; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ les résidus,

$$\theta = \sum \frac{\mu_i}{x-\lambda_i}.$$

Soient θ_i et θ'_i le résultat de la substitution de λ_i à la place de x dans les fonctions

$$\theta - \frac{\mu_i}{x-\lambda_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{dx} + \frac{\mu_i}{(x-\lambda_i)^2};$$

il viendra

$$R = \theta^2 - \frac{d\theta}{dx} = \sum \frac{\mu_i^2+\mu_i}{(x-\lambda_i)^2} + 2\sum \frac{\theta_i \mu_i}{x-\lambda_i}.$$

Si l'on a

$$R = \sum \frac{M_i}{(x-\lambda_i)^2} + \sum \frac{N_i}{x-\lambda_i},$$

on devra donc avoir

$$M_i = \mu_i^2 + \mu_i,$$

ce qui détermine les μ_i et par conséquent la fonction θ. On peut donc choisir arbitrairement les M_i et les λ_i mais non les N_i, d'où il résulte que, pour qu'une fonction rationnelle de degré -2 ayant p infinis doubles puisse se mettre sous la forme $\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$, il faut $p-1$ conditions; la $p^{\text{ième}}$ condition qui achèverait de définir les p quantités N_i, c'est que leur somme doit être nulle.

Dans le cas particulier qui nous occupe, il y a $m+h+k$ infinis doubles; il nous faut donc satisfaire à

$$m+h+k-1 = 3m+2k-1$$

conditions et pour cela nous ne disposons que de $m+k-1$ arbitraires. Il faut donc voir si h de nos conditions sont remplies d'elles-mêmes. Pour cela, supposons qu'on retranche de R les deux termes qui deviennent infinis pour $x=\lambda_i$ et que l'on appelle R_i le résultat de la substitution de λ_i dans les termes restants; il est aisé de vérifier que l'on a

$$(4) \qquad R_i = \theta_i^2 - (2\mu_i - 1)\theta_i.$$

Parmi les infinis de R, considérons les points $b_1, b_2, \ldots, b_h$, par exemple le point b_i. Soit donc $b_i = \lambda_i$; il viendra

$$M_i = 3C_i = +\frac{3}{4}, \qquad \mu_i^2 + \mu_i = \frac{3}{4}.$$

Parmi les deux valeurs qui satisfont à cette condition, nous choisirons

$$\mu_i = \frac{1}{2},$$

de sorte que l'équation (4) devient

$$(4') \qquad R_i = \theta_i^2.$$

On a d'autre part

$$N_i = 2\mu_i\theta_i = \theta_i, \qquad N_i = -D_i,$$

de sorte que la condition (4') se réduit à

$$(4'') \qquad R_i = D_i^2.$$

Mais, pour $x = b_i = \lambda_i$, la fonction ψ s'annule, de sorte qu'il reste simplement

$$R_i = -E_i$$

et

$$E_i + D_i^2 = 0,$$

de sorte que la condition (4'') se réduit à l'une des équations (3) et est satisfaite d'elle-même.

On pourra donc disposer des $m+k-1$ paramètres arbitraires pour satisfaire aux $m+k-1$ conditions restantes. On envisagera ensuite la fonction

$$u = \frac{1}{\sqrt{\Psi}}\left(\theta v + \frac{dv}{dx}\right),$$

qui satisfera à l'équation (2). Cette équation n'admettra plus les points à apparence singulière $b_1, b_2, \ldots, b_k$; car, pour le point b_i, par exemple, supposons que l'on envisage le développement de u suivant les puissances croissantes de $x-b_i$. Le développement de v commencera (pour l'intégrale générale) par un terme de degré $-\frac{1}{2}$; celui de $\frac{dv}{dx}$ par un terme de degré $-\frac{3}{2}$; celui de θ par un terme de degré -1 et de coefficient $\mu_i = \frac{1}{2}$. Le développement de $\theta v + \frac{dv}{dx}$ devrait donc commencer par un terme de degré $-\frac{3}{2}$; mais les deux premiers termes se détruisent et il reste un terme de degré $+\frac{1}{2}$. D'un autre côté, le développement de $\frac{1}{\sqrt{\Psi}}$ commence par un terme de degré $-\frac{1}{2}$ et par conséquent celui de u par un terme de degré 0. Le point apparent b_i a donc disparu. En revanche, les points $d_1, d_2, \ldots, d_{k-2}$ sont devenus des points à apparence singulière. L'équation (2) n'a donc que $k-2$ points à apparence singulière: elle est donc réduite.

Voici maintenant une méthode plus simple pour déterminer la fonction θ. On pose

$$\theta = \sum \frac{P_i}{x-a_i} + \sum \frac{1}{2(x-b_i)} + \sum \frac{Q_i}{x-c_i}.$$

Dans cette expression entrent $2m+k=h$ indéterminées, à savoir: les k résidus P_i, les m résidus Q_i et les m infinis c_i. On les déterminera par les h conditions

$$(5) \qquad \theta_i = -D_i.$$

On peut ramener ces équations à être linéaires de la façon suivante: Soit Π le produit des $k+h$ facteurs $x-a_i$ et $x-b_i$. Posons

$$\Pi_i = \frac{\Pi}{x-b_i}, \qquad \Pi'_i = \frac{d\Pi_i}{dx}.$$

Soient π_i et π'_i ce que deviennent H_i et H'_i quand on y fait $x = b_i$. Posons

$$\theta = \frac{H}{HK},$$

H et K étant des polynomes de degré $m + h - k - 1$ et m en x. Soient H_i, K_i, H'_i et K'_i ce que deviennent ces deux polynomes et leurs dérivées quand on y fait $x = b_i$. Nous aurons les relations

$$2 H_i = \pi_i K_i,$$

exprimant que le résidu relatif à l'infini $x = b_i$ est égal à $\frac{1}{2}$. D'autre part, les relations (5) deviennent

$$2 H'_i - K'_i \pi_i - K_i \pi'_i + 2 D_i \pi_i K_i = 0.$$

Toutes ces relations sont linéaires par rapport aux coefficients des polynomes H et K et suffisent pour les déterminer. D'où cette conclusion importante qu'il n'y a en général qu'une seule équation réduite dans une famille.

Supposons maintenant que h et k ne soient pas de même parité.

Nous poserons

$$\psi = \frac{\alpha(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_h)x(x - d_1)(x - d_2)\ldots(x - d_{k-2})}{(x - a_1)^2(x - a_2)^2\ldots(x - a_k)^2(x - c_1)^2(x - c_2)^2\ldots(x - c_m)^2},$$

où $2m = h - k$. Nous disposerons des $m + k - 1$ indéterminées α, d et c de façon que la fonction

$$R = -\varphi_0 + \psi$$

puisse se mettre sous la forme

$$\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}.$$

On verrait, comme dans le cas précédent, que cela est toujours possible et, en faisant à l'aide des fonctions ψ et θ la même transformation que plus haut, on arriverait à une équation (2) qui n'aurait plus d'autres points à apparence singulière que

$$0, \quad d_1, \quad d_2, \quad \ldots, \quad d_{k-2},$$

et qui serait par conséquent réduite.

On peut employer la même analyse pour arriver à la réduction d'une équation linéaire :

1° Lorsque celle-ci est d'ordre supérieur au second;

2° Lorsque ses coefficients sont algébriques au lieu d'être rationnels.

Puisqu'il n'y a dans une même famille qu'un nombre fini de réduites, les coefficients numériques de l'équation réduite définissent la famille. Ce sont là les invariants dont il a été question plus haut.

IV. — Fonctions zétafuchsiennes.

Soit g un groupe fuchsien quelconque que nous supposerons de la première, de la deuxième ou de la sixième familles. Soient

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_p$$

p fonctions de z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Supposons que, lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, la fonction Z_i se change en

$$\Sigma a_{ik} Z_k,$$

c'est-à-dire en une combinaison linéaire des p fonctions Z.

Les substitutions

$$(Z_i, \Sigma a_{ik} Z_k)$$

formeront évidemment un groupe G isomorphe à g et que nous appellerons *zétafuchsien*. Supposons maintenant que ces fonctions Z soient uniformes et n'aient à l'intérieur du cercle fondamental d'autre singularité que des pôles.

Lorsque le groupe g est de la deuxième ou de la sixième famille, son polygone générateur R_0 aura un ou plusieurs sommets sur la circonférence du cercle fondamental. Soit α l'un de ces sommets. Je supposerai que les fonctions Z n'ont dans le voisinage du point $z = \alpha$ que des singularités logarithmiques analogues à celles que présentent, dans le voisinage de ce même point, les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g. Entrons dans quelques détails à ce sujet : les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g sont holomorphes en e^t où $t = \frac{\beta}{z - \alpha}$ et où β est un coefficient convenablement choisi. (Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, *Acta mathematica*, t. I, p. 215 [1].) Dans le voisinage de ce même point singulier, les fonctions Z seront de la forme

$$P_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2 + \ldots + P_q e^{\lambda_q t} \Phi_q,$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_q$ sont holomorphes en e^t, où les λ sont des constantes et

[1] Ce Tome, p. 188.

où P_1, P_2, ..., P_q sont des polynomes entiers en t de degrés n_1, n_2, ..., n_q [1].

On a d'ailleurs

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p - q.$$

Lorsque toutes ces conditions sont remplies, on dit que les fonctions Z sont des fonctions zétafuchsiennes.

Reprenons les équations (1) et (2) du paragraphe I et l'équation auxiliaire (3) de ce même paragraphe. Supposons que l'on ait choisi cette dernière équation de façon que x et y soient des fonctions fuchsiennes $f(z)$ et $f_1(z)$ du rapport z des intégrales. Supposons de plus que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières. Si nous substituons, à la place de x et de y, $f(z)$ et $f_1(z)$, les intégrales de cette équation deviendront des fonctions zétafuchsiennes de z.

Cela justifie la dénomination que j'ai adoptée. On sait en effet qu'on ne peut pas obtenir toutes les intégrales elliptiques par le procédé de l'inversion, qui ne donne que les intégrales de première espèce. Pour calculer les intégrales de seconde espèce, on y substitue à la place de x une fonction elliptique de z et l'intégrale cherchée devient une fonction zéta de z qui augmente d'une constante lorsque la variable s'accroît d'une période. De même ici, le procédé de l'inversion ne permet d'intégrer que les équations fuchsiennes. Pour les autres équations linéaires, il faut, comme nous venons de le voir, substituer à la place de x une fonction fuchsienne de z. Les intégrales deviennent alors des fonctions zétafuchsiennes de z qui subissent une substitution linéaire lorsque la variable subit une transformation du groupe g. Les fonctions zétafuchsiennes jouent donc ici le même rôle que les fonctions zéta dans la théorie des transcendantes elliptiques.

Cela posé, soient

$$x = f(z), \qquad y = f_1(z) \qquad \text{et} \qquad Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

deux fonctions fuchsiennes et un système de fonctions zétafuchsiennes admettant le groupe fuchsien g et le groupe zétafuchsien G (les fonctions x et y

---

[1] P_1, P_2, ..., P_q sont des fonctions de la forme

$$P_i = \sum_{s=0}^{s=n_i} t^s \varphi_{is}(e^t)$$

où les $\varphi_{is}(x)$ sont holomorphes en x au voisinage de $x = 0$. A. E. N.

sont liées par une relation algébrique). Il est aisé d'en déduire une infinité de systèmes de fonctions zétafuchsiennes admettant les mêmes groupes. Soient en effet $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_q$, $q+1$ fonctions fuchsiennes admettant le groupe g. Les fonctions

$$F_0 Z_1 + F_1 \frac{dZ_1}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_1}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_1}{dx^q},$$
$$F_0 Z_2 + F_1 \frac{dZ_2}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_2}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_2}{dx^q},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F_0 Z_p + F_1 \frac{dZ_p}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_p}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_p}{dx^q}$$

formeront un système zétafuchsien.

Cherchons maintenant quelle est l'expression la plus générale d'un système zétafuchsien admettant les groupes g et G. Soit

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_p$$

un pareil système. Posons pour abréger

$$Z_i^q = \frac{d^q Z_i}{dx^q}.$$

Considérons la matrice

$$\| Z, Z', Z'', \ldots, Z^{p-1}, T \|.$$

Pour abréger, nous n'avons écrit qu'une ligne de cette matrice; mais il faut supposer qu'elle a p lignes et que, dans la $i^{\text{ème}}$ ligne, chacune des lettres que j'ai écrites sans indice est affectée de l'indice i. Soit maintenant $(-1)^k \Delta_{k-1}$ le déterminant que l'on obtient en supprimant dans cette matrice la $k^{\text{ième}}$ colonne; on aura les relations

$$T_i = -\frac{1}{\Delta_p}(\Delta_0 Z_i + \Delta_1 Z'_i + \Delta_2 Z''_i + \ldots + \Delta_{p-1} Z_i^{p-1}).$$

Lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, les fonctions Z_i, Z'_i, $\ldots$, T_i subissent une même substitution S appartenant au groupe G, à savoir

$$(Z_i, \Sigma a_{ik} Z_k), \quad (Z'_i, \Sigma a_{ik} Z'_k), \quad \ldots, \quad (T_i, \Sigma a_{ik} T_k).$$

Tous les déterminants $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ sont alors multipliés par un même facteur, c'est-à-dire par le déterminant

$$\Sigma \pm a_{ii}.$$

Les rapports $\frac{\Delta_k}{\Delta_p}$ ne sont donc pas altérés; ce sont donc des fonctions fuchsiennes de z, c'est-à-dire des fonctions rationnelles de x et de y. Voici donc l'expression générale cherchée :

$$(4) \qquad T_i = F_0 Z_i + F_1 Z'_i + F_2 Z''_i + \ldots + F_{p-1} Z_i^{p-1},$$

les F étant rationnels en x et y.

Les fonctions Z_i^p formant un système zêtafuchsien, on aura

$$(5) \qquad Z_i^p + F_{p-1} Z_i^{p-1} + \ldots + F_1 Z'_i + F_0 Z_i = 0,$$

les F étant rationnels en x et y. Ainsi, envisageons des fonctions zêtafuchsiennes quelconques

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_p$$

ayant pour groupes G et g. Considérons-les comme fonctions de $x = f(z)$, où $f(z)$ est une fonction fuchsienne admettant le groupe g.

Elles satisferont toujours à une équation linéaire à coefficients algébriques.

Il résulte de là que les fonctions T_i satisferont comme les fonctions Z_i elles-mêmes à une pareille équation. Mais, en vertu de la relation (4), l'équation à laquelle satisfait T_i et celle à laquelle satisfait Z_i appartiennent à la même espèce.

Ainsi, toutes les fonctions zêtafuchsiennes qui ont même groupe satisfont à des équations linéaires à coefficients rationnels en x et en y et qui sont toutes de la même espèce.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que le déterminant

$$\Sigma \pm a_{ii}$$

de toutes les substitutions du groupe G est égal à 1. Cette hypothèse est permise. En effet, on peut toujours, dans une équation linéaire d'ordre p, faire disparaître le coefficient du terme en

$$\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}},$$

et, si ce terme est nul, toutes les substitutions du groupe de l'équation ont leur déterminant égal à 1.

V. — Développements en séries.

Supposons d'abord que le groupe fuchsien g soit de la première famille.

Soit s_i une substitution de ce groupe

$$s_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Soit S_i la substitution correspondante du groupe G. Ce sera une substitution linéaire de déterminant 1 que l'on pourra représenter par le tableau de ses coefficients :

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{p1} & a'_{p2} & \dots & a'_{pp} \end{vmatrix}.$$

La substitution S_i^{-1} sera alors représentée par le tableau

$$\begin{vmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1p} \\ A'_{21} & A'_{22} & \dots & A'_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A'_{p1} & A'_{p2} & \dots & A'_{pp} \end{vmatrix},$$

où les A sont les mineurs du déterminant des a.

Nous allons considérer p fonctions rationnelles

$$H_1, \quad H_2, \quad \dots, \quad H_p$$

et p séries

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \dots, \quad \xi_p,$$

et nous adopterons les notations suivantes :

$$z s_i = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i},$$

$$H_\mu S_i = \Sigma a'_{\mu\nu} H_\nu,$$

$$\xi_\mu S_i = \Sigma a'_{\mu\nu} \xi_\nu.$$

Les séries ξ s'écriront alors

$$\xi_\mu(z) = \sum_i [H_\mu(z s_i)] S_i^{-1} \left[\frac{d(z s_i)}{dz}\right]^m. \tag{1}$$

Supposons que l'on ait démontré que ces séries sont absolument convergentes ; voyons quelles seront leurs propriétés. On aura

$$\xi_\mu(z) = \sum_i [H_\mu(z s_k s_i)] S_i^{-1} S_k^{-1} \left[\frac{d(z s_k s_i)}{dz}\right]^m$$

et de plus

$$\xi_\mu(zs_k) = \sum_i [\mathrm{H}_\mu(zs_k s_i)] \mathrm{S}_i^{\,1} \left[\frac{d(zs_k s_i)}{d(zs_k)}\right]^m,$$

d'où

$$[\xi_\mu(z)] \mathrm{S}_k = \sum_i [\mathrm{H}_\mu(zs_k s_i)] \mathrm{S}_i^{\,1} \left[\frac{d(zs_k s_i)}{dz}\right]^m$$

et enfin

$$\xi_\mu(zs_k) = [\xi_\mu(z)] \mathrm{S}_k \left[\frac{dz}{d(zs_k)}\right]^m. \tag{2}$$

Écrivons la série (1) et la relation (2) avec les notations ordinaires, il vient

$$\xi_\mu = \sum_i \sum_\nu \mathrm{A}_{\mu\nu}^i \mathrm{H}_\nu\left(\frac{\alpha_i z - \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

et

$$\xi_\mu\left(\frac{\alpha_k z - \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \Sigma_\nu a_{\mu\nu}^k \xi_\nu(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

Il reste à rechercher si les séries (1) sont absolument convergentes. Pour cela, envisageons la série

$$\lambda_{\mu\nu} = \Sigma_i \bmod [\mathrm{A}_{\mu\nu}^i(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}],$$

et cherchons pour quelles valeurs de m cette série est convergente.

Nous allons donc chercher avec quelle rapidité croissent les coefficients $\mathrm{A}_{\mu\nu}^i$. A cet effet, envisageons les substitutions fondamentales du groupe G et leurs inverses. Si h est le nombre des substitutions fondamentales, nous aurons en tout $2hp^2$ coefficients. Soit M le plus grand module de ces $2hp^2$ coefficients.

Soit maintenant S_i une substitution quelconque du groupe G dont tous les coefficients aient leurs modules plus petits que N; soit d'ailleurs Σ une des substitutions fondamentales ou une de leurs inverses. Les modules de tous les coefficients de $\mathrm{S}_i\Sigma$ seront plus petits que $p\mathrm{MN}$; car chacun de ces coefficients est une somme de p monomes et chacun de ces monomes est le produit d'un coefficient de S_i par un coefficient de Σ.

Cela posé, une substitution S_i quelconque pourra toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\mathrm{S}_i = \Sigma_1^{\alpha_1}\Sigma_2^{\alpha_2}\ldots\Sigma_q^{\alpha_q}. \tag{3}$$

Chacune des lettres $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_q$ désigne une des substitutions fondamentales ou une de leurs inverses, la même substitution pouvant d'ailleurs se retrouver plusieurs fois dans la suite. Les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ sont entiers positifs. La somme $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q$ s'appelle *l'exposant* de la substitution. Dans le cas où la substitution S_i peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme (5), son exposant est la plus petite valeur que puisse prendre la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q$.

Il résulte de cette définition que les modules des coefficients d'une substitution dont l'exposant est σ sont plus petits que

$$(\mathrm{M}p)^\sigma.$$

Le groupe G est isomorphe au groupe g. Il en résulte que l'exposant de S_i est le même que celui de la substitution correspondante s_i du groupe g si l'isomorphisme est holoédrique. Il est plus petit, en général, si l'isomorphisme est mériédrique. Dans tous les cas, il ne peut pas être plus grand.

Soit, d'un autre côté, R la distance à l'origine d'un transformé zs_i du point z, distance évaluée au point de vue de la géométrie non euclidienne; je veux dire que R est la L de la droite $o - zs_i$. On peut trouver une relation entre R et l'exposant σ de la substitution s_i, que nous appellerons aussi, pour abréger, l'exposant du point zs_i. En effet, supposons, pour fixer les idées, que les points z et o soient tous deux intérieurs au polygone R_0. La droite $zs_i - o$ dont la L est égale à R traversera un certain nombre de polygones $R_0, R_1, \ldots, R_i$ et σ sera au plus égal au nombre n de ces polygones. Quelle relation y aura-t-il maintenant entre R et n?

Considérons d'abord le polygone R_0; la L de tout arc de courbe joignant deux points du périmètre de ce polygone appartenant à deux côtés non adjacents sera plus grande qu'une certaine limite inférieure que j'appellerai λ. Considérons maintenant un polygone R_1 adjacent à R_0 le long d'un côté C_1 et envisageons un arc de courbe joignant un point d'un côté C_0 de R_0 à un point du côté C_2 de R_1 et traversant le côté C_1. Je supposerai de plus que ces trois côtés C_0, C_1, C_2 n'ont aucun point commun. (Cf. *Théorie des groupes fuchsiens*, *Acta mathematica*, t. I, p. 31[1].) La L d'un pareil arc restera toujours plus grande qu'une certaine limite inférieure, que j'appellerai μ.

Considérons enfin un arc de courbe qui vient couper successivement divers côtés de divers polygones R_i et de façon que tous ces côtés viennent converger en un même point. Ce point sera un sommet de l'un des polygones et, comme le groupe g est supposé de la première famille, ce sera un sommet de la première catégorie auquel ne viendra aboutir qu'un nombre *fini* de côtés. J'appel-

---

[1] Ce Tome, p. 138.

lerai h la limite supérieure que ce nombre fini ne pourra dépasser. On aura alors

$$n < \mathrm{R}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{\rho}\right),$$

inégalité que nous pourrons écrire

$$n < \alpha\mathrm{R} \qquad \text{ou} \qquad \sigma < \alpha\mathrm{R},$$

α étant une constante.

Mais si l'on se reporte au paragraphe I du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. I[1]), on verra qu'on a (K étant une constante)

$$\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2} < \frac{\mathrm{K}}{e^{2\mathrm{R}} + e^{-2\mathrm{R}} + 2} < \mathrm{K}e^{-2\mathrm{R}},$$

et de plus que la série $\Sigma \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$ est convergente.

On a d'ailleurs, d'après ce que nous venons de voir,

$$\operatorname{mod} \mathrm{A}'_{\mu\nu} < (\mathrm{M}p)^{\sigma} < e^{\mathrm{R}\alpha \log(\mathrm{M}p)}.$$

On peut donc prendre m assez grand pour que

$$2m - 4 > \alpha \log(\mathrm{M}p),$$

d'où

$$\operatorname{mod} \mathrm{A}'_{\mu\nu}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} < \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

et, par conséquent, pour que la série $\lambda_{\mu\nu}$ définie plus haut soit convergente. La limite que l'on est ainsi conduit à attribuer au nombre m n'est pas précise. Reprenons maintenant les séries (1); on peut trouver une limite supérieure du module des p fonctions

$$\mathrm{H}_{\nu}(z s_i),$$

pourvu qu'aucune d'elles ne devienne infinie sur le cercle fondamental. [Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, § I (*Acta mathematica*, t. I).] Les séries (1) sont donc absolument convergentes. C. Q. F. D.

La relation (2) montre ensuite que, si l'on divise les p fonctions $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ par une même fonction thétafuchsienne θ, les quotients

$$\mathrm{Z}_1 = \frac{\xi_1}{\theta}, \qquad \mathrm{Z}_2 = \frac{\xi_2}{\theta}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{Z}_p = \frac{\xi_p}{\theta}$$

forment un système zétafuchsien.

D'où la conclusion suivante : Avec un groupe fuchsien g de la première

---

(1) Ce Tome, p. 180.

famille et un groupe zétafuchsien G isomorphe au premier, on peut toujours construire une infinité de systèmes zétafuchsiens.

Donc, on peut toujours construire une infinité d'équations linéaires admettant un groupe donné, pourvu que ce groupe soit isomorphe à un groupe fuchsien de la première famille.

Cette remarque est importante au point de vue de l'intégration algébrique de ces équations. Les savants qui ont abordé jusqu'ici la question de cette intégration algébrique ont cherché à former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Il restait à savoir s'il existait des équations admettant ces groupes. Cette question est maintenant résolue, puisque tout groupe d'ordre fini peut toujours être regardé comme isomorphe à un groupe fuchsien de la première famille.

Qu'arrive-t-il lorsque le groupe G est d'ordre fini? Il est mériédriquement isomorphe au groupe g; si, dans ce groupe g, on distingue les substitutions auxquelles correspond dans le groupe G la substitution identique, ces substitutions formeront un sous-groupe g' contenu dans g. Les fonctions $x = f(z)$ et $y = f_1(z)$ et, en général, les fonctions fuchsiennes de groupe g, pourront être regardées comme des cas particuliers des fonctions fuchsiennes de groupe g'. D'un autre côté, les séries $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ se réduisent à des séries thétafuchsiennes de groupe g', et les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ à des fonctions fuchsiennes de groupe g'. Il y a donc une relation algébrique entre Z_i et x. L'intégrabilité algébrique des équations linéaires auxquelles satisfont les fonctions Z_i est donc mise en évidence.

Nous pouvons, dès à présent, indiquer l'expression analytique générale des fonctions zétafuchsiennes. Nous avons vu en effet que, si

$$Z_1^h, \quad Z_2^h, \quad \ldots, \quad Z_p^h \qquad (h = 1, 2, \ldots p)$$

sont p systèmes zétafuchsiens (¹) et si

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_p$$

représentent un système zétafuchsien quelconque, on a

$$T_\mu = F_1 Z_\mu^1 + F_2 Z_\mu^2 + \ldots + F_p Z_\mu^p,$$

$F_1, F_2, \ldots, F_p$ étant des fonctions fuchsiennes que l'on peut toujours consi-

(¹) On suppose que le déterminant $\Sigma \pm Z_1^1 Z_2^2 \ldots Z_p^p$ ne soit pas nul. N. E. N.

dérer comme le quotient de deux séries thétafuchsiennes. Voici, par conséquent, quelle est la forme générale de la fonction T_μ.

Soient

$$\xi_\mu^1, \quad \xi_\mu^2, \quad \ldots, \quad \xi_\mu^p,$$
$$\theta, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_p$$

p séries de la forme (1) et $p+1$ séries thétafuchsiennes, on aura

$$T_\mu = \frac{\theta_1 \xi_\mu^1 + \theta_2 \xi_\mu^2 + \ldots + \theta_p \xi_\mu^p}{\theta}.$$

Parmi les séries ξ, on peut en envisager qui sont plus simples que les autres. En effet, dans les p séries

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_p$$

entrent p fonctions rationnelles arbitraires

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots, \quad H_p.$$

Supposons que toutes les fonctions H soient nulles, excepté H_ν; la série ξ_μ se réduira à

$$\xi_{\mu\nu} = \sum_i H_\nu\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) \Lambda'_{\mu\nu}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Les séries de cette forme, où $p-1$ des fonctions arbitraires H sont nulles, peuvent s'appeler séries ξ simples.

Choisissons maintenant p fonctions H quelconques et formons un système de séries ξ_μ à l'aide de ces p fonctions. Formons ensuite avec chacune de ces p fonctions, avec H_ν par exemple, un système de séries simples $\xi_{\mu\nu}$, les $p-1$ autres fonctions étant supposées nulles, on aura

$$\xi_\mu = \xi_{\mu 1} + \xi_{\mu 2} + \ldots + \xi_{\mu p},$$

ce qui montre qu'une série ξ quelconque peut être regardée comme une somme de séries simples.

Voyons maintenant quelle est l'expression analytique des séries ξ au moyen des intégrales d'une équation différentielle linéaire, donnant naissance à un système de fonctions zêtafuchsiennes. D'abord, afin d'éviter des complications inutiles et qui ne tiennent pas au fond des choses, je supposerai que le groupe g est non seulement de la première famille, mais encore du genre zéro. Le système zêtafuchsien considéré

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_p,$$

regardé comme fonction de la transcendante fuchsienne $x = f(z)$, satisfera à l'équation

$$\frac{d^p Z}{dx^p} + \sum \varphi_k \frac{d^k Z}{dx^k} = 0, \tag{4}$$

où les coefficients φ_k sont rationnels en x seulement. Je supposerai, pour simplifier, que cette équation (4) soit du second ordre et qu'elle soit *réduite* au sens donné à ce mot au paragraphe III de ce Mémoire. Je l'écrirai

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \varphi_k Z = 0. \tag{4}$$

Les points singuliers seront $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et ∞. Je supposerai qu'il n'y a pas de points à apparence singulière ou plutôt, s'il y en a, je les regarderai comme des points singuliers ordinaires et je les ferai correspondre à un sommet de R_0. J'appellerai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ les sommets de R_0 qui correspondront aux $n+1$ points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$. J'appellerai $\frac{2\pi}{\beta_i}$, comme dans le paragraphe V du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, la somme des angles du cycle dont fait partie le sommet α_i. Les racines γ_i et $1-\gamma_i$ de l'équation déterminante relative à $x = a_i$ et à l'équation différentielle (4) devront être des multiples de $\frac{1}{\beta_i}$. Les intégrales Z_1 et Z_2 de l'équation (4), regardées comme fonctions de z, seront infinies d'ordre $(\gamma_i - 1)\beta_i$ pour $z = \alpha_i$. Leurs dérivées $Z'_1 = \frac{dZ_1}{dx}$ et $Z'_2 = \frac{dZ_2}{dx}$ seront infinies d'ordre $\gamma_i\beta_i$. Voici maintenant quelle est l'expression générale d'une série ξ quelconque :

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m [F(x) Z_1 + F_1(x) Z'_1] = \xi_1, \tag{5}$$

$F(x)$ et $F_1(x)$ étant des fonctions rationnelles de x.

Nous allons chercher si l'on peut déterminer ces deux fonctions rationnelles de telle façon que l'expression (5) et l'expression conjuguée

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m (F Z_2 + F_1 Z'_2) = \xi_2 \tag{5'}$$

ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

Si l'on a, comme nous pouvons le supposer puisque le coefficient de $\frac{dZ}{dx}$ est nul dans l'équation (4),

$$Z_1 Z'_2 - Z_2 Z'_1 = 1,$$

il vient

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F = \xi_1 Z_2 - \xi_2 Z_1$$

et

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F_1 = -\xi_1 Z_2' + \xi_2 Z_1'.$$

Il suit de là que les deux fonctions F et F_1 ne peuvent devenir infinies que pour les points singuliers $z = \alpha_i$, la première d'ordre $(\gamma_i + m)\beta_i - m$ au plus (en z) et la seconde d'ordre $(\gamma_i + m - 1)\beta_i - m$ au plus.

On aura donc

$$F = \frac{\theta(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1}(x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_n)^{\lambda_n}}$$

et

$$F_1 = \frac{\theta_1(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1 - 1}(x - a_2)^{\lambda_2 - 1} \dots (x - a_n)^{\lambda_n - 1}},$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les plus grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités

$$(6) \qquad \lambda_i \leqq \gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i},$$

et où θ et θ_1 sont des polynomes entiers en x qu'il s'agit maintenant de déterminer plus complètement.

Nous venons de voir que F ne pouvait devenir, pour $x = a_i$, infini d'un ordre plus grand que λ_i et que F_1 ne pouvait devenir infini d'un ordre plus grand que $\lambda_i - 1$.

Cherchons maintenant un nombre μ_i tel que, si F est infini d'ordre μ_i et F_1 infini d'ordre $\mu_i - 1$ pour $x = a_i$, ξ_1 et ξ_2 soient certainement finis.

Il arrive alors que $FZ_1 \left(\frac{dx}{dz}\right)^m$ et $F_1 Z_1' \left(\frac{dx}{dz}\right)^m$ deviennent infinis d'ordre

$$\mu_i + \gamma_i - 1 - m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right),$$

d'où il résulte que μ_i est le plus grand nombre entier satisfaisant à l'inégalité

$$\mu_i \leqq 1 - \gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i}.$$

Pour $x = \infty$, $\frac{dx}{dz}$ devient infini d'ordre $1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}$, Z_1 d'ordre γ_{n+1} et Z_1' d'ordre $\gamma_{n+1} - 1$. Il en résulte que F ne peut pas être infini d'ordre plus élevé que

$$\lambda_{n+1} > m\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)+\gamma_{n+1}-1$$

et F_1 d'ordre plus élevé que $\lambda_{n+1}+1$.

D'autre part, si F est infini d'ordre μ_{n+1} et F_1 d'ordre $\mu_{n+1}+1$, ξ_1 et ξ_2 seront au plus d'ordre

$$\mu_{n+1}+\gamma_{n+1}+m\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right);$$

de sorte que, si μ_{n+1} satisfait à l'inégalité

$$\mu_{n+1} < -m\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)-\gamma_{n+1},$$

on sera certain que ξ_1 et ξ_2 sont finis.

Posons maintenant

$$F = f\varphi, \qquad F_1 = f_1\varphi_1,$$

f, φ, f_1, φ_1 étant des fonctions rationnelles devenant infinies respectivement d'ordre μ_i, $\lambda_i-\mu_i$, μ_i-1, $\lambda_i-\mu_i$ pour $x=a_i$ et d'ordre μ_{n+1}, $\lambda_{n+1}-\mu_{n+1}$, $\mu_{n+1}+1$, $\lambda_{n+1}-\mu_{n+1}$ pour $x=\infty$. Pour que cette décomposition ne puisse pas se faire d'une infinité de manières, nous supposerons qu'un coefficient quelconque de f et un de f_1 sont assujettis à avoir une valeur donnée.

Voici alors le nombre des coefficients restés arbitraires :

$$\begin{array}{rl} \text{dans } f, & \Sigma\mu_i, \\ \text{dans } f_1, & \Sigma\mu_i+1-n, \\ \text{dans } \varphi \text{ et dans } \varphi_1, & \Sigma\lambda_i-\Sigma\mu_i+1, \end{array}$$

en tout

$$2\Sigma\lambda_i+3-n.$$

Mais, entre ces coefficients, il y a certaines relations dont il faut chercher le nombre. Considérons un quelconque des infinis a_i, posons pour abréger $a_i=0$ et supprimons partout l'indice i. Soit

$$(7)\qquad \begin{cases} \varphi\ = A\,x^{\mu-\lambda}+A^1x^{\mu-\lambda+1}+A^2x^{\mu-\lambda+2}+\ldots+A^{\lambda-\mu-1}x^{-1}+\varphi', \\ \varphi_1 = A_1x^{\mu-\lambda}+A_1^1x^{\mu-\lambda+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_1^{\lambda-\mu-1}x^{-1}+\varphi_1, \end{cases}$$

φ' et φ_1 étant finis pour $x=0$. On peut maintenant toujours supposer que Z_1 et Z_2 aient été choisis de manière à être respectivement infinis d'ordre $\gamma-1$ et $-\gamma$ pour $x=0$, car, si cela n'était pas, il suffirait de remplacer Z_1 et Z_2 par $\alpha Z_1-\beta Z_2$ et $\gamma Z_1+\delta Z_2$, α, β, γ et δ étant des coefficients convenablement choisis. Cela posé, imaginons qu'il n'y ait aucune relation entre les coefficients A des expressions (7); l'expression (5) sera infinie d'ordre

$$\lambda - m\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \gamma - 1, \tag{8}$$

et l'expression (5′) d'ordre

$$\lambda - m\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma.$$

L'expression (5′) est donc finie en vertu de l'inégalité (6). Mais, pour que l'expression (5) soit finie, il faut qu'il y ait entre les coefficients A des expressions (7), des relations dont le nombre est précisément le plus petit entier qui est égal ou supérieur à l'expression (8), c'est-à-dire $\lambda - \mu$.

Le même raisonnement s'appliquerait pour $x = \infty$ et l'on trouverait qu'on doit avoir, entre les coefficients de φ et φ_1, $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$ relations pour que (5) et (5′) restent finis pour $x = \infty$. Il y a donc en tout

$$\Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i$$

relations et il reste

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

coefficients arbitraires. Dans cette expression, $\Sigma\lambda_i$ signifie

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1}.$$

Ainsi, toutes les séries ξ qui ne deviennent pas infinies s'expriment linéairement à l'aide de

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

d'entre elles. On trouverait un résultat analogue pour le cas de $p > 2$.

Nous devons adjoindre, au groupe zétafuchsien G, le groupe zétafuchsien corrélatif G_1 défini de la façon suivante : soit

$$(Z_i, \Sigma a_{ik} Z_k)$$

une substitution de G; la substitution correspondante de G_1 sera

$$(\Sigma a_{ki} T_k, T_i)$$

en appelant

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_p$$

l'un des systèmes zétafuchsiens engendrés par le groupe G_1. On sait que, dans la théorie des formes algébriques et, en particulier, dans celle des formes appelées *contravariants* et *mixed-concomitants*, la considération de la substitution corrélative d'une substitution linéaire donnée joue un rôle fort important.

Considérons maintenant l'expression suivante :

$$(9)\qquad Z_1 T_1 + Z_2 T_2 + \ldots + Z_p T_p.$$

Quand la variable z subit une substitution du groupe fuchsien g, les Z_i subissent la substitution correspondante de G et les T_i subissent la substitution correspondante de G_1. Il en résulte que l'expression (9) elle-même demeure invariable. C'est donc une fonction fuchsienne de z.

On verra plus loin le rôle des fonctions zétafuchsiennes et surtout des séries ξ engendrées par le groupe corrélatif G_1.

Remarquons maintenant que, dans le cas particulier de $p = 2$, à la substitution

$$S_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

du groupe G, correspond la substitution

$$\begin{vmatrix} d_i & -c_i \\ -b_i & a_i \end{vmatrix}$$

du groupe G_1. Ces deux substitutions ont évidemment mêmes multiplicateurs, d'où il suit que les quantités que nous avons appelées plus haut

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_n, \quad \gamma_{n+1}$$

sont les mêmes pour les deux groupes G et G_1.

Supposons maintenant $p > 2$; si $x = a$ est un point singulier pour lequel l'équation déterminante relative à une équation (4) engendrée par le groupe G ait pour racines

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_p,$$

l'équation déterminante relative à l'une des équations (4) engendrees par le groupe G_1 aura pour racines

$$\Sigma\varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{p(p-1)}{2}, \qquad \Sigma\varepsilon - \varepsilon_2 - \frac{p(p-1)}{2}, \qquad \ldots, \qquad \Sigma\varepsilon - \varepsilon_p - \frac{p(p-1)}{2}.$$

VI. — Décomposition en éléments simples.

Soit

$$(1)\qquad Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_p$$

un système zétafuchsien que je supposerai de la première famille, comme dans le paragraphe précédent. Soit $f(z)$ une fonction fuchsienne de la première famille ayant même groupe fuchsien que ce système. Je supposerai, pour fixer les idées, que cette fonction est de genre zéro et que toutes les autres transcendantes fuchsiennes de même groupe en sont des fonctions rationnelles.

Je vais reprendre les notations du paragraphe V du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. I, p. 240[1]).

Considérons l'intégrale

$$\int \frac{Z_i(z)}{z-x}\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^h dz \tag{2}$$

prise le long du contour S défini à ladite page 240. Je dis que cette intégrale tend vers zéro quand x tend vers 1, pourvu que h soit suffisamment grand.

En effet, nous pourrons aisément trouver une limite supérieure M_1 du module de $\frac{1}{z-x}$. Supposons maintenant que le module de $\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^h$ reste inférieur à M_2 le long du périmètre de R_0 : il restera inférieur à

$$M_2 H^h$$

le long du périmètre de S. Supposons enfin que, le long du périmètre de R_0, les modules des p fonctions

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_p$$

restent inférieurs à M_3. Cherchons la limite supérieure du module de ces mêmes fonctions le long du périmètre du polygone R_i en supposant que la substitution s_i qui change R_0 en R_i soit d'exposant σ. Soit S_i la substitution de G qui correspond à s_i. Nous avons vu, au paragraphe précédent, que les modules des coefficients de S_i sont plus petits que

$$e^{a\sigma},$$

a étant une constante convenablement choisie. Donc, le long de R_i le module des p fonctions Z est plus petit que

$$pM_3 e^{a\sigma}.$$

Considérons en particulier les polygones R_i qui forment la bordure de S. Leur exposant est, d'après le paragraphe précédent, plus petit que $\frac{b}{a}(R+\lambda)$, où b est une constante convenablement choisie. D'où ce résultat :

$$\operatorname{mod} Z_i < pM_3 e^{b(R+\lambda)}$$

(1) Ce Tome, p. 210.

le long de S. La quantité sous le signe $\int$ a donc son module plus petit que

$$(3)\qquad p M_1 M_2 M_3 e^{b(R+\lambda)} H^{2h}.$$

Si l'on se reporte à la valeur de H (*Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, *Acta mathematica*, t. I, p. 241[1]), on verra que cette expression (3) tend vers zéro pourvu que

$$b < 2h.$$

L'intégrale (2) tend donc aussi vers zéro; d'où l'on peut conclure que les p fonctions

$$(4)\qquad Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$$

peuvent se développer en séries de la façon suivante :

$$(5)\qquad \sum\frac{A}{z-a}+\sum\frac{A_2}{(z-a)^2}+\ldots+\sum\frac{A_m}{(z-a)^m},$$

où les a sont les infinis et les A les résidus. Si la fonction n'admet que des infinis simples, cette série se réduit à

$$\sum\frac{A}{z-a}.$$

Quand on connaîtra les infinis et les résidus de ces p fonctions à l'intérieur de R_0, on connaîtra tous les infinis et tous les résidus de ces mêmes fonctions, et par conséquent la série (5). Supposons que a soit un infini des fonctions (4) situé à l'intérieur de R_0 et que nous supposerons simple pour fixer les idées. Soient

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_p$$

les résidus des p fonctions (4) correspondant à cet infini.

Les points

$$as_i=\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}$$

seront aussi des infinis simples de ces mêmes fonctions (4).

Nous écrirons comme plus haut

$$A_\mu S_i=\Sigma a_{\mu\rho} A_\rho,$$

si la substitution S_i s'écrit

$$(Z_\mu, \Sigma a_{\mu\rho} Z_\rho).$$

(1) Ce Tome, p. 211.

Or, nous avons

$$Z_\mu(zs_i) = [Z_\mu(z)]S_i = \Sigma a_{\mu\rho} Z_\rho(z)$$

et

$$Z_\mu(zs_i)\left[\frac{df(zs_i)}{d(zs_i)}\right]^h = \left[\sum a_{\mu\rho} Z_\rho(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^h\right]\left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^h.$$

Multiplions l'identité précédente par $z-a$ et faisons $z=a$; il viendra, en appelant

$$A'_1,\quad A'_2,\quad \dots,\quad A'_p$$

les résidus des p fonctions (4) pour $z = as_i$,

$$(\gamma_i a+\delta_i)^2 A'_\mu = \Sigma a_{\mu\rho} A_\rho(\gamma_i a+\delta_i)^{-2h},$$

d'où

$$A_\mu = (A_\mu S_i)(\gamma_i a+\delta_i)^{-2h-2}.$$

Telle est la valeur des résidus cherchés. Réunissons ensemble les termes de la série (5) qui correspondent aux infinis de la forme as_i; nous trouverons la série suivante :

$$(6)\qquad \Phi_\mu(z, a) = \sum \frac{(A_\mu S_i)}{(z-as_i)(\gamma_i a+\delta_i)^{2h+2}};$$

de sorte que chaque fonction (4) se trouve décomposée en une somme d'un nombre fini d'éléments simples de la forme $\Phi_\mu(z, a)$.

Mais on peut pousser plus loin encore cette décomposition en éléments simples.

L'identité (6) pourra en effet s'écrire

$$\Phi_\mu = \sum_\nu \sum_i \frac{a^i_{\mu\nu} A_\nu}{(z-as_i)(\gamma_i a+\delta_i)^{2h+2}}$$

ou encore

$$\Phi_\mu = A_1\Phi_{\mu 1} + A_2\Phi_{\mu 2} + \dots + A_p\Phi_{\mu p},$$

en posant

$$\Phi_{\mu\nu} = \sum_i \frac{a^i_{\mu\nu}}{(z-as_i)(\gamma_i a+\delta_i)^{2h+2}};$$

de sorte que, si les fonctions (4) admettent les infinis simples

$$z_1,\quad z_2,\quad \dots,\quad z_q$$

à l'intérieur de R_0, et si elles admettent l'infini z_k respectivement avec les résidus

$$B_{k1},\quad B_{k2},\quad \dots,\quad B_{kp},$$

il viendra, pour la $\mu^{\text{ième}}$ des fonctions (4), l'identité

$$Z_\mu(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h} = \Sigma_k \Sigma_\mu B_{k\nu} \Phi_{\mu\nu}(z, z_k)$$

qui nous montre cette fonction décomposée en éléments simples. On arriverait à un résultat analogue pour les cas où cette fonction admettrait des infinis multiples.

Voyons ce que sont ces éléments simples, et pour cela regardons, dans l'expression $\Phi_{\mu\nu}(z, a)$, z comme une constante et a comme la variable.

Cherchons maintenant à former les séries ξ simples du paragraphe précédent avec le groupe G_1 corrélatif de G de ce même paragraphe, a étant toujours la variable; nous trouverons

$$\xi_{\mu\nu} = \Sigma_i H_\nu(as_i) a'_{i\mu}(\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}$$

ou, en faisant

$$H_\nu(a) = \frac{1}{z-a}, \qquad m = h+1,$$

il viendra

$$\xi_{\mu\nu} = \Phi_{\nu\mu}(z, a).$$

Ainsi, la transcendante $\Phi_{\nu\mu}$ regardée comme fonction de a est une fonction ξ admettant le groupe G_1 corrélatif de G.

Nous allons supposer maintenant $p = 2$ pour fixer les idées et nous allons étudier de plus près la décomposition en éléments simples des fonctions

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(FZ_1 + F_1 Z'_1) = \Lambda_1,$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(FZ_2 + F_1 Z'_2) = \Lambda_2,$$

Z_1, Z_2, Z'_1, Z'_2 ayant la même signification qu'à la fin du paragraphe précédent et F et F_1 désignant des fonctions rationnelles en x. Il est clair que Λ_1 et Λ_2 sont des fonctions de la forme (4) auxquelles, par conséquent, on peut appliquer tout ce que nous venons de dire.

Dans ce qui va suivre, les lettres β_i, γ_i, λ_i, μ_i auront la même signification qu'à la fin du paragraphe précédent, et nous poserons

$$m = h+1.$$

Cherchons la condition pour que les fonctions Λ_1 et Λ_2 ne deviennent pas infinies pour $x = a_i$. Il faut que F et F_1 deviennent nuls d'un ordre suffisamment grand et c'est cet ordre qu'il s'agit d'abord de déterminer. Supposons, pour le faire plus aisément, que Z_1 et Z_2 soient respectivement infinies d'ordre $\gamma_i - 1$ et $-\gamma_i$; cela est toujours possible car, si cela n'était pas, on remplacerait Z_1 et Z_2 par $\alpha Z_1 + \beta Z_2$ et $\gamma Z_1 + \delta Z_2$, α, β, γ, δ étant des coefficients convenablement choisis. Si alors F devient nul d'ordre δ_i et F_1 d'ordre $\delta_i - 1$, A_1 et A_2 seront respectivement infinies d'ordre

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i$$

et

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) - \gamma_i - \delta_i.$$

On doit donc avoir d'abord

$$\delta_i = h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) - \gamma_i$$

ou, ce qui revient au même,

$$\delta_i = \mu_i - 1.$$

Cette condition est suffisante pour que A_2 ne devienne pas infini. Pour que A_1 reste également fini, il faut encore qu'il y ait certaines relations entre les coefficients de F et de F_1.

Supposons maintenant que F et F_1 deviennent nuls d'ordre δ_{n+1} et $\delta_{n+1} - 1$ pour $x = \infty$ et Z_1 et Z_2 infinis d'ordre γ_{n+1} et $1 - \gamma_{n+1}$. Il en résultera que A_1 et A_2 deviendront infinis d'ordre

$$h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}$$

et

$$-h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) - 1 - \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}.$$

Par conséquent, A_2 reste fini pourvu que

$$\delta_{n+1} = 1 - \gamma_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\delta_{n+1} = \mu_{n+1} + 3.$$

Si, en outre, il y a certaines relations entre les coefficients de F et de F_1, A restera fini. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que δ_i et δ_{n+1} sont égaux à leurs limites, c'est-à-dire que l'on a

$$\delta_i = \mu_i - 1,$$
$$\delta_{n+1} = \mu_{n+1} + 3.$$

Considérons maintenant les relations dont il vient d'être question et qui doivent exister entre les coefficients de F et de F_1 pour que les deux fonctions A restent finies pour $z = \alpha_i$ et pour $z = \alpha_{n+1}$ et, avant tout, cherchons quel en est le nombre.

Si F et F_1 étaient des fonctions rationnelles quelconques assujetties seulement à être nulles d'ordre

$$\delta_i \quad \text{et} \quad \delta_i - 1 \qquad (\text{ou } \delta_{n+1} \text{ et } \delta_{n+1} - 1 \text{ pour } z = \alpha_{n+1}),$$

A_1 serait infini d'ordre

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i \qquad \left[\text{ou } -h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}\right].$$

Dans le développement de A_1 suivant les puissances croissantes de $x - \alpha_i$, il y aurait donc

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i\right]$$

$$\left\{\text{ou } E'\left[\gamma_{n+1} - \delta_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right] \text{ pour } z = \alpha_{n+1}\right\}$$

termes infinis. Nous désignons par $E'(x)$ le plus petit entier satisfaisant à la condition

$$E'(x) \geqq x,$$

et par $E(x)$ le plus grand entier tel que

$$E(x) \leqq x.$$

Le nombre des relations nécessaires pour que les deux A restent finis pour $z = \alpha_i$ est donc égal à

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i\right]$$

ou bien

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1\right] - \delta_i$$

ou, ainsi qu'il est aisé de le voir,

$$\lambda_i - 1 - \delta_i = \lambda_i - \mu_i.$$

En ce qui concerne le point $z = \alpha_{n+1}$, le nombre des relations est égal à

$$E'\left[\gamma_{n+1} - \delta_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]$$

ou

$$E'\left[\gamma_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right] - \delta_{n+1}$$

ou enfin

$$\lambda_{n+1} + 3 - \delta_{n+1} = \lambda_{n+1} - \mu_{n+1}.$$

On a, en effet,

$$\lambda_i = \mathrm{E}\left[\gamma_i + (h+1)\left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right)\right],$$

$$\lambda_{n+1} = \mathrm{E}\left[\gamma_{n+1} - 1 - (h+1)\left(1 - \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right],$$

$$\mathrm{E}'(x) = -\mathrm{E}(-x), \qquad \mathrm{E}(x+1) = \mathrm{E}(x) + 1,$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{a-1}{b}\right) + \mathrm{E}\left(-\frac{a}{b}\right) = -1,$$

a et b étant des entiers.

Le nombre total des relations est donc ainsi de

$$\Sigma \lambda_i - \Sigma \mu_i.$$

Considérons maintenant les diverses fonctions Λ qui admettent q infinis simples donnés sans en admettre d'autres. Toutes ces fonctions s'exprimeront linéairement à l'aide d'un certain nombre d'entre elles. Quel est ce nombre? Les fonctions F et F_1 admettent les q infinis donnés; mais, comme elles doivent être nulles respectivement d'ordre δ_{n+1} et d'ordre $\delta_{n+1} - 1$ pour $x = \alpha$, elles admettront $q - \delta_{n+1}$ et $q - \delta_{n+1} + 1$ zéros. Mais la fonction F admet δ_i fois le zéro α_i et la fonction F_1 l'admet $\delta_i + 1$ fois; il reste donc

$$q - \Sigma\delta \quad \text{zéros arbitraires dans F}$$

et

$$q - \Sigma\delta + 1 - n \qquad \text{dans } F_1.$$

Il y a donc en tout dans F et F_1

$$2q - 2\Sigma\delta + 3 - n = 2q - 2\Sigma\mu_i + n - 3$$

coefficients arbitraires.

Mais nous n'avons pas tenu compte des relations qui doivent exister entre les coefficients de F et de F_1 et dont nous venons de déterminer le nombre. Il faut donc retrancher de l'expression qui précède le nombre de ces relations, c'est-à-dire

$$\Sigma \lambda_i - \Sigma \mu_i.$$

Il restera ainsi

$$Q = 2q - \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + n - 3$$

coefficients réellement arbitraires.

Ainsi toutes les fonctions Λ qui admettent les q infinis donnés s'expriment linéairement à l'aide de Q d'entre elles.

Dans toute décomposition en éléments simples, il y a un nombre que l'on peut appeler *fondamental* et qui joue un rôle très important. Supposons qu'il s'agisse de décomposer en éléments simples les fonctions qui appartiennent à une certaine catégorie C. On doit supposer que la somme de deux fonctions appartenant à cette catégorie C appartient également à C : ce n'est que dans ces conditions qu'on peut être conduit à chercher une décomposition en éléments simples. Il peut arriver que les éléments simples fassent eux-mêmes partie de C; c'est ainsi que, dans la décomposition des fractions rationnelles, on est conduit à des éléments de la forme $\frac{A}{x-a}$ qui sont eux-mêmes des fractions rationnelles. Dans ce cas, nous dirons que le nombre fondamental est égal à zéro. Mais le contraire peut arriver également. Ainsi, dans la décomposition des fonctions doublement périodiques, les éléments simples sont de la forme $A\frac{d}{dx}\log\theta(x-a)$ et ne sont pas des fonctions doublement périodiques. Mais il existe des fonctions doublement périodiques qui sont des sommes de deux éléments simples seulement, et à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement. Dans ce cas, le nombre fondamental sera égal à 1. En général, s'il existe des fonctions de la catégorie C, décomposables en $m+1$ éléments simples seulement et à l'aide desquelles toutes les autres fonctions de la catégorie C peuvent s'exprimer linéairement, le nombre fondamental sera égal à m, pourvu que m soit le plus petit nombre jouissant de cette propriété. Ainsi, dans la décomposition des fonctions rationnelles de x et de y [y étant lié à x par une relation algébrique $\varphi(x, y) = 0$], décomposition découverte par M. Roch, le nombre fondamental est égal au genre de la relation $\varphi = 0$.

Envisageons de même la décomposition de la fonction $\Lambda(z)$ que nous avons considérée aux pages 238, 266, 275 et 284 (¹) du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* en éléments simples de la forme

$$A_k\Phi(z, z_k) \quad (^2).$$

Dans le Mémoire cité, nous avons déterminé le nombre fondamental relatif à cette décomposition. C'est ainsi que, dans le cas du genre zéro et de la deuxième famille (*loc. cit.*, p. 276 (³)), nous avons trouvé pour ce nombre

$$n(m-1)-m.$$

(¹) Ce Tome, p. 209, 238, 241 et 249.
(²) *Acta mathematica*, t. I, p. 242; ce Tome, p. 211.
(³) Ce Tome, p. 241.

Quel est maintenant le nombre fondamental relatif à la décomposition qui nous occupe ici, c'est-à-dire à la décomposition de la fonction A_1 en éléments simples de la forme

$$A_k \Phi_{1,1}(z, z_k) \quad \text{ou} \quad A_k \Phi_{1,2}(z, z_k).$$

Pour cela, il nous suffit d'énoncer le résultat suivant : si m est le nombre fondamental d'une décomposition quelconque en éléments simples, toutes les fonctions qui s'expriment linéairement à l'aide de q éléments donnés peuvent être exprimées linéairement à l'aide de $q - m$ d'entre elles.

Nous avons vu que les fonctions A qui admettent q infinis donnés

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_q$$

peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de

$$2q - \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + n - 3$$

d'entre elles. Or, ces fonctions peuvent s'exprimer linéairement à l'aide des $2q$ éléments simples

$$\begin{array}{llll} \Phi_{1,1}(z, z_1), & \Phi_{1,1}(z, z_2), & \ldots, & \Phi_{1,1}(z, z_q), \\ \Phi_{1,2}(z, z_1), & \Phi_{1,2}(z, z_2), & \ldots, & \Phi_{1,2}(z, z_q). \end{array}$$

Donc, le nombre fondamental est égal à

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n.$$

Dans la théorie des fonctions fuchsiennes et des fonctions $A(z)$ engendrées par ces transcendantes, le nombre fondamental jouissait d'une propriété remarquable que je vais rappeler :

Soit $\psi(h)$ le nombre fondamental relatif à la décomposition en éléments simples des fonctions de la forme

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^h F(x, y),$$

où F désigne une fonction rationnelle des deux fonctions fuchsiennes x et y.

Soit $\varphi(m)$ un nombre tel que les fonctions de la forme

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y)$$

(où F a la même signification que plus haut) qui ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental, s'expriment linéairement à l'aide de $\varphi(m)$ d'entre elles.

On avait l'identité

$$\psi(h) = \varphi(h+1).$$

C'est de cette identité que nous avons tiré une conclusion importante, à savoir que toute fonction de la forme (α) pouvait être représentée par une série thétafuchsienne [de la forme (4), § I, *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*].

De même ici, soit

$$\psi(h) = \Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

le nombre fondamental relatif à la décomposition de A_1.

Soit $\varphi(m)$ un nombre tel que toutes les fonctions de la forme

$$(\beta) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m (FZ_1 + F_1 Z'_1)$$

[forme (5) du paragraphe précédent] puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $\varphi(m)$ d'entre elles. On aura encore

$$(\gamma) \qquad \psi(h) = \varphi(h+1).$$

Voyons si l'on pourra tirer de cette identité la même conclusion que dans le paragraphe cité, c'est-à-dire si l'on pourra démontrer que toutes les fonctions de la forme (β) peuvent s'exprimer par l'une des séries ξ du paragraphe précédent.

Supposons que toutes les séries ξ qui ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental et qui correspondent à un exposant m égal à $h+1$ puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $\theta(h+1)$ d'entre elles. On aura évidemment

$$(\delta) \qquad \theta(h+1) \leqq \varphi(h+1),$$

puisque toute série ξ est égale à une fonction de la forme (β). Si l'on a

$$\theta = \varphi,$$

toute fonction de la forme (β) pourra réciproquement s'exprimer par une série ξ. Il n'en serait plus de même si l'on avait

$$\theta < \varphi.$$

Soient maintenant

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_q$$

q quantités quelconques, intérieures au cercle fondamental. Soient

$$\begin{matrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_q, \\ B_1, & B_2, & \ldots, & B_q \end{matrix}$$

$2q$ quantités que nous assujettirons plus loin à diverses conditions.

Soient maintenant $\xi_1(z)$ une série ξ ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental et $\xi_2(z)$ sa conjuguée. Ces séries ξ sont engendrées par le groupe fuchsien g et par le groupe zétafuchsien G_1 corrélatif de G. Assujettissons les quantités A et B à la condition suivante :

$$(\varepsilon) \qquad \begin{aligned} &A_1\,\xi_1(z_1) + A_2\,\xi_1(z_2) + \ldots + A_q\,\xi_1(z_q) \\ &+ B_1\,\xi_2(z_1) + B_2\,\xi_2(z_2) + \ldots + B_q\,\xi_2(z_q) = 0. \end{aligned}$$

Écrivons cette même relation pour toutes les séries ξ qui, restant finies à l'intérieur du cercle fondamental, correspondent à un exposant m égal à $h+1$. Nous aurons de la sorte assujetti les A et les B à $\mathfrak{H}(h+1)$ conditions distinctes.

Posons alors

$$(\zeta) \qquad \begin{cases} \Lambda_1(z) = \Sigma\,A_k\,\Phi_{1.1}(z, z_k) + \Sigma\,B_k\,\Phi_{1.2}(z, z_k), \\ \Lambda_2(z) = \Sigma\,A_k\,\Phi_{2.1}(z, z_k) + \Sigma\,B_k\,\Phi_{2.2}(z, z_k). \end{cases}$$

Posons maintenant

$$\Phi_{1.1}(zs_i, z_k) - \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^h [a_i\,\Phi_{1.1}(z, z_k) + b_i\,\Phi_{2.1}(z, z_k)] = \eta_1(z_k),$$

$$\Phi_{1.2}(zs_i, z_k) - \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^h [a_i\,\Phi_{1.2}(z, z_k) + b_i\,\Phi_{2.2}(z, z_k)] = \eta_2(z_k),$$

en supposant que

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

soit le tableau à double entrée des coefficients de la substitution S_i correspondant à s_i. Il est clair que $\eta_1(z)$ et $\eta_2(z)$ sont deux séries ξ conjuguées ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental. Donc, en vertu des relations (ε), on a

$$\Lambda_1(zs_i) = \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^{+h} [a_i\,\Lambda_1(z) + b_i\,\Lambda_2(z)].$$

On en conclut que Λ_1 et Λ_2 sont deux fonctions de la forme

$$\Lambda_1 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} (FZ_1 + F_1 Z_1'),$$

$$\Lambda_2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} (FZ_2 + F_1 Z_2').$$

dont les identités (ζ) nous donnent la décomposition en éléments simples. Or, les coefficients A et B de cette décomposition ne sont assujettis qu'à $\theta(h+1)$ conditions. Ce nombre $\theta(h+1)$ est donc au moins égal au nombre fondamental, d'où l'inégalité

$$\theta(h+1) \geqq \psi(h).$$

De la comparaison de cette inégalité avec (γ) et (δ) on déduit

$$\theta(h+1) = \varphi(h+1).$$

Donc, toute expression de la forme (β) qui ne devient pas infinie peut s'exprimer par une série ξ.

On en déduit aisément qu'il en est de même d'une expression de la forme (β) qui devient infinie.

Donc, *toute fonction zétafuchsienne est le quotient d'une série ξ par une série thêtafuchsienne.*

Nous avons, il est vrai, pour fixer les idées, supposé que $p=2$; mais la démonstration et le résultat subsistent quand p est plus grand que 2.

VII. — Extension à la deuxième famille.

Tout ce qui précède ne s'applique encore qu'aux groupes fuchsiens de la première famille et aux groupes zétafuchsiens qui leur sont isomorphes. Il nous reste à étudier les fonctions zétafuchsiennes dont le groupe fuchsien g est de la seconde ou de la sixième famille.

Parmi ces fonctions, nous distinguerons deux espèces :

La première espèce, dont nous nous occuperons d'abord, comprendra les fonctions dérivées d'un groupe zétafuchsien G jouissant des propriétés suivantes : le groupe fuchsien g étant de la seconde ou de la sixième famille, son polygone générateur R_0 aura des sommets sur le cercle fondamental. A chacun de ces sommets correspond une substitution parabolique du groupe g qui admet ce sommet comme point double. Les substitutions ainsi définies sont les substitutions paraboliques du groupe g; les substitutions du groupe G qui leur correspondent en vertu de l'isomorphisme s'appelleront *substitutions critiques*. Il ne faut pas confondre les substitutions critiques du groupe G et les substitutions fondamentales de ce même groupe. Les substitutions fondamentales de G seront, dans ce qui va suivre, celles qui correspondent aux substitutions de g qui changent un côté de R_0 en son conjugué ou à leurs inverses. Les substitutions critiques de G seront celles qui correspondent aux substitutions paraboliques de g qui n'altèrent pas l'un des sommets de la seconde sorte de R_0 ou à leurs inverses. Formons, pour chacune de ces substitutions critiques, *l'équation aux multiplicateurs* que l'on obtient, comme on sait, en écrivant le tableau à double entrée des coefficients, ajoutant $-S$ à chacun des termes de la diagonale principale et égalant à zéro le déterminant ainsi obtenu. Si toutes les racines de ces équations relatives à toutes les substitutions critiques ont pour module l'unité, le groupe G et les fonctions zétafuchsiennes qui en dérivent seront de la première espèce. Soit

$$(1) \qquad Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_p$$

un système zétafuchsien et $x = f(z)$ une fonction fuchsienne ayant même groupe. Nous avons vu que Z_i, considéré comme fonction de x, satisfait à une équation linéaire à coefficients algébriques. Quelles sont les conditions que doit remplir cette équation pour que le système (1) soit de la première espèce? *Il faut et il suffit que, si l'on envisage les différents points singuliers de cette équation, toutes les équations déterminantes correspondantes aient toutes leurs racines réelles.*

La seconde espèce, dont il sera question au paragraphe suivant, comprend toutes les autres fonctions zétafuchsiennes.

Je dis que, si le groupe G est de la première espèce, les séries ξ du paragraphe (3) seront absolument convergentes.

Considérons, en effet, une substitution quelconque S du groupe G. Nous pourrons la mettre sous la forme suivante :

$$(2) \qquad S = \Sigma_1^{\alpha_1} \Sigma_2^{\alpha_2} \ldots \Sigma_n^{\alpha_n},$$

où les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ sont choisies parmi les substitutions fondamentales ou les substitutions critiques et où les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des entiers positifs. Parmi les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, il y en aura en général un certain nombre que j'appellerai $T_1, T_2, \ldots, T_q$ qui seront des substitutions critiques et j'appellerai $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ leurs exposants. J'appellerai $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-q}$ les $n-q$ exposants qui affectent des substitutions fondamentales. Nous allons chercher, comme dans le paragraphe V, une limite supérieure des coefficients de S, et pour cela nous envisagerons la somme des logarithmes des exposants β, $\Sigma \log \beta$ et celle des exposants γ, $\Sigma\gamma$. Soit d'abord M un nombre plus grand que les modules des coefficients des substitutions fondamentales et de leurs inverses. Soit ensuite T une quelconque des substitutions critiques; nous pourrons toujours la mettre sous la forme suivante :

$$T = UVU^{-1},$$

où V est une substitution canonique. J'appelle ainsi, à l'exemple de plusieurs géomètres, toute substitution de la forme suivante :

$$(3) \qquad (Z_1, Z_2, \ldots, Z_p;\ m_1 Z_1, m_2 Z_2, \ldots, m_p Z_p)$$

ou bien, plus généralement,

$$(4) \qquad (Z_1, Z_2, \ldots, Z_p;\ m_1 Z_1,\ m_2 Z_2 + n_2 Z_1,\ m_3 Z_3 + n_3 Z_2,\ \ldots,\ m_p Z_p + n_p Z_{p-1}),$$

où n_q est nul, si m_q est différent de m_{q-1}.

J'aurai donc à considérer à part les substitutions U et les substitutions V. Je supposerai que le nombre M, défini plus haut, est plus grand que les modules de tous les coefficients de U et de U^{-1}.

Maintenant nous avons

$$T^\beta = UV^\beta U^{-1},$$

et il s'agit de trouver une limite supérieure des coefficients de V^β. Si V est de la forme (3), tous les coefficients de V^β ont pour modules 0 ou 1. Si V est de la forme (4), on pourra trouver un polynome entier en β de degré p au plus, à coefficients positifs et qui sera plus grand que les modules de tous les coefficients de V^β. Plus simplement, on pourra toujours trouver un nombre M' assez grand pour que l'expression $M'\beta^p$ soit plus grande que tous ces modules. Pour simplifier encore, nous supposerons $M' = M$, en prenant pour la valeur commune de ces deux nombres un nombre assez grand pour satisfaire à toutes les conditions que nous leur avons imposées.

En appelant M_1 et M_2 la limite supérieure des modules des coefficients de deux substitutions S_1 et S_2, les modules des coefficients de $S_1 S_2$ seront plus petits que

$$p M_1 M_2.$$

Si donc on se reporte à l'expression (2) de la substitution S, on verra que ses coefficients sont tous plus petits que

$$(5) \qquad (pM)^{\Sigma\gamma + 3q} e^{p\Sigma \log \beta}.$$

Cherchons maintenant une limite supérieure des deux exposants qui entrent dans cette formule, à savoir $\Sigma\gamma + 3q$ et $\Sigma \log \beta$. Soit zs le transformé du point z par la substitution s du groupe g qui correspond à S. Joignons z et zs par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, et soit R la L de cet arc de cercle. C'est en fonction de R que je veux exprimer les limites supérieures cherchées.

Considérons l'un quelconque des sommets du polygone R_0 ou de l'un de ses transformés, et décrivons autour de ce sommet un petit cercle défini de la manière suivante : si ce sommet est de la première sorte et situé à l'intérieur du cercle fondamental, il devra être le centre de ce petit cercle *au point de vue non euclidien*. Si le sommet est de la seconde sorte et situé sur le cercle fondamental, le petit cercle devra toucher le cercle fondamental en ce sommet même. Je puis toujours supposer que ces cercles ont été pris assez petits pour n'avoir aucun point commun. Il arrivera alors que la L d'un arc de courbe qui ira d'un point de l'un de ces cercles à un point d'un autre de ces petits cercles restera toujours supérieure à une certaine limite λ. L'arc de cercle z, zs, défini plus haut, traversera un certain nombre de ces petits cercles et ce nombre ne pourra pas être supérieur à $\frac{R}{\lambda}$. Maintenant, si nous considérons un arc de courbe ne traversant aucun de nos petits cercles et joignant deux points appartenant à deux côtés différents du polygone R_0 ou d'un de ses transformés, la L de cet arc restera toujours supérieure à une certaine limite μ.

Voyons maintenant quelle est la signification géométrique des exposants β et γ qui entrent dans l'expression (5). L'arc z, zs, en allant du point z au point zs, traverse divers côtés appartenant au polygone R_0 ou à ses transformés. La substitution S peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme (2). Nous avons d'ailleurs le droit de choisir, parmi ces différentes manières, celle qui nous convient le mieux; car chacune d'elles nous conduira à une limite supérieure des coefficients. Voici celle que nous adopterons : soient C_1, C_2, ..., C_{2n} les $2n$ côtés du polygone R_0; soit R_i le polygone contigu à R_0 le long de C_i; soient s_i la substitution du groupe g qui change R_0 en R_i et S_i la substitution correspondante du groupe G. Les substitutions S_1, S_2, ..., S_{2n} seront les substitutions fondamentales du groupe G. Cela posé, supposons que l'arc z, zs, dont nous nous occupons, sorte du polygone R_0 par exemple par le côté C_{α_1}, puis du polygone suivant par le côté homologue à C_{α_2} et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier polygone, d'où il sortira par le côté C_{α_n}. Nous poserons alors

$$(6) \qquad S = S_{\alpha_n} S_{\alpha_{n-1}} \dots S_{\alpha_2} S_{\alpha_1}.$$

Mais ce ne sera pas encore là la forme définitive que nous adopterons pour S. Supposons, en effet, que l'arc z, zs pénètre dans l'un des petits cercles relatifs à l'un des sommets de la seconde sorte et y franchisse un certain nombre de côtés appartenant à R_0 et à ses transformés. Tous ces côtés iront alors forcément aboutir au sommet de la seconde sorte, où le petit cercle en question touche le cercle fondamental et ils se succéderont périodiquement de la façon suivante : on rencontrera d'abord un côté homologue à C_{γ_1}, puis un côté homologue à C_{γ_2}, etc., jusqu'à ce qu'on retombe sur un côté homologue à C_{γ_1}; on retrouvera ensuite un côté homologue à C_{γ_2} et ainsi de suite dans le même ordre. Si nous réunissons ensemble les facteurs de l'expression (6) qui correspondent aux côtés rencontrés à l'intérieur de ce petit cercle, ces facteurs pourront s'écrire de la manière suivante :

$$S_{\gamma_m} S_{\gamma_{m-1}} \cdots S_{\gamma_2} S_{\gamma_1} (S_{\gamma_k} S_{\gamma_{k-1}} \cdots S_{\gamma_2} S_{\gamma_1})^{\beta}. \tag{7}$$

k est le nombre de côtés compris dans une période et c'est précisément le nombre des sommets de R_0 qui forment un même cycle parabolique ; β est le nombre des périodes ; enfin

$$S_{\gamma_m} S_{\gamma_{m-1}} \cdots S_{\gamma_2} S_{\gamma_1}$$

est l'ensemble des facteurs de l'expression (6) qui forment un résidu n'entrant dans aucune période ; leur nombre est plus petit que k. Mais

$$(S_{\gamma_k} S_{\gamma_{k-1}} \cdots S_{\gamma_2} S_{\gamma_1}) = T$$

est une substitution critique, de sorte qu'on peut remplacer dans l'expression (6) l'ensemble des facteurs (7) par

$$S_{\gamma_m} S_{\gamma_{m-1}} \cdots S_{\gamma_2} S_{\gamma_1} T^{\beta}.$$

Quand on aura fait cette opération, l'expression (6) sera devenue l'expression (2) définitive et il n'y entrera, comme on le voit, que des substitutions fondamentales et des substitutions critiques.

Maintenant $\Sigma\gamma$ est le nombre des substitutions fondamentales entrant dans cette expression (2). Chacune d'elles correspond à une intersection de l'arc z, zs avec un côté des transformés de R_0. Quelques-unes de ces intersections auront lieu en dehors des petits cercles et leur nombre ne pourra pas être plus grand que $\frac{R}{\mu}$; les autres auront lieu à l'intérieur des petits cercles. Si l'on considère d'abord les petits cercles relatifs à un sommet de la première sorte, on reconnaîtra sans peine que le nombre des intersections possibles dans chacun d'eux est limité. A l'intérieur des petits cercles relatifs aux sommets de la seconde sorte, le nombre des intersections pourrait au contraire être illimité; mais un nombre limité d'entre elles seulement se rapportent à des substitutions fondamentales entrant dans l'expression (2) définitive. On a vu en effet que, dans cette expression, nous avons remplacé l'ensemble des facteurs (7) par le produit d'un nombre *limité* de substitutions fondamentales et d'une certaine puissance d'une substitution critique. Ainsi, on peut trouver une limite supérieure h du nombre des substitutions fondamentales entrant dans l'expression (2) et relatives à des intersections ayant lieu à l'intérieur d'un petit cercle. Il en résulte que

$$\Sigma\gamma < \mathrm{B}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{h}{\lambda}\right).$$

Quant au nombre q, il est au plus égal au nombre des petits cercles traversés; on a donc

$$\Sigma\gamma + 3q < \mathrm{B}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{h+3}{\lambda}\right).$$

Il faut maintenant trouver une limite supérieure de $\Sigma \log \beta$. Considérons un petit cercle quelconque relatif à un sommet A de la seconde sorte, et la substitution critique T correspondante; elle entrera à la puissance β dans l'expression (2) définitive, et ce nombre β est au plus égal au nombre des intersections qui ont lieu à l'intérieur du petit cercle entre l'arc z, zs et certains côtés qui vont tous converger au sommet A et *qui sont tous homologues entre eux*. Il est aisé de trouver une limite supérieure du nombre de ces intersections. Faisons passer par le sommet A deux cercles AB et AC orthogonaux au cercle fondamental, B et C étant par exemple sur le petit cercle considéré. La L de l'arc BC de ce petit cercle pourra s'appeler *l'écart* des deux cercles AB et AC. Soit AB_1 un côté appartenant à l'un des transformés de R_0 et aboutissant au point A; soient AB_2 le transformé de AB_1 par la substitution parabolique du groupe g qui a pour point double le point A; AB_3 le transformé de AB_2 par cette même substitution, etc.; l'écart de deux de ces transformés consécutifs AB_n, AB_{n+1} sera une constante ν. Soient maintenant B et D les deux extrémités de la portion de l'arc z, zs qui est à l'intérieur du petit cercle. Le point B se trouvera sur la circonférence de ce petit cercle et il en sera de même de D, à moins que D ne soit le point zs lui-même. Soient L_1 la L de l'arc BD et N l'écart des cercles AB et AD; on aura

$$\beta < \frac{\mathrm{N}}{\nu}$$

et d'autre part

$$\nu \geqq \frac{e^{L_1}-e^{-L_1}}{2};$$

le cas de l'égalité se présentant lorsque les cercles z, zs et AD se coupent orthogonalement en D. On déduit de là

$$\beta < \frac{e^{L_1}}{2\nu},$$

d'où

$$\log\beta < L_1 - \log 2\nu.$$

On peut trouver une quantité k_1 telle que, pour tous les petits cercles relatifs à un sommet de la seconde sorte,

$$-\log 2\nu < k_1;$$

on aura alors

$$\Sigma \log\beta < R + k_1 q < R\left(1+\frac{k_1}{\lambda}\right).$$

Telles sont les deux limites supérieures cherchées. On en déduit que les coefficients de la substitution S sont plus petits que

$$e^{aR},$$

a étant une constante. C'est le résultat auquel nous étions parvenus dans le paragraphe V et d'où nous avions conclu la convergence des séries ζ. Ces séries sont donc encore convergentes dans le cas qui nous occupe.

Ainsi, toutes les conclusions du paragraphe V subsistent ici. En est-il de même de celles du paragraphe VI et en particulier de l'identité suivante :

$$(8) \qquad \Lambda_i = Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h} = \sum\frac{A_1}{z-a} + \sum\frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \sum\frac{A_m}{(z-a)^m},$$

où Z_i est une fonction zétafuchsienne et f une fonction fuchsienne de z, où les a sont les infinis du premier membre et les A les résidus correspondants ?

En d'autres termes, l'intégrale

$$(9) \qquad \int\frac{Z_i(z)}{z-x}\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{-h} dz,$$

prise le long d'un contour convenablement choisi, tend-elle encore vers zéro lorsque ce contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental ? Cela ne serait évidemment pas vrai si nous choisissions l'expression sous le signe $\int$

d'une façon tout à fait quelconque. Nous lui imposerons la condition de s'annuler en tous les sommets de R_0 situés sur le cercle fondamental; je veux dire qu'en tous ces sommets les p fonctions

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_p$$

du système considéré multipliées par $\frac{1}{z-x}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$ s'annuleront en même temps. Il existe évidemment une infinité de systèmes zétafuchsiens engendrés par deux groupes g et G donnés et satisfaisant à cette condition.

Je puis supposer également, mais cette fois pour simplifier seulement, que l'expression

$$Z_i(z)\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{-h} - X_i \tag{10}$$

ne devient pas infinie le long du périmètre de R_0, non plus, bien entendu, qu'aucune des expressions qu'on obtient en donnant à l'indice i l'une des valeurs 1, 2, 3, ..., p.

Cela posé, nous avons dit que l'expression (10) devait s'annuler pour $z=\alpha_i$ (si α_i est un sommet de la seconde sorte), c'est-à-dire que son module devait tendre vers zéro quand z tend vers α_i en suivant l'un des côtés de R_0. Voyons comment cette expression tend vers zéro. Supprimons l'indice i du sommet α_i et appelons-le simplement α pour abréger. Le module de α sera égal à 1 puisque ce sommet est sur le cercle fondamental.

Posons

$$t = \frac{\beta}{z-\alpha},$$

β étant un coefficient convenablement choisi.

Nous avons vu que les fonctions fuchsiennes de z sont, dans le voisinage de $z=\alpha$, holomorphes en e^t, et que les fonctions zétafuchsiennes sont de la forme

$$P_1 e^{\lambda_1 t}\Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t}\Phi_2 + \ldots + P_q e^{\lambda_q t}\Phi_q, \tag{11}$$

où les Φ sont holomorphes en e^t et où les P sont des polynomes entiers en t. D'ailleurs, il est aisé de voir que β est une quantité telle que, quand l'argument de z est le même que celui de α et son module plus petit, la valeur de t est réelle et négative; si donc z tend vers α en suivant un des côtés de R_0, e^t tend vers zéro.

On a d'ailleurs

$$\frac{df}{dz} = t^2 \Phi',$$

Φ' étant holomorphe en e^t.

Donc, l'expression (10) peut se mettre sous la forme d'une somme de termes de la forme suivante :

$$\Sigma B t^\mu e^{\nu t},$$

où B, μ et ν sont des constantes. Pour que l'expression (10) tende vers zéro, il faut et il suffit que toutes les constantes ν aient leur partie réelle positive.

Soit maintenant R la distance de l'origine au point z, comptée au point de vue non euclidien. Nous aurons

$$|z| = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}.$$

Supposons que l'argument de z soit le même que celui de α, on aura

$$|t| = \frac{|\beta|}{1 - |z|} = \frac{|\beta|}{2}(e^{2R} + 1).$$

Lorsque z tend vers α, l'expression

$$|t|\, e^{-2R}$$

tend vers une limite finie $\frac{|\beta|}{2}$. Il est aisé de voir qu'il en est encore de même quand z tend vers α en suivant l'un des côtés de R_0. Il en résulte que l'expression

$$A\, e^{mR}$$

tendra vers zéro, quel que soit m, quand z tendra vers α en suivant les côtés de R_0. D'où cette conclusion : c'est qu'on peut trouver un nombre M tel que l'inégalité

$$|A| < M(e^{2R} + e^{-2R} - 2)^h$$

subsiste tout le long du périmètre de R_0.

Considérons maintenant deux points transformés l'un de l'autre z et zs_i et appelons A et R leurs distances à l'origine évaluées au point de vue non euclidien. Soit λ_0 le plus grand module des p quantités

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_p$$

au point z, et soit λ_i le module de l'un des A au point zs_i. Cherchons une limite supérieure du rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$.

Nous avons vu que les coefficients de la substitution S_i du groupe G qui correspond à s_i étaient plus petits que

$$e^{aL},$$

a étant une constante et L la distance non euclidienne de z à zs_i. Mais on n'a qu'à se reporter au mode de démonstration adopté pour voir que, dans cette expression, L peut tout aussi bien représenter la distance du point zs_i à un point quelconque situé dans le même polygone que z. Si donc les points 0 et z sont tous deux dans le polygone R_0, les coefficients de S_i seront tous plus petits que

$$e^{aR}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d\,f(zs_i)}{dzs_i} = \frac{d\,f(z)}{dz}\,\frac{e^{2R}+e^{-2R}+2}{e^{2A}+e^{-2A}+2}.$$

On déduit de là

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < p\,e^{aR}\left(\frac{e^{2R}+e^{-2R}+2}{e^{2A}+e^{-2A}+2}\right)^{-h}.$$

Si le point z est sur le périmètre de R_0, on a

$$\lambda_0 = M(e^{2A}+e^{-2A}+2)^{-h}.$$

On en déduit

$$\lambda_1 < p M\,e^{aR}(e^{2R}+e^{-2R}+2)^{-h}.$$

Nous pourrons écrire plus simplement

$$\lambda_1 < p M\,e^{(a-2h)R}.$$

Il reste à montrer maintenant que la longueur du contour d'intégration est finie. Nous supposerons que la portion du plan limitée par ce contour est formée d'un certain nombre de polygones transformés de R_0. Le contour sera donc formé d'un certain nombre de côtés de ces polygones, et il s'agit de faire voir que l'on peut choisir ces polygones de manière que le contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental et reste cependant de longueur finie.

Pour simplifier la démonstration, nous nous restreindrons aux groupes g de la deuxième famille, laissant de côté la sixième famille qui est beaucoup moins importante et pour laquelle d'ailleurs le résultat reste vrai.

Pour la deuxième famille, le polygone R_0 et ses transformés ont tous leurs sommets sur le cercle fondamental, et le contour d'intégration, quels que soient les polygones qui le forment, se compose toujours d'un certain nombre d'arcs de cercles tangents deux à deux et orthogonaux au cercle fondamental. Il est aisé de voir alors que sa longueur reste toujours plus petite que π^2. Supposons maintenant que l'on prenne pour contour d'intégration le périmètre de la portion du plan formée de tous les polygones transformés de R_0 qui sont, en totalité ou en partie, intérieurs au cercle K qui a pour centre l'origine et pour rayon R (au point de vue non euclidien). L'intégrale (9) est alors plus petite que

$$\pi^2 p M e^{(a-2h)R}.$$

Si $2h$ est plus grand que a, elle tendra vers zéro quand R croîtra indéfiniment. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer. On peut en conclure que l'identité (8), analogue à l'identité (5) du paragraphe précédent, subsiste encore dans le cas qui nous occupe. Il en est de même des résultats que nous en avons déduits, et en particulier de la décomposition en éléments simples des expressions telles que A et des fonctions zétafuchsiennes.

Le résumé du présent paragraphe, c'est qu'il n'y a aucune différence essentielle entre les fonctions zétafuchsiennes que nous venons d'appeler de la première espèce et les fonctions engendrées par les groupes fuchsiens de la première famille.

VIII. — Fonctions de la deuxième espèce.

Dans ce qui précède nous avons supposé que les fonctions zétafuchsiennes étudiées étaient de la première espèce, c'est-à-dire que les substitutions critiques avaient des multiplicateurs du module 1. Les mêmes résultats subsisteront-ils pour les fonctions de la deuxième espèce? Il est aisé de voir que non.

Reprenons en effet, dans ce cas, la série ξ du paragraphe V. Je dis qu'elle sera divergente ou tout au moins qu'elle ne sera pas absolument convergente. En effet, ne conservons dans cette série qu'une partie des termes. Soit

$$\left(\frac{1}{z-\alpha}, \frac{1}{z-\alpha}+\beta\right)$$

une substitution parabolique s_i du groupe g et soit S_i la substitution critique correspondante du groupe G. Elle pourra toujours se mettre sous la forme canonique

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p; M_1 Z_1, M_2 Z_2, \ldots, M_p Z_p).$$

Ne conservons dans la série ξ que les termes qui correspondent à la substitution s_i et à ses puissances positives et négatives. Ces termes s'écriront

$$\sum H\left(\frac{1}{z-\alpha}+q\beta\right)M_\mu{}^q[q\beta(z-\alpha)+1]^{-2m},$$

où H est le signe d'une fonction rationnelle et où q prend toutes les valeurs entières positives et négatives.

J'écrirai plus simplement

$$\Sigma M_\mu{}^q\varphi(q),$$

$\varphi(q)$ étant une fonction rationnelle de q. Cette série est évidemment divergente.

Les résultats du paragraphe V ne sont donc plus vrais ici, et il en est de même de ceux du paragraphe VI, qui y sont d'ailleurs intimement liés.

Mais de ce que ces résultats ne peuvent être étendus *sans modification* à la deuxième espèce, il ne s'ensuit pas qu'ils ne peuvent être généralisés et c'est ce que nous allons chercher à faire.

Énonçons d'abord les résultats partiels qui subsistent sans changement.

1° Les coefficients d'une substitution S_i quelconque du groupe G sont plus petits que A^σ, A étant une constante et σ l'exposant de la substitution S_i.

2° Si l'on a

$$\Lambda_i(z)=Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h},$$

et que Λ_i s'annule ainsi que ses $p-1$ conjuguées en tous les sommets de la deuxième sorte de R_0, l'expression

$$\Lambda e^{mR},$$

où R désigne la distance non euclidienne de z à l'origine, tend vers zéro quand z tend vers l'un de ces sommets en suivant le périmètre de R_0.

3° Si de plus les Λ ne deviennent pas infinis le long du périmètre de R_0, on pourra trouver un nombre M tel que, le long de ce périmètre, on ait

$$|\Lambda|<M(e^{2R}+e^{-2R}+2)^{-h}.$$

4° Le périmètre d'une figure simplement connexe formée par un certain nombre de transformés de R_0 est toujours plus petit que π^2 (si nous nous restreignons à la deuxième famille, comme nous l'avons fait précédemment).

Il résulte de ce qui précède, et l'on peut s'en assurer en se reportant au paragraphe précédent, que si z est un point du périmètre du transformé de R_0 par une substitution s_i d'exposant σ, on a en ce point z

$$|\mathrm{A}| < \mathrm{A}^{\sigma}\mathrm{M}\,e^{-2h\mathrm{R}}.$$

Maintenant, voici le problème qu'il faudrait chercher à resoudre :

Trouver une fonction $\mathrm{F}(z)$ *telle que l'intégrale*

$$\int \frac{\mathrm{A}\,dz}{(z-x)\mathrm{F}}$$

tende vers zéro quand on la prend le long d'un contour convenablement choisi et se rapprochant indéfiniment du cercle fondamental.

Voici le contour que nous choisirons : Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ au point de vue non euclidien. Considérons l'ensemble des polygones transformés de R_0 et qui sont partiellement intérieurs à ce cercle. Cet ensemble formera une figure simplement connexe dont le périmètre sera plus petit que π^2 et dont tous les points seront à une distance non euclidienne de l'origine plus grande que ρ. Nous ferons ensuite croître ρ indéfiniment.

Voyons quelles sont les conditions qu'il nous faut pour cela imposer à la fonction F :

1° Lorsque z tend vers un sommet de la seconde sorte, en suivant le périmètre de R_0, F ne doit pas tendre vers zéro assez rapidement pour que

$$\left|\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{F}}\right|(e^{2\mathrm{R}}+e^{-2\mathrm{R}}+2)^{-h}$$

ne tende pas vers zéro.

2° Lorsque z se trouve sur le périmètre du transformé de R_0 par une substitution d'exposant σ, son module doit être plus grand que

$$\mathrm{BC}^{\sigma},$$

B et C étant des constantes suffisamment grandes.

Il est sans doute possible de trouver une pareille fonction F, mais ce n'est pas ainsi que nous procéderons ici. L'analogie avec la théorie des facteurs primaires de M. Weierstrass et avec le théorème de M. Mittag-Leffler va nous conduire à la généralisation cherchée.

Soit, en effet, $f(x)$ une fonction entière à decomposer en facteurs primaires. Supposons, par exemple, qu'elle n'a que des zeros simples $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Pour résoudre ce problème, on cherche à décomposer en fractions simples le quotient

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

et l'on obtient ce résultat par la considération de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^m(z-x)}\,\frac{f'(z)}{f(z)}$$

prise le long d'un cercle dont le centre est l'origine et dont le rayon croît indéfiniment.

Supposons d'abord que l'on puisse trouver un nombre m assez grand pour que cette intégrale tende vers zéro. On trouve alors

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{x^m}{a_i^m(x-a_i)} + \mathrm{P}(x),$$

$\mathrm{P}(x)$ étant un polynome entier d'ordre $m-1$.

Dans ce cas, la fonction $f(x)$ est dite, comme on sait, de première espèce et de genre m.

Si au contraire on ne peut pas trouver de nombre m assez grand pour que l'intégrale tende vers zéro, on fera croître le nombre m avec le rayon du cercle qui sert de contour d'intégration et l'on pourra toujours le faire croître assez vite pour que l'intégrale tende vers zéro. On trouve alors

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\left[\sum \frac{x^m}{a^m(x-a)} + \mathrm{P}(x)\right].$$

Dans cette expression, le signe $\sum$ se rapporte à l'ensemble des points a situés à l'intérieur du cercle de rayon R, et $\mathrm{P}(x)$ représente le polynome formé des m premiers termes du développement de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ suivant les puissances de x. Quand m et R croissent indéfiniment selon une certaine loi, le second membre tend vers une limite qui n'est autre chose que $\frac{f'(x)}{f(x)}$. C'est de cette expression qu'on peut déduire le développement de $\frac{f'}{f}$ sous forme de série :

$$\frac{f'}{f} = \sum \frac{x^\mu}{a^\mu(x-a)} + \mathrm{G}(x),$$

μ étant un entier, qui croît indéfiniment avec le module de a, et $\mathrm{G}(x)$ étant une transcendante entière.

La fonction entière $f(x)$ est alors de seconde espèce.

L'analogie avec le problème qui nous occupe est évidente. Les fonctions zétafuchsiennes de première espèce, dont nous avons parlé dans les paragraphes précédents, sont analogues aux transcendantes entières de première espèce et l'on en obtient le développement et la décomposition en éléments simples en remarquant que l'intégrale

$$\int \left(\frac{df}{dz}\right)^{-m} \frac{Z(z)}{z-x}\,dz$$

tend vers zéro quand le nombre m est suffisamment grand et que le contour d'intégration, d'ailleurs convenablement choisi, se rapproche indéfiniment du cercle fondamental.

Si au contraire $Z(z)$ est une fonction de seconde espèce, on ne peut plus trouver un nombre m assez grand pour qu'il en soit ainsi. On est donc conduit, au lieu de conserver à l'exposant m une valeur constante, à le faire croître indéfiniment en même temps que le contour d'intégration se rapproche du cercle fondamental, et cela assez vite pour que l'intégrale tende vers zéro.

Cela est toujours possible. Il faut toutefois faire une hypothèse sur la fonction fuchsienne $f(z)$ dont la dérivée $\frac{df}{dz}$ entre sous le signe $\int$ dans l'intégrale précédente. Il faut supposer que $\frac{df}{dz}$ croisse indéfiniment quand z tend vers un des sommets de R_0 situé sur le cercle fondamental, en suivant l'un des côtés de ce polygone. Il existe, en effet, une infinité de fonctions fuchsiennes admettant le groupe g et jouissant de cette propriété.

Mais nous pouvons généraliser un peu la forme de l'intégrale considérée en procédant de la manière suivante : Soient f et f_1 les deux fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et soit $F(x, y)$ une fonction rationnelle de x et de y, choisie de telle sorte que

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F(f, f_1)$$

tende vers zero quand z se rapproche indefiniment d'un sommet de R_0 situé sur le cercle fondamental.

Considérons alors l'intégrale

$$\int \left(\frac{df}{dz}\right)^{-\rho} F^{\rho} Z_a \frac{dz}{z-x}$$

prise le long du contour envisagé dans le paragraphe précédent et qui limite la portion du plan formée de tous les polygones transformés de R_0 qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle dont le centre est zéro et le rayon non euclidien R. Nous ferons croître μ indéfiniment en même temps que ce contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental, c'est-à-dire en même temps que la quantité R croît elle-même au delà de toute limite.

On peut d'abord trouver deux nombres M et λ tels que, le long du périmètre de R_0, le module de Z_i soit plus petit que

$$\mathrm{M}\, e^{\lambda t},$$

où

$$t = \frac{1}{1-|z|}.$$

De plus nous pouvons trouver deux nombres positifs N et α tels que, le long du périmètre de R_0, le module de

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}\mathrm{F}$$

soit plus petit que

$$\mathrm{N}\, e^{-\alpha t}(e^{2\rho}+e^{-2\rho}+2)^{-1},$$

ρ étant la distance non euclidienne des deux points o et z. Le module de la quantité sous le signe $\int$, en laissant de côté le facteur

$$\frac{1}{z-x}$$

dont le module est essentiellement fini, est plus petit que

$$\mathrm{M}\mathrm{N}^{\mu}\, e^{\lambda-\alpha\mu t}(e^{2\rho}+e^{-2\rho}+2)^{-\mu}$$

le long du périmètre de R_0.

Mais l'intégrale doit être prise le long d'un contour que nous avons défini plus haut, qui est formé de côtés appartenant à divers transformés de R_0 et qui est d'ailleurs tout entier extérieur au cercle de centre zéro et de rayon non euclidien R. Considérons un des côtés de ce contour appartenant à un polygone R_i transformé de R_0 par une substitution s_i. Soit zs_i ce point; le point correspondant du périmètre de R_0 sera z. Nous conserverons la notation

$$t = \frac{1}{1-|z|}$$

et nous appellerons ρ et ρ' les distances non euclidiennes des points z et zs_i au point zéro. Il vient alors

$$\rho' > \mathrm{R}.$$

Le module de Z au point zs_i est plus petit que le module de cette même fonction au point z multiplié par Λ^σ, Λ étant une constante convenablement choisie et σ étant l'exposant de la substitution s_i. Quant à

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F,$$

son module se trouve multiplié par

$$\left(\frac{e^{2\rho'}+e^{-2\rho'}+2}{e^{2\rho}+e^{-2\rho}+2}\right)^{-1}$$

quand on passe du point z au point zs_i. Il résulte de là qu'au point zs_i le module de la fonction sous le signe $\int$ est plus petit que

$$\Lambda^\sigma M N^\mu e^{(\lambda-\alpha\mu)t}(e^{2\rho'}+e^{-2\rho'}+2)^{-\mu}$$

ou que

$$\Lambda^\sigma M N^\mu e^{(\lambda-\alpha\mu)t} e^{-2\mu R}.$$

Je puis d'abord toujours supposer que Λ est plus petit que 1. En effet, s'il n'en était pas ainsi, je remplacerais la fonction F, que j'ai choisie arbitrairement parmi les fonctions fuchsiennes de groupe g, par la fonction $\frac{F}{\Lambda}$.

Si μ est suffisamment grand, le facteur $e^{(\lambda-\alpha\mu)t}$ est également plus petit que 1, de sorte qu'il reste à considérer les deux facteurs

$$\Lambda^\sigma e^{-2\mu R}.$$

On voit aisément que

$$\sigma < e^{\beta R},$$

β étant un nombre convenablement choisi; mais on peut faire croître μ assez rapidement avec R pour que

$$e^{\beta R}\log\Lambda - 2\mu R$$

tende vers $-\infty$. Dans ces conditions, la quantité sous le signe $\int$ tend vers zéro et, comme le périmètre d'intégration est fini, l'intégrale elle-même tend vers zéro. C. Q. F. D.

Quelle conclusion devons-nous tirer de là en ce qui concerne le développement de la fonction Z?

La fonction

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^\mu Z$$

a, à l'intérieur du contour d'intégration, le caractère d'une fonction rationnelle. Nous pourrons donc trouver une fonction rationnelle $Q(z)$ telle que la différence

$$\Delta = \left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^{\mu} Z - Q$$

soit holomorphe à l'intérieur de ce contour. Pour achever de déterminer la fonction rationnelle Q, nous supposerons que son numérateur est de degré inférieur à son dénominateur.

Dans ces conditions, la différence Δ tend vers zéro lorsque μ et R croissent indéfiniment. C'est là la conséquence immédiate de ce que nous avons vu au sujet de l'intégrale.

On voit par là que la fonction Z peut, avec une approximation aussi grande que l'on veut, être mise sous la forme d'une fonction rationnelle multipliée par une expression de la forme

$$\frac{1}{F^{\mu}}\left(\frac{df}{dz}\right)^{\mu},$$

F et f étant deux fonctions fuchsiennes.

C'est tout ce que j'ai pu trouver jusqu'ici comme extension aux fonctions de deuxième espèce des propriétés que nous avons démontrées plus haut. Je ne doute pas qu'on ne puisse arriver un jour à une théorie plus complète.

En attendant, nous pouvons toujours exprimer une fonction zétafuchsienne quelconque, soit sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de z, soit sous la forme du quotient de deux pareilles séries.

Soit d'abord, en effet, une équation linéaire

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \Sigma_k \varphi_k(x, y) \frac{d^k v}{dx^k} = 0,$$

les φ_k étant rationnels et x et y étant liés par la relation

$$\psi(x, y) = 0.$$

On pourra toujours remplacer x et y par deux fonctions fuchsiennes $f(z)$ et $f_1(z)$, *de la deuxième famille*, choisies de telle sorte qu'elles satisfassent à la relation

$$\psi(f, f_1) = 0,$$

et qu'elles ne puissent prendre aucune des valeurs qui correspondent aux points singuliers ni aux points à apparence singulière de l'équation précédente. Dans ces conditions, v sera une fonction zétafuchsienne de z ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental et développable par conséquent en série suivant les puissances de z. Les coefficients se calculent par récurrence.

Supposons maintenant que $Z(z)$ soit une fonction zétafuchsienne admettant des infinis à l'intérieur du cercle fondamental; elle ne pourra plus être développée en série ordonnée suivant les puissances de z et toujours convergente. Mais on pourra toujours trouver deux fonctions fuchsiennes f et F admettant le groupe g et un nombre entier m, tels que les deux fonctions

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^m \mathrm{F} \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dz}\right)^m \mathrm{FZ}$$

dont le quotient est Z, restent finies à l'intérieur du cercle fondamental. Elles pourront alors être développées en séries suivant les puissances croissantes de z. Quant aux coefficients, on pourra les calculer par récurrence, ainsi que nous l'avons dit plus haut.

IX. Fonctions diverses.

Les fonctions zétafuchsiennes, dont il a été question dans les paragraphes précédents, ne sont pas les seules que l'on peut imaginer. On peut construire, en effet, des fonctions zétafuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan: ce sont des fonctions qui subissent les substitutions linéaires d'un groupe G quand la variable subit les substitutions d'un groupe fuchsien g de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième familles. On peut aussi remplacer le groupe g par un groupe kleinéen, et l'on obtiendra de la sorte des fonctions zétakleinéennes, existant, soit dans toute l'étendue du plan, soit dans un certain domaine.

Cela suffit pour faire comprendre que, dans les cinq Mémoires des *Acta mathematica* que j'ai consacrés à l'étude des transcendantes fuchsiennes et kleinéennes, je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste, qui fournira sans doute aux géomètres l'occasion de nombreuses et importantes découvertes.

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

ET

L'ARITHMÉTIQUE [1].

Journal de Mathématiques, 4e série, t. 3, 1887; p. 405-464.

I. — Notations et définitions.

Dans le Mémoire qui va suivre, et qui a pour objet l'étude arithmétique des fonctions fuchsiennes, nous ferons usage d'un système abrégé de notations qui a déjà été assez souvent employé.

Nous désignerons une substitution linéaire quelconque par une seule lettre.

Ainsi soit

$$F(x, y, z)$$

une forme homogène en x, y et z.

Considérons une substitution linéaire portant sur ces trois variables et définie par le système de neuf coefficients

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par exemple cette substitution par la lettre S.

Alors la notation

$$F.S$$

désignera la forme

$$F(a_1 x + b_1 y + c_1 z,\ a_2 x + b_2 y + c_2 z,\ a_3 x + b_3 y + c_3 z).$$

Comme F.S sera aussi une forme homogène en x, y, z, nous pourrons lui

[1] Terminé le 18 mars 1887.

appliquer une autre substitution linéaire

$$S' = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix}.$$

Nous obtiendrons ainsi la forme

$$F\begin{bmatrix} a_1(a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z) + b_1(a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z) + c_1(a'_3 x + b'_3 y + c'_3 z), \\ a_2(a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z) + b_2(a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z) + c_2(a'_3 x + b'_3 y + c'_3 z), \\ a_3(a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z) + b_3(a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z) + c_3(a'_3 x + b'_3 y + c'_3 z) \end{bmatrix}$$

que nous désignerons par la notation

$$(F.S)S',$$

ou plus simplement

$$F.S.S'.$$

Cela définit en même temps la substitution SS' et montre que l'on a

$$F(SS') = (FS)S'.$$

Nous allons considérer en particulier la forme quadratique

$$\Phi = Y^2 - XZ,$$

dépendant des trois variables indépendantes X, Y et Z et les transformées de cette forme quadratique par diverses substitutions linéaires S. Il est aisé de trouver toutes les substitutions linéaires S qui n'altèrent pas Φ, c'est-à-dire qui sont telles que

$$\Phi.S = \Phi.$$

Mais il convient d'abord de distinguer ces substitutions en deux sortes.

Une transformation qui n'altère pas une forme quadratique peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Formons l'équation en S, du troisième degré

$$\begin{vmatrix} a_1 - S & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - S & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - S \end{vmatrix} = 0,$$

cette équation aura une racine égale à $+1$, ou une racine égale à -1. Dans le premier cas, la transformation sera dite *droite*; dans le second cas, elle sera *gauche*.

Dans ce qui va suivre, nous ne nous occuperons que des transformations droites, de déterminant $+1$. Il est aisé de voir alors que les substitutions semblables droites de la forme Φ peuvent s'écrire

$$S = \begin{vmatrix} \delta^2 & -\delta\gamma & \gamma^2 \\ -\delta\beta & \alpha\delta+\beta\gamma & -\alpha\gamma \\ \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \end{vmatrix},$$

où α, β, γ, δ sont quatre quantités quelconques telles que

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1.$$

Nous n'envisagerons que les substitutions à coefficients réels; nous supposerons donc que α, β, γ, δ sont réels, de sorte qu'on devra avoir

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Nous rejetterons également les substitutions de déterminant -1, de sorte qu'on aura enfin

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Nous avons appelé *substitutions fuchsiennes* les substitutions de la forme

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont des quantités réelles telles que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

On voit ainsi qu'à la substitution S correspondra une substitution fuchsienne

$$s = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Si S et S' sont deux transformations linéaires qui n'altèrent pas Φ, et que s et s' soient les substitutions fuchsiennes correspondantes, à la transformation SS' correspondra la substitution fuchsienne ss'.

A tout groupe discontinu de transformations n'altérant pas Φ correspondra un groupe fuchsien, et réciproquement.

Soit maintenant T une transformation linéaire de déterminant quelconque et qui altère Φ. Posons

$$F = \Phi . T.$$

La forme quadratique F sera inaltérée par certaines substitutions linéaires de déterminant 1, que nous appellerons, pour employer une expression consacrée par l'usage, *transformations semblables de* F.

A toute transformation semblable de F correspondra une transformation semblable de Φ.

Si en effet S est une transformation semblable de Φ, $T^{-1}ST$ sera une transformation semblable de F.

Ainsi, à tout groupe discontinu de transformations semblables de F correspondra un groupe de transformations semblables de Φ, et par conséquent un groupe fuchsien; et réciproquement.

Supposons que F ait ses coefficients entiers; parmi les transformations semblables de F nous distinguerons celles dont les coefficients sont entiers. Elles forment un groupe discontinu qui a déjà attiré l'attention de nombreux arithméticiens désireux de parcourir la voie qu'a ouverte M. Hermite.

A ce groupe discontinu correspondra donc un groupe fuchsien et par conséquent un système de fonctions fuchsiennes. De pareilles fonctions fuchsiennes pourront s'appeler *fonctions fuchsiennes arithmétiques* [Cf. *Comptes rendus des Sessions de l'Association française pour l'Avancement des Sciences*, t. X, p. 132-138, 16 avril 1881, et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Note du 29 mars 1886 (1)].

Le but du présent travail est l'étude de ces fonctions fuchsiennes arithmétiques et de leurs applications à la théorie des nombres.

Je me propose en particulier d'établir que ces fonctions admettent un théorème qui peut être regardé comme la généralisation du théorème d'addition des fonctions elliptiques, ce qui ne paraît pas avoir lieu pour les fonctions fuchsiennes ordinaires.

Pour compléter le système de définitions qui me seront nécessaires dans la suite, je vais rappeler ce qu'on doit entendre par *indice* d'un sous-groupe.

On peut trouver dans le groupe principal un certain nombre de substitutions

$$(1) \qquad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

telles que toute substitution du groupe principal puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$T_i S_k,$$

T_i étant une substitution du sous-groupe et S_k une substitution du système (1).

(1) Ce Tome, p. 64. N. E. N.

Le nombre des substitutions de ce système (qui peut d'ailleurs être infini) est l'indice du sous-groupe.

Le *groupe commun* à deux groupes G et G′ est le groupe formé de toutes les substitutions communes à G et à G′.

Deux groupes sont *commensurables* quand leur groupe commun est pour chacun d'eux un sous-groupe d'indice fini.

On définirait de même le groupe commun à trois groupes ou la commensurabilité de trois groupes.

Voici maintenant quelques propositions qu'on peut déduire immédiatement de ces définitions.

1° Soient G et G′ deux groupes quelconques, C leur groupe commun; soit g un sous-groupe d'indice fini de G; soit c le groupe commun à g et à G′; c sera un sous-groupe de C; je dis que ce sera un sous-groupe d'indice fini.

Soit n l'indice du sous-groupe g.

Soient

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

n substitutions convenablement choisies dans le groupe G. Toute substitution de G pourra se mettre sous la forme

$$T_i S_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

T_i étant une substitution de g.

Nous pourrons toujours supposer que S_1 se réduit à la substitution identique

$$S_1 = 1.$$

Formons le Tableau des substitutions de C, c'est-à-dire des substitutions communes à G et à G′. Nous pourrons les classer en n classes. Chacune d'elles peut, en effet, se mettre sous la forme $T_i S_k$ et k peut prendre n valeurs différentes. Il peut arriver toutefois qu'une ou plusieurs des classes ainsi définies ne contienne aucune substitution.

Soient

$$T'_1, \quad T'_2, \quad \ldots, \quad T'_i, \quad \ldots, \quad \text{à l'infini},$$

les substitutions de la première classe qui correspond au cas de $k = 1$ et de

$$S_k = S_1 = 1.$$

Ce seront, par définition, les substitutions du sous-groupe c.

Nous pourrons supposer

$$T'_1 = 1.$$

Soient maintenant

$$T''_1 S_2, \quad T''_2 S_2, \quad \ldots, \quad T''_i S_2, \quad \ldots$$

les substitutions de la seconde classe.

Je dis que toutes ces substitutions pourront se mettre sous la forme

$$T'_i T''_1 S_2,$$

T'_i étant une substitution de la première classe, c'est-à-dire du groupe c.

Je dis que l'on aura par exemple

$$T''_i S_2 = T'_i T''_1 S_2,$$

T'_i appartenant à c; cela revient à dire que

$$T''_i T''^{-1}_1$$

appartient à c. En effet, T''_i et T''_1 appartenant par hypothèse à g, il en est de même de $T''_i T''^{-1}_1$; de plus $T''_i S_2$ et $T''_1 S_2$ appartenant à G', il en sera encore de même de

$$T''_i S_2 (T''_1 S_2)^{-1} = T''_i T''^{-1}_1.$$

Cette dernière substitution, faisant partie à la fois de g et de G', fera partie du groupe commun c.

Ainsi le Tableau des substitutions du groupe C réparties en n classes pourra s'écrire

$$\begin{array}{lllll}
T'_1, & T'_2, & \ldots, & T'_i, & \ldots, \\
T''_1 S_2, & T'_2 T''_1 S_2, & \ldots, & T'_i T''_1 S_2, & \ldots, \\
T'''_1 S_3, & T'_2 T'''_1 S_3, & \ldots, & T'_i T'''_1 S_3, & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
T_1^{n} S_n, & T'_2 T_1^{n} S_n, & \ldots, & T'_i T_1^{n} S_n, & \ldots,
\end{array}$$

quelques-unes des classes pouvant manquer.

Par conséquent l'indice de c par rapport à C est au plus égal à l'indice de g par rapport à G.

2° Si g et g' sont deux sous-groupes d'indice fini de G et de G', leur groupe commun sera un groupe d'indice fini par rapport au groupe commun de G et de G'.

Cette proposition se déduit immédiatement de la précédente.

3° Si g et g' sont deux sous-groupes d'indice fini par rapport à un même groupe G, leur groupe commun sera encore un sous-groupe d'indice fini de G.

4° Si deux groupes G et G' sont commensurables à un même troisième G'', ils seront commensurables entre eux, et les trois groupes seront encore commensurables entre eux.

Soient en effet C_1, C_2, C_3 les groupes communs, respectivement à G' et à G'', à G'' et à G, et enfin à G et à G'.

Soit enfin c le groupe commun aux trois groupes G, G' et G''; c sera évidemment aussi le groupe commun à deux quelconques des trois groupes C_1, C_2 et C_3.

Par hypothèse, les indices de C_1 par rapport à G' et à G'', et de C_2 par rapport à G et à G'', sont finis.

Je dis que c est un sous-groupe d'indice fini de G''; c'est en effet le groupe commun à C_1 et à C_2, sous-groupes d'indice fini de G''.

Je dis également que c est un sous-groupe d'indice fini de G'; en effet, c est le groupe commun à G' et à C_2; C_2 est un sous-groupe d'indice fini de G''. Donc l'indice de c par rapport au groupe commun à G' et à G'', c'est-à-dire par rapport à C_1, est fini. Or l'indice de C_1 par rapport à G' est lui-même fini. Donc l'indice de c par rapport à G' est encore fini.

Rien ne distingue d'ailleurs G de G'. Donc l'indice de c par rapport aux trois groupes G, G' et G'' est fini; donc les trois groupes sont commensurables entre eux. C. Q. F. D.

C_3 contenant c aura évidemment un indice fini par rapport à G et à G'; d'où il suit que ces deux derniers groupes sont aussi commensurables entre eux.

II. — Réduction des formes.

Dans mon Mémoire sur les groupes kleinéens (*Acta mathematica*, t. 3, § II) [1], j'ai exposé la distinction entre les groupes proprement discontinus et les groupes improprement discontinus. On a vu qu'un groupe peut être proprement discontinu dans une région donnée de l'espace et improprement dans une autre région.

Ici, nous envisageons des formes quadratiques ternaires qui ont six coefficients; elles peuvent donc être regardées comme des ensembles à six dimensions (ou à cinq seulement si l'on suppose le discriminant donné). Les groupes que nous envisageons peuvent donc être proprement discontinus quand les six coefficients sont soumis à certaines inégalités, et ne plus l'être qu'improprement quand ces inégalités cessent d'être remplies. Par exemple, ils pourront l'être

---

(1) Ce Tome, p. 265 et suiv. N. E. N.

proprement en ce qui concerne les formes définies et improprement en ce qui concerne les formes indéfinies.

Considérons donc un groupe G formé de substitutions linéaires et proprement discontinu par rapport à toutes les formes quadratiques ternaires définies. Soient F et F' deux formes quadratiques ternaires définies; je dirai que ces deux formes sont équivalentes par rapport au groupe G quand on pourra passer de l'une à l'autre par une substitution de ce groupe. Parmi les formes équivalentes à F, il y en aura une que l'on regardera comme plus simple que toutes les autres et que l'on appellera la *réduite de* F.

Cette définition comporte évidemment un très grand arbitraire; on peut d'une infinité de manières trouver des inégalités telles que, parmi les formes équivalentes à F, il y en ait une et une seule qui y satisfasse (et cela quelle que soit F). Ce sont alors ces inégalités qui sont les conditions de réduction.

En d'autres termes, et pour employer un langage géométrique, considérons les six coefficients de notre forme quadratique comme les coordonnées d'un point dans l'espace à six dimensions. Cet espace sera divisé en deux régions, R correspondant aux formes définies et R' correspondant aux formes indéfinies. Notre groupe G sera proprement discontinu dans R, improprement dans R'. On pourra donc partager R en une infinité de régions partielles r_1, r_2, ..., *ad inf.*; de telle façon que les substitutions de G changent ces régions partielles les unes dans les autres. Cette subdivision sera tout à fait analogue à ce qu'est, dans la théorie des groupes fuchsiens, la subdivision du plan, ou d'une partie du plan, en une infinité de polygones curvilignes. Alors les formes réduites, par rapport au groupe G, seront celles qui correspondent à des points intérieurs à la première région partielle r_1.

Cette définition de la réduction par rapport à un groupe G est une généralisation immédiate de celle de la réduction arithmétique. Dans le cas de la réduction arithmétique, en effet, G n'est autre chose que le *groupe arithmétique*, qui est formé des substitutions linéaires à coefficients entiers et de déterminant 1. On peut prendre alors pour conditions de réduction, soit celles qui ont été adoptées par M. Selling, soit celles de MM. Korkine et Zolotareff. Mais on pourrait en imaginer une infinité d'autres.

Un autre cas particulier intéressant est celui où G est un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique. Alors une substitution quelconque du groupe arithmétique pourra se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$T_i S_k,$$

T_i étant une substitution de G et

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

étant des substitutions du groupe arithmétique dont le nombre n est précisément l'indice du sous-groupe.

Si alors F est une forme définie quelconque, sa réduite arithmétique s'écrira

$$FT_i S_k,$$

et nous pourrons convenir, pour définir la réduction par rapport au groupe G, de dire que sa réduite par rapport à ce groupe sera FT_i.

Tout cela ne peut pas s'étendre au cas des formes indéfinies, car les groupes qu'il pourrait être intéressant de considérer, et en particulier le groupe arithmétique, sont improprement discontinus pour ces formes indéfinies, c'est-à-dire dans la région que nous avons appelée R'.

Mais tous les arithméticiens connaissent l'ingénieux artifice par lequel M. Hermite, introduisant les variables continues dans la théorie des nombres, a le premier triomphé de cette difficulté.

En même temps que la forme indéfinie

$$\Phi = Y^2 - XZ,$$

envisageons la forme

$$H = Y^2 - \frac{X^2}{2} + \frac{Z^2}{2}$$

qui est définie. Si T est une substitution linéaire et si HT est une forme définie réduite par rapport au groupe G, nous dirons que la substitution T est réduite par rapport à G et que la forme indéfinie ΦT est également réduite par rapport à G.

Voici maintenant comment on pourra trouver les réduites d'une forme indéfinie

$$F = \Phi\tau.$$

On aura aussi

$$F = \Phi S \tau,$$

S étant une quelconque des substitutions

$$\begin{vmatrix} \delta^2 & -2\delta\gamma & \gamma^2 \\ -\delta\beta & \alpha\delta+\beta\gamma & -\alpha\gamma \\ \beta^2 & -2\alpha\beta & \alpha^2 \end{vmatrix},$$

où α, β, γ, δ sont quatre quantités réelles quelconques telles que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Ce groupe des substitutions S, qui n'altèrent pas Φ, s'appellera *groupe reproductif de* Φ.

Considérons la forme définie $HS\tau$; il y aura toujours, d'après ce qui précède, dans le groupe G une substitution T qui réduira cette forme quadratique définie par rapport au groupe G. La forme $HS\tau T$ sera alors réduite. La substitution $S\tau T$ sera réduite, et la forme indéfinie

$$\Phi S\tau T = F_1 T$$

sera réduite. La substitution T sera alors l'une des substitutions réductrices de F. Comme il y a une infinité de substitutions S, la forme F admettra en général une infinité des substitutions réductrices.

Il peut se faire que deux substitutions réductrices T et T′ conduisent à une même réduite, et qu'on ait

$$FT = FT'.$$

En ce cas, $T^{-1}T'$ est l'une des substitutions de G qui n'altèrent pas F.

Il peut donc arriver que le nombre des réduites soit fini, bien que celui des substitutions réductrices soit infini. C'est ce qui se passe, par exemple, si F a ses coefficients entiers et si G est le groupe arithmétique.

Il en est encore de même si, les coefficients de F étant entiers, G est un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique.

J'appellerai *groupe reproductif* de F le groupe des substitutions linéaires de déterminant $+1$ qui n'altèrent pas cette forme. Ce sera le transformé par la substitution τ du groupe reproductif de Φ, car toute substitution qui n'altère pas F peut se mettre sous la forme

$$\tau^{-1}S\tau,$$

S n'altérant pas Φ.

J'appellerai *sous-groupe inaltérant* de G par rapport à F le groupe commun à G et au groupe reproductif de F. Le transformé de ce sous-groupe par la substitution τ^{-1} sera le *groupe inaltérant transformé* relatif à G et à F. Ce sera un sous-groupe du groupe reproductif de Φ.

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'à toute substitution du groupe reproductif de Φ correspond une substitution fuchsienne *s*. Donc, au groupe inaltérant transformé relatif à G et F, correspondra un certain groupe fuchsien, que j'appellerai *groupe fuchsien relatif à* G *et à* F.

Nous adopterons des dénominations spéciales, pour abréger le langage, dans le cas où G sera le groupe arithmétique. Le sous-groupe inaltérant s'appellera le *groupe principal de* F; le groupe inaltérant transformé s'appellera le *groupe transformé principal de* F; enfin le groupe fuchsien relatif à F et au groupe arithmétique s'appellera le *groupe fuchsien principal de* F.

Il résulte de là que, pour étudier le groupe principal de F, formé des substitutions semblables de F, il suffit d'étudier le groupe fuchsien principal de F.

Nous adopterons le mode suivant de représentation géométrique :

Nous considérons un plan représentant la variable imaginaire z; nous ferons correspondre à la substitution S la substitution

$$s = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

que nous représenterons elle-même par le point du plan des z qui a pour affixe

$$\frac{\alpha\sqrt{-1} + \beta}{\gamma\sqrt{-1} + \delta}.$$

Ce point fait partie du demi-plan situé au-dessus de l'axe des quantités réelles. A chaque substitution S correspondra un point de ce demi-plan, mais à chaque point du demi-plan correspondront une infinité de substitutions S faisant partie du groupe reproductif de Φ.

Nous regarderons comme donnés le groupe G et la transformation τ qui change Φ en F.

Voici alors comment se présentera géométriquement la réduction de F par rapport à G :

A chaque substitution S et, par conséquent, à chaque forme quadratique définie H.S correspondra un point de notre demi-plan. Je dis maintenant qu'à chaque point de ce demi-plan, auquel correspondent pourtant une infinité de substitutions S, ne correspondra pourtant qu'une seule forme définie H.S.

Soient, en effet, S et S' deux substitutions correspondant à un même point P de notre demi-plan. Je dis que

$$\text{H.S} = \text{H.S}',$$

c'est-à-dire

$$\text{H.SS}'^{-1} = \text{H}.$$

En effet, les substitutions fuchsiennes s et s' qui correspondent respectivement à S et S' changent toutes deux le point $\sqrt{-1}$ dans le point P. Donc la substitution ss'^{-1} n'altérera pas le point $\sqrt{-1}$.

On en conclura que les valeurs des quatre quantités α, β, γ, δ, qui correspondent à ss'^{-1}, ou ce qui revient au même à SS'^{-1}, sont

$$\alpha = \cos\varphi, \qquad \beta = \sin\varphi, \qquad \gamma = -\sin\varphi, \qquad \delta = \cos\varphi,$$

φ étant un angle quelconque; d'où l'on déduira sans peine que la substitution SS'^{-1} s'écrit

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \\ -\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & -2\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi \end{vmatrix},$$

et, par conséquent, qu'elle n'altère pas H. C. Q. F. D.

A chaque point du demi-plan correspond donc une seule forme H.S, par conséquent une seule forme ΦS. Connaissant la forme définie $HS\tau$, on connaîtra la substitution réductrice T qui fait partie du groupe G et réduit $HS\tau$ par rapport à G.

A chaque point du demi-plan correspondra de la sorte une substitution réductrice et une seule. Nous pourrons donc subdiviser ce demi-plan en une infinité de régions, telles que, pour les points d'une même région, la substitution réductrice soit la même.

Ce mode de représentation géométrique est analogue, mais non identique à celui qu'a employé M. Selling.

Nous avons vu que, dans certains cas, bien qu'il y ait une infinité de substitutions réductrices, il n'y avait qu'un nombre fini de réduites. Qu'arrive-t-il alors? Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nos n réduites. Nous avons subdivisé le plan en une infinité de régions qui correspondent aux différentes substitutions réductrices. Soient $r_{10}, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1i}, \ldots$ une infinité de ces régions correspondant à la réduite f_1, elles seront les transformées les unes des autres par les diverses substitutions du groupe fuchsien relatif à F et à G. Soient de même $r_{20}, r_{21}, \ldots, r_{2i}, \ldots$ les régions qui correspondent à la réduite $f_2, \ldots$. Soient enfin $r_{n0}, r_{n1}, \ldots$ les régions qui correspondent à la réduite f_n.

Nous pourrons toujours supposer qu'on a choisi les indices de telle sorte que $r_{2i}, \ldots, r_{ni}$ soient les transformées de $r_{20}, \ldots, r_{n0}$ par la même substitution qui change r_{10} en r_{1i}.

Cela posé, réunissons $r_{10}, r_{20}, \ldots, r_{n0}$ en une région unique R_0 et de même $r_{1i}, r_{2i}, \ldots, r_{ni}$ en une région unique R_i. Les diverses régions R_i seront les transformées les unes des autres par les diverses substitutions du groupe fuchsien relatif à F et à G.

Il serait aisé de ramener ces régions $R_0, \ldots, R_i, \ldots$ à des polygones curvilignes, comme je l'ai expliqué dans le paragraphe IV de mon Mémoire sur les groupes fuchsiens [*Acta mathematica*, t. I (¹)].

Avant de terminer ce paragraphe, je dois faire une dernière remarque. Nous avons regardé comme donnée la substitution τ qui change Φ en F. Il ne suffit pas, pour cela, de se donner F. En effet, cette forme peut dériver de Φ d'une infinité de manières; on a non seulement

$$F = \Phi.\tau,$$

mais encore

$$F = \Phi.S.\tau,$$

S étant une substitution quelconque du groupe reproductif de Φ.

Il est clair, si l'on se reporte aux définitions qui précèdent, que le groupe fuchsien relatif à F et à G ne sera pas le même selon qu'on regardera F comme dérivée de Φ par la substitution τ ou par la substitution $S\tau$.

Quand cela sera nécessaire, afin d'éviter toute confusion, nous distinguerons ces deux cas en disant, dans le premier, le groupe fuchsien relatif à G et à $F = \Phi\tau$; dans le second, le groupe fuchsien relatif à G et à $F = \Phi S\tau$.

Le groupe fuchsien relatif à G et à $F = \Phi S\tau$ sera le transformé du groupe fuchsien relatif à G et $F = \Phi\tau$ par la substitution s^{-1}, s étant la substitution fuchsienne qui correspond à S, en vertu des conventions faites. En particulier, le groupe fuchsien principal de $F = \Phi S\tau$ sera le transformé du groupe fuchsien principal de $F = \Phi\tau$ par s^{-1}.

III. — Lemmes divers.

Lemme I. — *Si g est un sous-groupe d'indice fini de G, le groupe fuchsien relatif à g et à F sera un sous-groupe d'indice fini du groupe fuchsien relatif à G et à F.*

C'est une conséquence des lemmes démontrés à la fin du paragraphe I et des définitions du paragraphe II.

Lemme II. — *Si G et G' sont deux groupes commensurables, les groupes fuchsiens de F relatifs respectivement à G et à G' sont aussi commensurables.*

Ce lemme est une conséquence immédiate du précédent et des définitions.

(¹) Ce Tome, p. 122 et suiv. N. E. N.

Lemme III. — *Soit $F = \Phi\tau$; soient ensuite T' une substitution de G et $F' = \Phi\tau T'$ une forme équivalente à F par rapport au groupe G. Les deux formes F et F' auront même groupe fuchsien relatif à G.*

En effet, le sous-groupe inaltérant g' de G par rapport à F' sera le transformé par la substitution T' du sous-groupe inaltérant g de G par rapport à F.

Si, en effet, U est une substitution du second sous-groupe g, de telle sorte que

$$F = FU,$$

on aura

$$F' = FT' = FUT' = F'T'^{-1}UT',$$

de telle façon que $T'^{-1}UT'$ appartiendra au premier sous-groupe g'.

Le groupe inaltérant transformé de F sera le transformé de g par τ^{-1}, ce sera donc

$$\tau g \tau^{-1}.$$

De même, le groupe inaltérant transformé de $F' = \Phi\tau T'$ sera

$$\tau T' g' T'^{-1} \tau^{-1}.$$

Mais nous venons de voir que

$$g' = T'^{-1} g T'.$$

Il vient donc

$$\tau T' g' T'^{-1} \tau^{-1} = \tau g \tau^{-1},$$

de sorte que les deux groupes inaltérants transformés se confondent.

Les deux groupes fuchsiens se confondront donc également.

C. Q. F. D.

En particulier, si G est le groupe arithmétique, le groupe fuschien de $F = \Phi\tau$ par rapport à un groupe commensurable à G sera commensurable avec le groupe fuchsien principal de $F = \Phi\tau$.

Si T' est une substitution à coefficients entiers, les deux formes équivalentes $F = \Phi\tau$ et $F' = \Phi\tau T'$ auront même groupe fuchsien principal.

Lemme IV. — *Si G et G' sont deux groupes commensurables, et si S est une substitution de G', une des puissances entières de S (d'exposant différent de 0) fera partie de G.*

Soit, en effet, g le groupe commun de G et G'; soit n l'indice du sous-groupe g par rapport à G'; cet indice est fini par hypothèse.

Si alors on prend au hasard $n+1$ substitutions dans G' (parmi lesquelles on peut toujours supposer que l'on comprend la substitution identique 1), on pourra toujours trouver parmi elles deux substitutions S_i et S_k, telles que

$$S_i S_k^{-1}$$

appartienne à g et, par conséquent, à G.

Prenons, par exemple,

$$S^0 = 1, \quad S, \quad S^2, \quad S^3, \quad \ldots, \quad S^n,$$

qui toutes font partie du groupe G'; soient alors

$$S_i = S^i, \quad S_k = S^k.$$

Alors

$$S_i S_k^{-1} = S^{i-k}$$

fera partie de G. C. Q. F. D.

Nous allons étudier maintenant quelques-uns des sous-groupes du groupe arithmétique. Ce groupe est formé, d'après sa définition, de toutes les substitutions

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

dont les coefficients sont entiers, et le determinant égal à 1.

Pour definir un sous-groupe du groupe arithmétique, il faut donc assujettir les coefficients entiers a, b, c à de nouvelles conditions.

Je distinguerai les *sous-groupes à congruences* où les neuf coefficients a, b, c sont assujettis à satisfaire à certaines congruences suivant un certain module q premier ou composé.

LEMME V. — *Un sous-groupe à congruences est toujours un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique.*

Soit, en effet, g un sous-groupe défini par les k congruences

(1) $$P_1 \equiv P_2 \equiv \ldots \equiv P_k \equiv 0 \pmod{q},$$

où les P sont des polynomes entiers par rapport aux a, b, c.

Les congruences (1) devront être satisfaites si l'on fait

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \equiv b_2 \equiv c_3 \equiv 1 \\ a_2 \equiv a_3 \equiv b_1 \equiv b_3 \equiv c_1 \equiv c_2 \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{q},$$

et, en effet, la substitution identique

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

devra faire partie de g.

Le sous-groupe g', défini par les congruences (2), sera donc un sous-groupe du groupe g qui est lui-même un sous-groupe du groupe arithmétique.

Il est évident que g' sera un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique; car cet indice sera certainement plus petit que q^9 (il se réduira à q^8 si q est premier), puisque chacun des neuf coefficients a, b, c peut prendre q valeurs incongrues par rapport au module q.

Donc *a fortiori* g sera un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique.

C. Q. F. D.

Considérons maintenant une transformation T′ à coefficients entiers, mais dont le déterminant soit égal à un entier Δ plus grand que 1.

Soient G le groupe arithmétique, G′ son transformé par T′, g le groupe commun à G et à G′; je dis que g sera un sous-groupe à congruences.

Soit, en effet,

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

une substitution à coefficients entiers faisant partie de G.

Soit

$$T' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

la substitution définie plus haut.

La transformée de S par T′ s'écrira

$$T'^{-1}ST' = \begin{vmatrix} \frac{P_1}{\Delta} & \frac{P_2}{\Delta} & \frac{P_3}{\Delta} \\ \frac{P_4}{\Delta} & \frac{P_5}{\Delta} & \frac{P_6}{\Delta} \\ \frac{P_7}{\Delta} & \frac{P_8}{\Delta} & \frac{P_9}{\Delta} \end{vmatrix},$$

les P étant des polynomes entiers homogènes et du premier degré par rapport aux a, b et c, et dont les coefficients dépendent des α, β et γ.

Pour que cette substitution fasse partie de g, il faut et il suffit que ses coefficients soient entiers, ce qui s'exprime par les neuf congruences

$$P_i \equiv 0 \pmod{\Delta}.$$

Cela montre que g est un sous-groupe à congruences; d'où l'on déduit aisément le lemme suivant :

Lemme VI. — *Le groupe arithmétique est commensurable avec son transformé par une substitution à coefficients entiers de déterminant plus grand que* 1.

Ou, ce qui revient au même :

Le groupe arithmétique est commensurable avec son transformé par une substitution à coefficients fractionnaires.

Soit maintenant T' une substitution à coefficients fractionnaires; je dirai que *la forme* F *est commensurable* avec sa transformée FT' par la substitution T'.

Lemme VII. — *Considérons deux formes commensurables* F *et* FT'; *le groupe fuchsien principal de* $F = \Phi\tau$ *sera commensurable avec le groupe fuchsien principal de* $FT' = \Phi\tau T'$.

En effet, le groupe arithmétique est commensurable avec le groupe G qui est son transformé par T'^{-1}.

Soit g le sous-groupe inaltérant de G par rapport à F; il sera commensurable avec le groupe principal de F.

D'autre part, le groupe principal de FT' sera le transformé de g par T'.

Le groupe transformé principal de $F = \Phi\tau$ sera le transformé par τ^{-1} du groupe principal de F; le groupe transformé principal de $FT' = \Phi\tau T'$ sera le transformé par $(\tau T')^{-1} = T'^{-1}\tau^{-1}$ du groupe principal de FT', et, par conséquent, le transformé par τ^{-1} du groupe g.

Or g et le groupe principal de F sont commensurables.

Donc les groupes transformés principaux de $F = \Phi\tau$ et de $FT' = \Phi\tau T'$ le sont également.

Donc les groupes fuchsiens principaux de $F = \Phi\tau$ et de $FT' = \Phi\tau T'$ sont commensurables. C. Q. F. D.

IV. — Substitutions fractionnaires.

On peut se proposer de rechercher quelles sont les substitutions à coefficients fractionnaires qui n'altèrent pas une forme F à coefficients entiers, ou, en d'autres termes, quelles sont les transformations semblables fractionnaires de F. Il est aisé de prévoir, d'ailleurs, que le groupe formé par ces transformations ne sera pas un groupe discontinu.

On voit aussi immédiatement que des substitutions semblables fractionnaires de F on pourra déduire les substitutions semblables fractionnaires d'une forme F' = FT commensurable avec F. En effet, les dernières seront les transformées des premières par la transformation T.

Soit donc à trouver les substitutions semblables fractionnaires de la forme

$$F = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy.$$

On a

$$\begin{aligned} A(AA' - B''^2)F = (AA' - B''^2)(Ax + B''y + B'z)^2 \\ + [(AA' - B''^2)y + (AB - B''B')z]^2 - A\Delta z^2, \end{aligned}$$

Δ désignant le discriminant de F, de telle sorte que la forme F est, à un facteur constant près, commensurable avec

$$F' = (AA' - B''^2)(x^2 + y^2) + A\Delta z^2.$$

Nous sommes donc ramenés à étudier les substitutions semblables fractionnaires des formes telles que

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

ou plutôt, puisque nous avons affaire à une forme indéfinie, et si nous voulons mettre les signes en évidence,

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2.$$

Nous allons d'abord nous poser le problème suivant :

Quelles sont les substitutions fractionnaires qui n'altèrent ni z ni $Ax^2 + By^2$?

Il faut alors trouver quatre nombres fractionnaires α, β, γ, δ, tels que

$$A(\alpha x + \beta y)^2 + B(\gamma x + \delta y)^2 = Ax^2 + By^2.$$

Nous mettrons les quatre nombres α, β, γ, δ sous la forme

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\varepsilon}, \qquad \beta = \frac{\beta_1}{\varepsilon}, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1}{\varepsilon}, \qquad \delta = \frac{\delta_1}{\varepsilon};$$

α_1, β_1, γ_1, δ_1, ε étant entiers ou fractionnaires, nous pourrons toujours supposer que α_1, γ_1 et ε sont entiers : on aura alors

$$\begin{aligned}
\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 &= \varepsilon^2,\\
A\alpha_1^2 + B\gamma_1^2 &= A\varepsilon^2,\\
A\alpha_1\beta_1 + B\gamma_1\delta_1 &= 0,\\
A\beta_1^2 + B\delta_1^2 &= B\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Supposons que l'on ait trouvé trois entiers α_1, γ_1 et ε satisfaisant à

$$A\alpha_1^2 + B\gamma_1^2 = A\varepsilon^2,$$

il suffira de prendre

$$\beta_1 = -\frac{B\gamma_1}{A}, \qquad \delta_1 = \alpha_1$$

pour satisfaire aux trois autres équations.

Il reste donc à résoudre l'équation

$$B\gamma_1^2 = A(\varepsilon - \alpha_1)(\varepsilon + \alpha_1).$$

Nous multiplierons donc B par un carré quelconque γ_1^2, mais de telle façon que $B\gamma_1^2$ soit divisible par A, et de plus soit impair ou divisible par 4 (ainsi, si B est un multiple de $4 + 2$, γ_1 devra être pair; si $A = A_1 A_2^2$, A_1 n'étant divisible par aucun carré, γ_1 devra être divisible par $A_1 A_2$).

Il sera facile ensuite de décomposer $\frac{B\gamma_1^2}{A}$ en deux facteurs tous deux pairs ou tous deux impairs, $\varepsilon - \alpha_1$ et $\varepsilon + \alpha_1$, et d'en déduire, pour ε et α_1, deux valeurs entières.

Tel est donc le moyen de former les substitutions semblables fractionnaires de la forme binaire

$$Ax^2 + By^2.$$

Pour les étudier plus complètement, nous supposerons $A = 1$. Cette hypothèse est toujours permise; car si l'on avait $A > 1$, on multiplierait la forme par A, et l'on changerait ensuite de variable en posant $Ax = x'$.

Considérons notre substitution fractionnaire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\varepsilon} & -\frac{B\gamma_1}{\varepsilon} \\ \frac{\gamma_1}{\varepsilon} & \frac{\alpha_1}{\varepsilon} \end{vmatrix},$$

et la substitution fuchsienne correspondante. Cette dernière sera évidemment une substitution elliptique qui n'altérera pas un certain point du plan. Ce point, que j'appelle P, se détermine aisément, et l'on trouve qu'il est le même pour toutes les substitutions fractionnaires de notre forme

$$x^2 - By^2.$$

Pour définir une substitution fuchsienne elliptique, il faut se donner non seulement le point P qui n'est pas altéré par cette substitution, mais encore l'angle de rotation φ.

Ici nous avons

$$\cos\frac{1}{2}\varphi = \alpha = \frac{\alpha_1}{\varepsilon},$$

d'où l'on déduit

$$\sin\frac{1}{2}\varphi = -\frac{\gamma_1\sqrt{B}}{\varepsilon}.$$

Nous aurons alors

$$(\alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B})(\alpha_1 - \gamma_1\sqrt{-B}) = \varepsilon^2.$$

Nous devons supposer que α_1, γ_1 et ε sont premiers entre eux, et par conséquent que α_1 et γ_1 sont premiers entre eux. Les deux nombres complexes

$$\alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B} \quad \text{et} \quad \alpha_1 - \gamma_1\sqrt{-B}$$

seront alors aussi premiers entre eux, et l'on aura

$$\varepsilon = MN, \qquad \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B} = M^2, \qquad \alpha_1 - \gamma_1\sqrt{-B} = N^2,$$

M et N étant deux nombres complexes existants ou idéaux, conjugués entre eux et de plus premiers entre eux.

Cela posé, cherchons d'abord si φ peut être commensurable avec 2π. Si cela était, on trouverait un nombre entier m tel que

$$(\alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B})^m = \varepsilon^m$$

ou que

$$M^m = N^m;$$

M et N étant premiers entre eux, cette égalité est impossible. Il n'y aurait exception que si ε était égal à 1 et que $\alpha_1 - \gamma_1\sqrt{-B}$ fût une unité complexe.

Mais il faut faire attention au sens que l'on doit attacher à ce mot. Pour que la théorie des nombres complexes idéaux soit applicable, il faut prendre pour base du système $\sqrt{-B}$, si $-B$ (que d'ailleurs nous supposerons n'être divisible par aucun carré) est multiple de 4 plus 2 ou plus 1; il faut prendre, au contraire,

$$\frac{1+\sqrt{-B}}{2},$$

si B est multiple de 4 plus 3. Dans ce dernier cas,

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-B}}{2}$$

est considéré comme un entier complexe si $\alpha+\beta$ est pair (voir DEDEKIND, *Théorie des nombres entiers algébriques*, p. 91. Paris, Gauthier-Villars, 1877).

Alors on a, comme unités complexes,

$$\pm 1, \quad \pm\sqrt{-1}, \quad \frac{\pm 1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

On doit donc conclure de cette discussion que l'angle φ ne peut être commensurable avec 2π que s'il est égal à π, à $\pm\frac{\pi}{2}$, à $\pm\frac{\pi}{3}$ ou à $\pm\frac{2\pi}{3}$.

On voit, de plus, que les substitutions fractionnaires qui reproduisent à la fois les deux formes

$$z \quad \text{et} \quad x^2+By^2$$

correspondent aux divers entiers complexes formés avec $\sqrt{-B}$, et que leur théorie dépend intimement de celle de ces nombres complexes et des idéaux correspondants.

Voilà donc une première catégorie de substitutions fractionnaires n'altérant pas la forme

$$x^2+By^2-Cz^2.$$

Une autre catégorie se composera des substitutions qui n'altèrent ni y, ni x^2-Cz^2 (sans parler d'une autre catégorie qui sera formée de même des substitutions qui n'altèrent ni x, ni By^2-Cz^2). Ces substitutions correspondront aux nombres complexes formés avec $\sqrt{C}$ comme celles de la première catégorie correspondaient aux nombres complexes formés avec $\sqrt{-B}$. Mais l'analogie de ces trois catégories de substitutions fractionnaires est trop évidente pour qu'il soit nécessaire d'insister.

Je dis maintenant que toute substitution fractionnaire peut toujours être ramenée à celles que nous venons d'étudier.

Soit, en effet,

$$S=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

une substitution fractionnaire quelconque qui n'altère pas une certaine forme quadratique F à coefficients entiers ou commensurables. Je supposerai, de plus, que cette substitution est droite au sens donné à ce mot dans le premier paragraphe de ce Mémoire.

On pourra trouver alors une forme linéaire

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$

à coefficients entiers, qui ne sera pas altérée par la substitution.

On pourra ensuite trouver encore deux formes linéaires

$$\begin{gathered}\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,\\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z\end{gathered}$$

à coefficients entiers, et telles que l'on puisse écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{F} = {}& \mathrm{A}_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)^2\\ &+ \mathrm{A}_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)^2\\ &+ \mathrm{A}_3(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z)^2,\end{aligned}$$

A_1, A_2 et A_3 étant des quantités commensurables positives ou négatives.

Effectuons maintenant un changement linéaire de variables en faisant

$$\begin{aligned}x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,\\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,\\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z;\end{aligned}$$

il viendra

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}_1 x'^2 + \mathrm{A}_2 y'^2 + \mathrm{A}_3 z'^2,$$

de telle sorte que, si l'on appelle T la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix},$$

on aura

$$\mathrm{FT}^{-1} = \mathrm{A}_1 x^2 + \mathrm{A}_2 y^2 + \mathrm{A}_3 z^2.$$

La substitution

$$\mathrm{TST}^{-1}$$

sera fractionnaire et n'altérera pas FT^{-1}. Mais il y a plus, elle n'altérera pas z, ni par conséquent

$$\mathrm{A}_1 x^2 + \mathrm{A}_2 y^2.$$

Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

Il conviendrait peut-être, pour compléter cette théorie, de dire quelques mots des substitutions fractionnaires gauches qui n'altèrent pas une forme quadratique. Mais je ne crois pas devoir m'y arrêter pour le moment. Je me bornerai à observer que, si S est une substitution fractionnaire gauche n'altérant pas F, S^2 sera une substitution fractionnaire droite n'altérant pas non plus F.

V. — Calcul des multiplicateurs.

Soit

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

une substitution linéaire de déterminant 1, et

$$T^{-1}ST = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix}$$

sa transformée par une substitution linéaire quelconque T. On aura

$$a_1 + b_2 + c_3 = a'_1 + b'_2 + c'_3.$$

En d'autres termes, la somme $a_1 + b_2 + c_3$ sera un invariant. On pourra choisir la substitution T de telle façon que $T^{-1}ST$ soit de la forme canonique

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}.$$

Alors λ_1, λ_2 et λ_3 seront les multiplicateurs de la substitution S; ces multiplicateurs seront les racines de l'équation en λ,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on aura

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_1 + b_2 + c_3.$$

Si, en particulier, S n'altère pas une forme quadratique et est une substitution droite, l'un des multiplicateurs est égal à 1, et le produit des deux autres est aussi égal à 1.

Soit alors

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

la substitution fuchsienne correspondant à S; $\alpha+\delta$ sera, pour cette substitution, un invariant comme $a_1+b_2+c_3$ l'était pour S, et l'on aura d'ailleurs

$$(\alpha+\delta)^2 = a_1+b_2+c_3+1.$$

Il résulte de là que la connaissance de $\alpha+\delta$ suffit pour déterminer les trois multiplicateurs, qui devront satisfaire à l'équation du troisième degré

$$\lambda^3-1-[(\alpha+\delta)^2-1](\lambda^2-\lambda)=0.$$

Si S est une substitution à coefficients entiers, la somme $a_1+b_2+c_3$ devra être un entier, et par conséquent $\alpha+\delta$ devra être la racine carrée d'un entier.

La somme $\alpha+\delta$ s'appellera *l'invariant de la substitution* S et s'écrira, pour abréger, $[S]$.

Nous allons traiter maintenant le problème suivant :

On se donne $[A]$, $[B]$ *et l'invariant* $[AB]$ *de la combinaison* AB *des deux substitutions* A *et* B. *On demande de calculer l'invariant d'une combinaison quelconque de ces deux substitutions*

$$A^m B^n,\quad A^m B^n A^p,\quad A^m B^n A^p B^q,\quad \ldots,$$

m, n, p, q étant des entiers quelconques positifs ou négatifs.

Tout d'abord, il est évident que deux substitutions inverses l'une de l'autre auront même invariant; on aura

$$[A]=[A^{-1}],\qquad [B]=[B^{-1}],\qquad \ldots.$$

De plus, une substitution aura même invariant que sa transformée par une substitution quelconque; ainsi

$$[A]=[B^{-1}AB],$$
$$[A^m B^n A^p B^q]=[B^q A^m B^n A^p],$$

et, en particulier,

$$[BA]=[AB]=[A^{-1}B^{-1}]=[B^{-1}A^{-1}].$$

Je vais maintenant chercher une relation entre

$$[A],\quad [B],\quad [AB]\quad \text{et}\quad [AB^2].$$

Nous pouvons toujours, par une transformation convenable, mettre la substitution fuchsienne qui correspond à B sous la forme

$$\left[z, \frac{\lambda z}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)}\right].$$

Soit ensuite

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

la substitution fuchsienne correspondant à A. Alors

$$\left(z, \frac{\alpha\lambda z + \beta\lambda}{\frac{\gamma}{\lambda} z + \frac{\delta}{\lambda}}\right) \quad \text{et} \quad \left(z, \frac{\alpha\lambda^2 z + \beta\lambda^2}{\frac{\gamma}{\lambda^2} z + \frac{\delta}{\lambda^2}}\right)$$

seront les substitutions fuchsiennes correspondant respectivement à AB et à AB², de sorte qu'on aura

$$\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = [\mathrm{B}], \qquad \alpha + \delta = [\mathrm{A}],$$

$$\alpha\lambda + \frac{\delta}{\lambda} = [\mathrm{AB}], \qquad \alpha\lambda^2 + \frac{\delta}{\lambda^2} = [\mathrm{AB}^2].$$

On en tire aisément, par l'élimination de α, δ et λ,

$$[\mathrm{AB}][\mathrm{B}] = [\mathrm{A}] + [\mathrm{AB}^2].$$

Si, dans la formule précédente, on change A en AB^n, il vient

$$[\mathrm{AB}^{n+2}] = [\mathrm{AB}^{n+1}][\mathrm{B}] - [\mathrm{AB}^n].$$

C'est une formule de récurrence qui permet de calculer $[\mathrm{AB}^n]$, où n est un entier quelconque positif ou négatif, quand on connaît $[\mathrm{A}]$, $[\mathrm{B}]$ et $[\mathrm{AB}]$.

Aussi, connaissant $[\mathrm{A}]$, $[\mathrm{B}]$ et $[\mathrm{AB}]$, nous pouvons en déduire $[\mathrm{AB}^n]$, et par conséquent $[\mathrm{B}^n\mathrm{A}]$, puisque

$$[\mathrm{B}^n\mathrm{A}] = [\mathrm{AB}^n].$$

Nous connaissons ainsi

$$[\mathrm{B}^n\mathrm{A}], \quad [\mathrm{B}^n] \quad \text{et} \quad [\mathrm{A}],$$

ce qui permet de calculer $[\mathrm{B}^n\mathrm{A}^m]$, où m et n sont des entiers quelconques, par la formule de récurrence

$$[\mathrm{B}^n\mathrm{A}^{m+2}] = [\mathrm{B}^n\mathrm{A}^{m+1}][\mathrm{A}] - [\mathrm{B}^n\mathrm{A}^m].$$

Nous avons d'ailleurs

$$[\mathrm{B}^n\mathrm{A}^m] = [\mathrm{A}^m\mathrm{B}^n] = [\mathrm{A}^{m-p}\mathrm{B}^n\mathrm{A}^p] = [\mathrm{B}^p\mathrm{A}^m\mathrm{B}^{n-p}],$$

ce qui permet de calculer

$$[\mathrm{A}^m\mathrm{B}^n\mathrm{A}^p] \quad \text{et} \quad [\mathrm{B}^m\mathrm{A}^n\mathrm{B}^p],$$

où m, n, p sont des entiers quelconques.

Cherchons maintenant

$$[A^m B^n A^p B^q],$$

où les quatre exposants sont entiers. On voit d'abord que, par notre formule de récurrence, nous pourrons calculer cet invariant, quel que soit q, pourvu que nous connaissions, outre $[B]$,

$$[A^m B^n A^p] \quad \text{et} \quad [A^m B^n A^p B].$$

La première de ces deux expressions est connue d'après ce qui précède; il reste donc à calculer

$$[A^m B^n A^p B] = [BA^m B^n A^p].$$

On verrait de même que le calcul de

$$[BA^m B^n A^p]$$

se ramène à celui de

$$[BA^m B^n A] = [ABA^m B^n],$$

qui se ramène lui-même à celui de

$$[ABA^m B] = [BABA^m]$$

ou enfin à celui de

$$[BABA].$$

Or, ce dernier invariant est connu, puisque c'est celui de $(BA)^2$ et que nous connaissons celui de BA.

Ce qui précède suffit pour faire comprendre comment on calculerait l'invariant d'une combinaison quelconque des deux substitutions A et B.

Imaginons maintenant que A et B sont des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1. Il en sera de même de toutes les combinaisons. Alors, dans la formule

$$[AB^2] + [A] = [AB][B],$$

les deux termes du premier membre, ainsi que le terme unique du second membre, devront être la racine carrée d'un entier.

Mais il est aisé de voir que, si l'on a

$$\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\mu_3}$$

(les μ étant des entiers), les trois expressions

$$\sqrt{\mu_2 \mu_3}, \quad \sqrt{\mu_3 \mu_1}, \quad \sqrt{\mu_1 \mu_2}$$

devront être des entiers.

Il suit de là que les produits

$$[A][AB^2], \quad [A][AB][B], \quad [AB^2][AB][B]$$

sont entiers.

Il est aisé d'en déduire que si $[A]$ est égal à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\alpha}$, et $[B]$ égal à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\beta}$, $[AB]$ devra être égal à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\alpha\beta}$, et $[AB^2]$ à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\alpha}$ ou, ce qui revient au même, à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\alpha\beta^2}$.

Plus généralement, on aura

$$[A^m B^n A^p B^q] = \mu_1 \sqrt{\alpha^{m+p}\beta^{n+q}} = \mu_2 \sqrt{\alpha^h \beta^k},$$

μ_1 et μ_2 étant commensurables, et h et k étant égaux soit à 0, soit à 1, suivant la parité de deux nombres $m+p$ et $n+q$, et de telle sorte que

$$h \equiv m+p, \qquad k \equiv n+q \qquad (\text{mod } 2).$$

Cela peut s'énoncer encore d'une autre manière.

Considérons le groupe dérivé des deux substitutions linéaires A et B. Pour que toutes les substitutions de ce groupe aient leurs invariants égaux à la racine carrée d'un entier, il faut et il suffit que

$$[A]^2, \quad [B]^2 \quad \text{et} \quad [A][B][AB]$$

soient des entiers.

Nous allons maintenant envisager un groupe dérivé de trois substitutions linéaires A, B et C. Je dis que l'on peut, à l'aide de la relation de récurrence démontrée plus haut, calculer les invariants de toutes les substitutions de ce groupe, à l'aide de sept invariants

$$[A], \quad [B], \quad [C], \quad [AB], \quad [BC], \quad [CA], \quad [ABC].$$

Pour le démontrer, je rappelle d'abord que cette relation de récurrence permet (M, N, P étant des substitutions quelconques) de calculer

$$[MN^p]$$

(p entier positif ou négatif), quand on connait

$$[M], \quad [N] \quad \text{et} \quad [MN],$$

ou plus généralement de calculer

$$[MN^p P]$$

quand on connaît

$$[MP], \quad [N] \quad \text{et} \quad [MNP].$$

Elle permet ainsi, connaissant [A], [B] et [AB], de calculer les invariants de toutes les combinaisons de A et de B, ou à l'aide de nos sept invariants, de calculer ceux de toutes les combinaisons A, B et C, où l'une de ces trois substitutions n'entre pas.

Je dis qu'on pourra trouver de même

$$[A^m B^n C^p].$$

En effet, le calcul de cet invariant se ramène à celui de $[A^m B^n]$, qui est connu et à celui de $[A^m B^n C]$. Ce dernier se ramène à $[A^m C]$, qui est connu, et à $[A^m BC]$. Ce dernier, à son tour, se ramène à [BC] et à [ABC], qui sont tous deux supposés connus.

Considérons maintenant une combinaison quelconque

$$[A^m B^n C^p B^q A^r C^s B^t C^u].$$

On ramènera, par le même procédé, le calcul de cet invariant à celui de

$$[ABCBACBC],$$

où les lettres sont restées les mêmes et dans le même ordre, mais où tous les exposants sont réduits à l'unité.

Je dis maintenant qu'on peut ramener le calcul de cet invariant à celui de

$$[ABC(AB)CBC],$$

où deux des lettres sont permutées.

En effet, notre formule de récurrence permet de réduire le calcul de

$$[ABC(BA)CBC]$$

à celui de

$$[ABC.CBC]$$

(où le nombre des lettres est moindre, et que, par conséquent, on peut supposer préalablement calculé) et à celui de

$$[ABC(BA)^{-1}CBC] = [ABCA^{-1}B^{-1}CBC];$$

en réduisant les exposants à l'unité, ce dernier devient

$$[ABCABCBC].$$

Il est clair qu'en appliquant d'une façon convenable le double procédé qui permet de permuter deux lettres quelconques et de réduire les exposants à l'unité, on arrivera à réduire de plus en plus le nombre des lettres de telle façon qu'on sera ramené finalement à l'invariant connu [ABC].

On connaîtra donc ainsi l'invariant d'une substitution quelconque du groupe.

On peut en conclure ce qui suit :

Pour que toutes les substitutions du groupe aient pour invariant la racine carrée d'un entier (ce qui arrive nécessairement quand les substitutions A, B, C ont leurs coefficients entiers), il faut et il suffit que

$$[A]^2, \quad [B]^2, \quad [C]^2, \quad [A][B][AB], \quad [B][C][BC], \quad [C][A][CA]$$

et

$$[A][B][C][ABC]$$

soient des entiers.

Mais nos sept invariants eux-mêmes ne sont pas indépendants les uns des autres. Il y a entre eux une relation algébrique.

Cette relation se présente sous une forme plus symétrique, quand on considère, au lieu de nos sept invariants, les sept invariants suivants (ce qui revient d'ailleurs au même)

$$[A] = \alpha, \qquad [B] = \beta, \qquad [C] = \beta', \qquad [C^{-1}B^{-1}] = \beta'',$$
$$[BA] = \gamma, \qquad [CA] = \gamma', \qquad [C^{-1}B^{-1}A] = \gamma''.$$

J'ai représenté, pour abréger, les sept invariants par les lettres α, β, γ.

La relation s'écrit alors

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 - 4 \\ &\quad = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta'\gamma' + \alpha\beta''\gamma'' + \beta\gamma'\gamma'' + \beta'\gamma\gamma'' + \beta''\gamma\gamma' \\ &\qquad - \alpha\beta\beta'\gamma'' - \alpha\beta\beta''\gamma'' - \alpha\beta'\beta''\gamma + \alpha^2\beta\beta'\beta'' - \beta\beta'\beta''. \end{aligned}$$

On arrive à un résultat analogue dans le cas d'un groupe dérivé de quatre substitutions ou d'un plus grand nombre.

Soit un groupe dérivé de n substitutions

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n.$$

Pour que toutes les substitutions du groupe aient pour invariant la racine carrée d'un entier, il faut et il suffit que

$$[A_1]^2, \quad [A_2]^2, \quad \ldots \quad [A_n]^2.$$

ainsi que toutes les combinaisons

$$[A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} A_3^{\varepsilon_3} \ldots A_n^{\varepsilon_n}] [A_1]^{\varepsilon_1} [A_2]^{\varepsilon_2} \ldots [A_n]^{\varepsilon_n}$$

(où les exposants ε sont égaux soit à 0, soit à 1), soient des entiers.

VI. — Réduction des substitutions.

Voici la question que je me propose de traiter dans ce paragraphe.

Soit S une substitution à coefficients entiers et de déterminant 1 ; soit T une autre substitution à coefficients entiers et de déterminant 1 : je dirai que la substitution S et sa transformée

$$T^{-1}ST$$

sont homologues et appartiennent à la même classe.

Cela posé, parmi toutes les substitutions d'une même classe, il y en a une qui est plus simple que toutes les autres, et que j'appellerai *substitution réduite*.

On peut se proposer, étant donnée une substitution S, de trouver la substitution réduite qui appartient à la même classe, ou, en d'autres termes de *réduire* la substitution S.

On voit d'abord tout de suite que deux substitutions homologues ont mêmes multiplicateurs. Je supposerai, comme je l'ai fait jusqu'ici, qu'un des multiplicateurs est égal à 1, ainsi que le produit des deux autres.

Il résulte de là qu'il existera une forme linéaire

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z,$$

à coefficients entiers et premiers entre eux, qui sera inaltérée par la substitution.

On peut alors former une substitution linéaire

$$T = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}$$

à coefficients entiers et de déterminant 1.

La substitution $T^{-1}ST$, transformée de S par T, sera alors de la forme

$$S' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

ce qui constitue une première réduction.

Supposons d'abord que b_1 et c_1 soient nuls, et que la substitution S s'écrive

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$$

avec la condition

$$ad - bc = 1.$$

Si l'on transforme alors S par une substitution T de la forme

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & \lambda' & \mu' \end{vmatrix}$$

à coefficients entiers et de déterminant 1, la substitution S conservera la même forme après cette transformation.

Envisageons la forme quadratique binaire

$$\psi = c\xi^2 + (d - a)\xi\eta - b\eta^2,$$

qui n'est pas altérée par la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Que deviendra cette forme lorsque l'on remplacera S par sa transformée

$$T^{-1}ST?$$

Tout se passera comme si l'on avait appliqué à cette forme la substitution

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}.$$

D'où cette conclusion :

Pour que deux substitutions

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}, \qquad S' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' \\ 0 & c' & d' \end{vmatrix}$$

appartiennent à la même classe, il faut et il suffit que les deux formes

$$c\xi^2 + (d - a)\xi\eta - b\eta^2$$

et

$$c'\xi^2 + (d' - a')\xi\eta - b'\eta^2$$

soient équivalentes.

Nous sommes donc conduits à dire par définition que la substitution S est réduite quand la forme ψ l'est elle-même.

La somme des multiplicateurs de S est

$$a + d + 1,$$

et son invariant

$$\sqrt{a + d + 2}.$$

La substitution est elliptique si

$$(a + d)^2 < 4, \quad \text{d'où} \quad (a + d) = 0, \quad (a + d) = \pm 1,$$

parabolique si

$$(a + d)^2 = 4, \quad \text{d'où} \quad a + d = \pm 2,$$

hyperbolique si

$$(a + d)^2 > 4.$$

La forme 2ψ a pour discriminant

$$(d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4.$$

Il résulte de là que le discriminant de ψ est fonction de l'invariant de S, et par conséquent que *les substitutions* S *d'invariant donné se répartissent en un nombre fini de classes.*

La substitution S sera elliptique si ψ est définie. Les conditions de réduction pourront alors s'écrire

$$|d - a| < |b| < |c|;$$

b et c seront d'ailleurs toujours de signe contraire.

La substitution S sera hyperbolique si ψ est indéfinie. Il arrive alors que chaque classe de substitutions contiendra plusieurs réduites, comme cela arrive pour les formes indéfinies.

Nous prendrons alors pour unique condition de réduction que b et c soient de même signe.

Enfin la substitution S sera parabolique si ψ se réduit à un carré parfait. Nous dirons alors que ψ est réduite si elle s'écrit $\psi = c\xi^2$, de telle sorte que les conditions de réduction de S s'expriment comme il suit :

$$b = 0, \quad \text{d'où} \quad a = d = \pm 1.$$

Énumérons maintenant les substitutions elliptiques réduites.

Pour $a + d = 0$, le discriminant de 2ψ est égal à -4, et celui de ψ à -1. Si ψ est une réduite, on a donc

$$\psi = \xi^2 + \eta^2.$$

La substitution réduite S s'écrit alors

$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour $a + d = 1$, le discriminant de 2ψ est égal à -3, et cette forme 2ψ est improprement primitive. On a alors, si 2ψ est réduite,

$$\psi = \xi^2 + \xi\eta + \eta^2,$$

de sorte que l'on trouve pour S

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pour $a + d = -1$, on trouve encore

$$\psi = \xi^2 + \xi\eta + \eta^2,$$

ce qui donne

$$S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous classerons encore, parmi les substitutions elliptiques, la substitution suivante :

$$S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

pour laquelle la forme ψ, étant identiquement nulle, ne peut être regardée ni comme définie, ni comme indéfinie.

Il y aura donc en tout quatre classes de substitutions elliptiques.

Nous remarquerons que la substitution S_3 n'est autre chose que le carré de la substitution S_2.

Quant aux substitutions paraboliques réduites, elles s'écriront, soit

$$S_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix},$$

soit

$$S_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 \end{vmatrix},$$

où c est un entier quelconque.

Ne supposons plus maintenant que b_1 et c_1 sont nuls et écrivons notre substitution S sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a & b \\ c_1 & c & d \end{vmatrix},$$

avec la condition

$$ad - bc = 1.$$

On peut supposer que la réduction a été faite comme si b_1 et c_1 étaient nuls et par conséquent que l'on a

$$(1) \qquad |d - a| < |b| < |c|$$

ou

$$(2) \qquad d = a = -1, \qquad b = c = 0$$

si la substitution est elliptique;

$$(3) \qquad bc > 0$$

si elle est hyperbolique, et

$$(4) \qquad b = 0$$

si elle est parabolique.

Il s'agit maintenant de réduire autant que possible les coefficients b_1 et c_1.

Pour cela, écrivons les équations qui définissent la substitution S de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= b_1 x + a y + b z, \\ z' &= c_1 x + c y + d z. \end{aligned}$$

Posons ensuite

$$y = y_1 + \alpha x, \qquad z = z_1 + \beta x;$$

d'où

$$y' = y'_1 + \alpha x', \qquad z' = z'_1 + \beta x'.$$

Les deux dernières équations s'écriront alors

$$\begin{aligned} y'_1 &= x[b_1 + (a-1)\alpha + b\beta \qquad\quad] + a y_1 + b z_1, \\ z'_1 &= x[c_1 + c\alpha \qquad\quad + (d-1)\beta] + c y_1 + d z_1. \end{aligned}$$

En d'autres termes, les coefficients de la substitution S n'ont pas changé par cette transformation, sauf que b_1 et c_1 sont devenus

$$\begin{aligned} &b_1 + (a-1)\alpha + b\beta, \\ &c_1 + c\alpha + (d-1)\beta. \end{aligned}$$

Le problème consiste à déterminer les entiers α et β pour diminuer autant que possible b_1 et c_1. Je dirai que deux systèmes de nombres (b_1, c_1) et (b'_1, c'_1) appartiennent à une même classe si l'on peut trouver deux entiers α et β tels que

$$b'_1 = b_1 + (a-1)\alpha + b\beta,$$
$$c'_1 = c_1 + c\alpha + (d-1)\beta.$$

Le nombre des classes entre lesquelles se répartissent les systèmes (b_1, c_1) est alors égal à

$$\begin{vmatrix} (a-1) & b \\ c & (d-1) \end{vmatrix} = |2 - a - d|.$$

Parmi les systèmes (b_1, c_1) appartenant à une même classe, il y en aura un que l'on regardera comme plus simple que les autres et que l'on appellera *système réduit*; le nombre des systèmes réduits est fini.

Alors, pour qu'une substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a & b \\ c_1 & c & d \end{vmatrix}$$

soit réduite, il faudra non seulement que les quatre entiers a, b, c, d satisfassent aux conditions (1), (2), (3) ou (4) énoncées plus haut, mais encore que le système (b_1, c_1) soit réduit.

Nous avons vu plus haut que, si b_1 et c_1 sont nuls, les substitutions S d'invariant donné se répartissent en un nombre fini de classes. D'après ce qui précède, cela est encore vrai si b_1 et c_1 ne sont pas nuls.

Revenons au cas des substitutions elliptiques et cherchons à déterminer les systèmes réduits (b_1, c_1). Il y a quatre cas à considérer, puisque les substitutions elliptiques, quand $b_1 = c_1 = 0$, se répartissent en quatre classes.

Premier cas :

$$a = d = 0, \qquad b = -1, \qquad c = 1,$$

$2 - a - d = 2$; il y a deux systèmes réduits

$$b_1 = c_1 = 0, \qquad b_1 = 1, \qquad c_1 = 0.$$

Deuxième cas :

$$a = 0, \qquad c = d = 1, \qquad b = -1;$$

$2 - a - d = 1$; il n'y a qu'un système réduit

$$b_1 = c_1 = 0.$$

Troisième cas :
$$a = b = -1, \qquad c = 1, \qquad d = 0;$$

$2 - a - d = 3$; il y a trois systèmes réduits

$$b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \qquad b_1 = 1, \quad c_1 = 0, \qquad b_1 = 2, \quad c_1 = 0.$$

Quatrième cas :
$$a = d = -1, \qquad b = c = 0;$$

$2 - a - d = 4$; il y a quatre systèmes réduits

$$b_1 = 0 \text{ ou } 1, \qquad c_1 = 0 \text{ ou } 1.$$

Mais, si nous observons qu'en appliquant à y et z une transformation linéaire, on fait subir cette même transformation à b_1 et c_1 sans changer d'ailleurs les autres coefficients de S; nous verrons que ces quatre systèmes peuvent être réduits à deux.

Il y a donc huit substitutions elliptiques réduites que je vais énumérer :

$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad S'_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad S''_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad S'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

On peut faire une classification analogue pour les substitutions paraboliques, mais le nombre des classes est infini; on doit envisager d'abord le cas où les trois multiplicateurs sont égaux à 1; on trouve alors que la substitution doit être de la forme

$$S_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Les transformations qu'on peut faire ne peuvent changer la valeur de a et de c. La seule réduction possible, c'est d'amener b à être plus petit que le plus grand commun diviseur de a et de c (et par conséquent à être nul, si a et c sont premiers entre eux); on peut également supposer que c n'est pas nul.

On considérera ensuite le cas où deux des multiplicateurs sont égaux à -1; on a alors

$$a = d = -1, \qquad 2 - a - d = 4.$$

On a donc quatre systèmes réduits (b_1, c_1) et quatre substitutions réduites

$$S_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 \end{vmatrix}, \qquad S'_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & c & -1 \end{vmatrix},$$

$$S''_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 \end{vmatrix}, \qquad S'''_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & c & -1 \end{vmatrix}.$$

VII. — Substitutions elliptiques.

Nous allons chercher dans ce paragraphe quelle est la condition pour qu'une forme quadratique admette une substitution semblable elliptique, et d'abord quelles sont les formes qui ne sont pas altérées par les huit substitutions réduites S_1, S'_1, S_2, S_3, S'_3, S''_3, S_4 et S'_4 définies dans le paragraphe précédent.

On a entre ces diverses substitutions les relations suivantes :

$$S_1^2 = S_4, \quad S_1'^2 = S'_4, \quad S_4^2 = 1, \quad S_4'^2 = 1, \quad S_2^2 = S_3,$$
$$S_2^3 = S_4, \quad S_3^3 = 1, \quad S_3'^3 = 1, \quad S_3''^3 = 1, \quad S_2^6 = 1.$$

Cela posé, nous résoudrons successivement les problèmes suivants :

1° *Formes inaltérées par* S_4. — Ce sont les formes

$$A x^2 + A' y^2 + 2 B y z + A'' z^2.$$

2° *Formes inaltérées par* S'_4. — Ce sont les formes

$$A x^2 + A' y^2 + 2 B y z + A'' z^2 - (A' + B) x y - (A'' + B) x z,$$

où l'on doit avoir

$$A' \equiv A \equiv B \pmod 2.$$

3° *Formes inaltérées par* S_1 *et par conséquent par* S_4. — Ce sont les formes

$$A x^2 + A'(y^2 + z^2).$$

4° *Formes inaltérées par S_1 et par conséquent par S'_4.* — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + z^2 - xy - xz),$$

où A' doit être pair.

5° *Formes inaltérées par S_2 et par conséquent par S_3 et par S_4.* — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + yz + z^2),$$

où A' doit être pair.

Il n'y a d'ailleurs pas d'autre forme inaltérée par S_3.

6° *Formes inaltérées par S'_3.* — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + yz + z^2 - xy - xz),$$

où A' est pair.

7° *Formes inaltérées par S''_3.* — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + yz + z^2 - 2xy - 2xz),$$

où A' est pair.

Nous allons chercher maintenant si une forme quadratique donnée admet une substitution elliptique; pour cela, il faut évidemment et il suffit qu'elle soit équivalente à l'une des sept formes que je viens d'énumérer.

Je dis d'abord qu'on pourra reconnaître s'il en est ainsi par un nombre limité d'essais.

En effet, prenons d'abord la première forme

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2.$$

Elle a pour déterminant

$$A(A'A'' - B^2).$$

On décomposera donc le discriminant Δ de la forme donnée en deux facteurs

$$\Delta = AD,$$

ce qui ne peut se faire que d'un nombre limité de manières. On construira ensuite une forme binaire *réduite*

$$A'y^2 + 2Byz + A''z^2$$

de déterminant D, ce qui ne peut se faire encore que d'un nombre limité de manières. On n'a plus ensuite qu'à examiner si la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2,$$

ainsi construite, est équivalente à la forme donnée.

La même méthode s'applique sans changement aux troisième et cinquième formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + z^2) \quad \text{et} \quad Ax^2 + A'(y^2 + yz + z^2).$$

Mais le nombre des essais est encore plus limité ; le déterminant de la troisième forme est égal à AA'^2 et celui de la cinquième à $3AB^2$ (en posant $A' = 2B$), de sorte qu'une forme ne peut admettre une substitution semblable équivalente à S_2 que si son discriminant est divisible par 3.

En ce qui concerne la seconde forme

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2 - (A' + B)xy - (A'' + B)xz,$$

que l'on peut écrire

$$(1) \qquad Ax^2 - (2B'' + B)y^2 + 2Byz - (2B' + B)z^2 + 2B''xy + 2B'xz,$$

le nombre des essais est encore limité. En effet, son déterminant s'écrit

$$(2A + B' + B'')(2B'B'' + BB' + BB'').$$

On décomposera donc le déterminant Δ en deux facteurs

$$\Delta = CD.$$

Alors $2D$ désigne le déterminant de la forme binaire

$$-(2B'' + B)y^2 + 2Byz - (2B' + B)z^2.$$

Ces formes binaires, qu'on peut être conduit à essayer, se répartissent donc en un nombre fini de classes.

Si nous faisons subir à la forme (1) une transformation linéaire de déterminant 2, en posant

$$y = y_1 + x_1, \qquad z = z_1 + x_1, \qquad x = 2x_1,$$

elle deviendra

$$(2) \qquad (4A + 2B' + 2B'')x_1^2 - (2B'' + B)y_1^2 + 2By_1z_1 - (2B' + B)z_1^2.$$

On peut, de plus, supposer que la forme binaire

$$(3) \qquad (2B'' + B)y^2 - 2Byz + (2B' + B)z^2$$

a été réduite autant que possible par une substitution ne portant que sur y et z.

Si B est pair, on peut appliquer à cette forme binaire une substitution linéaire quelconque sans faire cesser la particularité qui la caractérise, à savoir que les coefficients de y^2, de z^2 et de $2yz$ sont de même parité.

Nous pouvons donc toujours supposer que cette forme est réduite au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire, si nous la supposons définie, que l'on a

$$|2B| < |2B'' + B| < |2B' + B|.$$

On ne pourra donc former qu'un nombre fini de formes (2) et, par conséquent, qu'un nombre fini de formes (1) satisfaisant à la fois aux conditions

$$\Delta = (2A + B' + B'')(2B'B'' + BB' + BB''),$$
$$B \equiv 0 \pmod 2, \qquad |2B| < |2B'' + B| < |2B' + B|.$$

On n'aura donc qu'un nombre limité d'essais à faire pour reconnaître si l'une de ces formes est équivalente à la forme donnée.

Supposons maintenant que B soit impair. On ne peut pas appliquer à notre forme binaire

$$(3) \qquad (2B'' + B)y^2 - 2Byz + (2B' + B)z^2$$

une substitution linéaire quelconque sans que les trois coefficients de y^2, de $2yz$ et de z^2 cessent d'être tous trois impairs. Pour qu'une substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

ne fasse pas cesser cette particularité, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (\text{mod } 2).$$

Les substitutions qui satisfont à l'une de ces deux conditions forment un groupe G qui est un sous-groupe à congruences du groupe arithmétique.

Nous n'avons donc plus ici le droit de supposer que la forme (3) est réduite au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire par rapport au groupe arithmétique, mais seulement qu'elle est réduite par rapport au groupe G.

Il est aisé de voir que les conditions de réduction s'écrivent alors

$$|B| < |2B'' + B| < |2B' + B|.$$

On ne pourra évidemment trouver qu'un nombre limité de formes (2) ou (1) satisfaisant simultanément aux conditions

$$\Delta = (2A + B' + B'')(2B'B'' + BB' + BB''),$$
$$B \equiv 1 \pmod 2, \qquad |B| < |2B'' + B| < |2B' + B|.$$

On n'aura donc encore qu'un nombre limité d'essais à faire pour reconnaître si l'une de ces formes est équivalente à la forme donnée.

Ce que je viens de dire s'applique sans changement à la forme

$$Ax^2 + A'(y^2 + z^2 - xy - xz)$$

reproductible par S'_1.

Il nous reste à examiner comment on pourra reconnaître si une forme donnée est susceptible d'être reproduite par une substitution homologue à S'_3 ou à S''_3, c'est-à-dire si elle est équivalente à l'une des formes

$$(4)\qquad Ax^2 + 2B(y^2 + yz + z^2 - \beta xy - \beta xz),$$

où $\beta = 1$ ou 2.

J'appellerai d'abord l'attention sur l'effet que produit sur cette forme la substitution suivante de déterminant 3

$$x = 3x_1, \qquad y = y_1 + \beta x_1, \qquad z = z_1 + \beta x_1.$$

La forme devient

$$(9A - 6B\beta^2)x_1^2 + 2B(y_1^2 + y_1 z_1 + z_1^2).$$

Le déterminant de la forme (4) est, d'ailleurs, égal à

$$3AB^2 - 2B^3\beta^2,$$

c'est-à-dire à

$$3AB^2 - 2B^3 \quad \text{ou} \quad 3AB^2 - 8B^3,$$

selon que β est égal à 1 ou à 2.

Il est clair qu'on ne peut trouver que d'un nombre fini de manières deux nombres entiers A et B satisfaisant à l'une des deux conditions

$$3AB^2 - 2B^3 = \Delta \qquad \text{ou} \qquad 3AB^2 - 8B^3 = \Delta.$$

On n'aura donc qu'un nombre limité d'essais à faire pour reconnaître si une forme donnée de déterminant Δ est équivalente à l'une des formes (4).

Ainsi, dans tous les cas possibles, le nombre des essais à faire est limité, et il peut être diminué encore par la considération des ordres et des genres.

Il est clair, d'après ce qui précède et sans qu'il soit nécessaire d'insister, que toutes les formes n'admettront pas de substitution semblable elliptique.

Mais, en revanche, on voit tout de suite qu'une forme quadratique quelconque F est toujours commensurable avec une forme qui admet une substitution semblable elliptique. Et, en effet, quelle que soit la forme F, on peut toujours trouver une substitution à coefficients commensurables T', telle que

$$FT' = Ax^2 + By^2 + Cz^2.$$

Cette forme FT', commensurable avec F, admet la substitution elliptique S_4.

Cherchons maintenant quelles sont les formes qui admettent une des substitutions paraboliques S_a, S_6, S'_6, S''_6 et S'''_6.

En premier lieu, les seules formes qui sont reproduites par une des quatre substitutions S_6, S'_6, S''_6 et S'''_6 ont leur discriminant nul. Nous devons donc les laisser de côté et ne nous occuper que des formes reproduites par

$$S_a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Ces formes s'écriront

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B'xz + 2B''xy \tag{5}$$

avec les conditions

$$A'a^2 + 2B'b + 2B''a = A'a + B'c = 0.$$

Pour qu'une forme quadratique admette une substitution parabolique, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à la forme (5) ou, en d'autres termes, qu'elle soit susceptible de représenter 0, conformément aux conditions du paragraphe CCXCIX des *Disquisitiones arithmeticæ*.

Cela est conforme à un résultat déjà obtenu par M. Selling.

VIII. — Résumé.

Nous pouvons maintenant résumer ainsi les resultats encore très incomplets que nous avons obtenus.

Au groupe des substitutions à coefficients entiers qui n'altèrent pas une forme quadratique donnée F correspond toujours un groupe fuchsien qui le détermine entièrement.

Les formes F peuvent d'abord se répartir en quatre catégories :

1° Celles qui n'admettent ni substitutions elliptiques, ni substitutions paraboliques ;

2° Celles qui admettent des substitutions elliptiques, mais pas de substitutions paraboliques ;

3° Celles qui admettent des substitutions paraboliques, mais pas de substitutions elliptiques;

4° Celles qui admettent à la fois des substitutions elliptiques et paraboliques.

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, comment un nombre limité d'essais permet de reconnaître à laquelle de ces quatre catégories appartient une forme donnée.

Si la forme F est de la première ou de la deuxième catégorie, son groupe fuchsien principal sera de la première famille; si F est de la troisième catégorie, son groupe fuchsien est de la deuxième famille; si F est de la quatrième catégorie, son groupe fuchsien est de la sixième famille.

Si la forme F est de la première catégorie, le polygone générateur de son groupe fuchsien a $4p$ côtés, les côtés opposés étant conjugués. Les $4p$ sommets forment un seul cycle, et la somme des angles est égale à 2π.

Si F est de la deuxième catégorie, les sommets du polygone générateur peuvent former plusieurs cycles. (Il convient d'ajouter que le plus souvent ils n'en forment qu'un seul et qu'il n'y aura plusieurs cycles que dans des cas exceptionnels.) Pour reconnaître combien ces sommets forment de cycles, on construira les formes

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$$

(la forme binaire $A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$ étant réduite) ou bien encore les formes (1) et (4) du paragraphe précédent. Si la forme F est équivalente à n des formes ainsi construites, les sommets du polygone générateur formeront n cycles.

La somme des angles de l'un quelconque de ces cycles sera égale à π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$. Si F est équivalente à une forme reproductible par S_4 ou S'_4, la somme des angles du cycle correspondant sera π; si F est équivalente à une forme reproductible par S_1 ou S'_1, la somme des angles du cycle correspondant sera $\frac{\pi}{2}$; si F est équivalente à une forme reproductible par S_2, la somme des angles du cycle correspondant sera $\frac{\pi}{3}$; si, enfin, F est équivalente à une forme reproductible par S'_3 ou S''_3, la somme des angles du cycle correspondant sera $\frac{2\pi}{3}$.

Si F est de la troisième catégorie, les sommets du polygone générateur sont tous sur le cercle fondamental, et ils forment un ou plusieurs cycles (en général un seul), dont la somme des angles est nulle.

Si F est de la quatrième catégorie, les sommets du polygone générateur sont les uns sur le cercle fondamental, les autres à l'intérieur, et ils forment plusieurs cycles dont la somme des angles peut être 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.

Nous avons rencontré aussi d'autres propriétés du groupe fuchsien principal d'une forme F. En premier lieu, les multiplicateurs des diverses substitutions devront satisfaire aux conditions exposées au paragraphe V. En second lieu, ce groupe fuchsien devra être commensurable avec ses transformés par une infinité de substitutions, correspondant aux substitutions fractionnaires étudiées au paragraphe IV.

Il me reste à parler des substitutions gauches.

Dans la théorie des groupes fuchsiens, on décompose le cercle fondamental en une infinité de polygones égaux entre eux au point de vue pseudogéométrique; les angles sont égaux entre eux au sens ordinaire du mot, et les côtés sont égaux à notre point de vue spécial, c'est-à-dire qu'ils ont même L.

Considérons une circonférence coupant orthogonalement le cercle fondamental, et supposons qu'on transforme un de nos polygones R par inversion (par rayons vecteurs réciproques) par rapport à cette circonférence. Nous dirons alors, au point de vue pseudogéométrique, que le polygone R et son transformé R′ sont symétriques par rapport à cette circonférence. Ces deux polygones auront mêmes angles et mêmes côtés (à notre point de vue spécial), mais les éléments homologues seront disposés dans l'ordre inverse.

Si nous considérons ensuite un polygone R″, égal à R′ au point de vue pseudogéométrique, les deux polygones R et R″ auront aussi les éléments homologues égaux, mais disposés dans l'ordre inverse. Nous dirons alors qu'ils sont symétriques en grandeur, mais non en position.

Si la forme F admet une substitution gauche, on peut décomposer le cercle fondamental en une infinité de polygones curvilignes : deux quelconques de ces polygones sont égaux entre eux ou symétriques (en grandeur) au point de vue pseudogéométrique; deux polygones adjacents sont toujours symétriques, et la réunion de ces deux polygones adjacents symétriques constitue le polygone générateur du groupe fuchsien formé en ne considérant que les substitutions droites.

La substitution

$$S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

peut être à volonté considérée comme droite ou gauche, puisqu'un de ses multiplicateurs est égal à $+1$, et deux à -1.

Nous avons vu que, pour savoir si la forme F est reproductible par une substitution homologue à S_4, il suffit de chercher si elle est équivalente à une forme telle que

$$A x^2 + A' y^2 + 2 B y z + A'' z^2.$$

Mais deux cas sont à distinguer : ou bien la forme binaire

$$A' y^2 + 2 B y z + A'' z^2$$

est définie, et alors nous regarderons la substitution S_4 comme droite et elliptique, ou bien cette forme binaire est indéfinie, et alors nous regarderons S_4 comme une substitution gauche.

On comprend ainsi ce qu'on doit entendre quand je dis que F est reproductible par une substitution gauche appartenant à la même classe que S_4. Si cela arrive, le polygone générateur peut se décomposer en deux polygones adjacents symétriques l'un de l'autre, non seulement en grandeur, mais encore en position, le côté commun servant d'axe de symétrie.

Les résultats que je viens d'exposer demanderaient évidemment à être complétés. Les propriétés nouvelles des groupes que nous avons étudiés ne suffisent pas pour les déterminer complètement; mais, en en faisant un usage judicieux, on peut notablement simplifier les procédés de calcul qu'on employait autrefois pour former ces groupes.

IX. — Généralisation du théorème d'addition.

Dans ce qui précède, je me suis efforcé de montrer la possibilité d'employer les fonctions fuchsiennes dans des questions d'Arithmétique. L'application inverse de l'Arithmétique à la théorie des fonctions fuchsiennes est au moins aussi féconde.

L'analogie des fonctions fuchsiennes et des fonctions elliptiques est évidente; les premières ne changent pas quand l'argument subit une substitution linéaire appartenant à un certain groupe, de même que les secondes ne changent pas quand l'argument augmente de certaines périodes. Il y a cependant une propriété des fonctions elliptiques qui ne s'étend pas immédiatement aux fonctions fuchsiennes, c'est le théorème d'addition.

Si l'on augmente l'argument d'une transcendante elliptique d'une quantité qui ne soit pas une période, il y a une relation algébrique entre l'ancienne et la nouvelle valeur de la transcendante. Si donc $F(z)$ est une fonction elliptique, il y aura une relation algébrique entre $F(z)$ et $F(z+h)$, h étant une constante.

Voici quelle serait la généralisation la plus naturelle de cette propriété. Soient $F(z)$ une fonction fuchsienne, S une substitution linéaire n'appartenant pas à son groupe. Il devrait y avoir une relation algébrique entre $F(z)$ et $F(z, S)$. (Je désigne par z, S, selon l'habitude, ce que devient z quand on applique à cette variable la substitution S.) Il est aisé de voir que cette propriété ne peut subsister pour *toutes* les substitutions fuchsiennes S, c'est-à-dire pour toutes les substitutions linéaires de S qui n'altèrent pas le cercle fondamental. D'autre part, il arrivera, en général, que cette propriété n'appartiendra à aucune substitution fuchsienne; ce n'est donc que pour certaines fonctions fuchsiennes exceptionnelles qu'elle appartiendra à quelques substitutions fuchsiennes.

A ce double point de vue, on peut dire que le théorème d'addition des fonctions elliptiques ne s'étend pas, *en général*, aux fonctions fuchsiennes.

Je vais faire voir toutefois que, pour certaines fonctions fuchsiennes particulières $F(z)$, il existe une infinité de substitutions S, telles que $F(z)$ et $F(z, S)$ soient liées par une relation algébrique. Il est clair que, dans ce cas, ces substitutions S formeront un groupe.

Que faut-il pour qu'il en soit ainsi? Soit G le groupe de la fonction $F(z)$. La fonction $F(z, S)$ sera aussi une fonction fuchsienne, et son groupe sera le transformé de G par la substitution S, c'est-à-dire $S^{-1}GS$. Si les deux groupes G et $S^{-1}GS$ sont commensurables entre eux, leur groupe commun g sera un sous-groupe d'indice fini pour chacun d'eux. Ce sera donc encore un groupe fuchsien. Mais alors on peut regarder $F(z)$ et $F(z, S)$ comme des fonctions fuchsiennes admettant le groupe g. Ces deux trancendantes seront donc liées par une relation algébrique.

D'où la conclusion suivante :

Pour qu'il y ait une relation algébrique entre une fonction fuchsienne $F(z)$ *du groupe* G *et sa transformée* $F(z, S)$ *par la substitution* S, *il faut et il suffit que les deux groupes* G *et* $S^{-1}GS$ *soient commensurables.*

Je citerai d'abord un premier exemple sur lequel je ne m'arrêterai pas. Soient G un groupe fuchsien et g un second groupe fuchsien, sous-groupe du premier; soit $F(z)$ une fonction fuchsienne de groupe g. Soit enfin S une substitution appartenant à G, mais non à g. Je dis qu'il y aura une relation algébrique entre $F(z)$ et $F(z, S)$.

Soit, en effet, $\Phi(z)$ une fonction fuchsienne de groupe G; nous pourrons la regarder aussi comme une fonction de groupe g; elle sera donc liée algébriquement à $F(z)$. Mais nous pourrons de même regarder $\Phi(z)$ comme une fonction fuchsienne de groupe $S^{-1}gS$, puisque $S^{-1}gS$ est aussi un sous-groupe de G. Donc $\Phi(z)$ sera aussi liée algébriquement à $F(z, S)$. Cela prouve que $F(z)$ et $F(z, S)$ sont liées algébriquement l'un à l'autre.

Les substitutions S forment, dans ce cas, un groupe G qui est discontinu. Aussi ce premier exemple n'offre-t-il pas grand intérêt. Nous le laisserons donc de côté pour ne nous occuper que des cas où les substitutions S, telles que $F(z)$ et $F(z, S)$ soient liées algébriquement, forment un groupe continu.

C'est ce que nous observerons dans un second exemple, à savoir quand $F(z)$ se réduit à la fonction modulaire J. Le groupe de cette fonction se compose alors de toutes les substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont quatre entiers, tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Nous savons qu'il y a une relation algébrique entre $F(z)$ et $F\left(\frac{z}{n}\right)$; c'est cette relation algébrique qui est bien connue sous le nom d'*équation modulaire* dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques.

Vérifions que le groupe G, formé des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont entiers, est bien commensurable avec son transformé $S^{-1}GS$ par la substitution

$$S = \left(z, \frac{z}{n}\right),$$

où n est entier.

En effet, le groupe $S^{-1}GS$ est formé des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \frac{\beta}{n}}{\gamma n z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont entiers et tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Le groupe commun g aux deux groupes G et $S^{-1}GS$ est alors formé des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont des entiers satisfaisant aux conditions

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{n},$$

C'est donc, par rapport à G, un sous-groupe à congruences et par conséquent un sous-groupe d'indice fini. C. Q. F. D.

Pour la même raison, on a une relation algébrique entre la fonction modulaire $F(z)$ et $F\left(\frac{pz}{n}\right)$, p et n étant deux entiers premiers entre eux.

Plus généralement, je dis qu'il y aura une relation algébrique entre la fonction modulaire $F(z)$ et $F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$, a, b, c et d étant des entiers quelconques.

Car la substitution

$$S = \left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

où a, b, c, d sont des entiers quelconques, peut toujours être regardée comme la résultante de plusieurs autres de la forme

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \quad \text{où} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

ou de la forme

$$(z, pz) \quad \text{ou} \quad \left(z, \frac{z}{n}\right).$$

L'ensemble des substitutions S, telles que $F(z)$ et $F(z, S)$ soient liées algébriquement, forme donc un groupe continu.

Jusqu'à présent cet exemple était isolé, mais nous sommes maintenant à même d'en citer une infinité d'autres.

Envisageons une forme quadratique indéfinie F à coefficients entiers et reprenons les dénominations du paragraphe II. Considérons le groupe reproductif de F formé de toutes les substitutions à coefficients *quelconques* qui n'altèrent pas cette forme, et le groupe principal de F formé de toutes les substitutions à coefficients *entiers* qui n'altèrent pas cette forme. A toute substitution du groupe reproductif correspondra une substitution fuchsienne et au groupe principal de F correspondra un groupe fuchsien G qui sera le groupe fuchsien principal de F.

Soit $f(z)$ une des fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe G.

J'envisagerai également les substitutions du groupe reproductif qui ont des coefficients *fractionnaires* (ce sont celles que nous avons étudiées dans le paragraphe IV), les substitutions fuchsiennes correspondantes et le groupe Γ formé par ces substitutions fuchsiennes et qui sera un groupe *continu*.

Soit S une substitution fractionnaire du groupe reproductif de F; soit s la substitution fuchsienne correspondante appartenant à Γ. En vertu des lemmes II et VI du paragraphe III, le groupe principal de F sera commensurable avec son transformé par S.

Donc G sera commensurable avec son transformé par s.

Il y a donc une relation algébrique entre

$$f(z) \quad \text{et} \quad f(z, s),$$

s étant une substitution quelconque du groupe continu Γ.

Les fonctions fuchsiennes arithmétiques jouissent donc, comme la fonction modulaire, de la propriété qui nous occupe. La fonction modulaire n'en est d'ailleurs qu'un cas particulier et on l'obtient en prenant, pour la forme quadratique F,

$$F = 2y^2 - 2xz.$$

Ainsi, il y a une propriété que l'on peut regarder comme la généralisation du théorème d'addition, si l'on regarde les fonctions fuchsiennes comme la généralisation des fonctions elliptiques, mais que l'on peut aussi regarder comme la généralisation de la transformation, si l'on regarde les fonctions fuchsiennes comme la généralisation de la fonction modulaire.

Cette propriété n'appartient pas en général à toutes les fonctions fuchsiennes; mais elle appartient aux fonctions fuchsiennes arithmétiques.

Cela peut faire concevoir l'espoir que ces transcendantes arithmétiques rendront, dans la théorie de certaines classes d'équations algébriques, des services analogues à ceux qu'a rendus la fonction modulaire dans l'étude de l'équation du cinquième degré.

Paris, 18 mars 1887.

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

ET

L'ÉQUATION

$\Delta u = e^u$.

Journal de Mathématiques, 5e série, t. 4, p. 137-230; 1898.

I. — Introduction.

Considérons une équation différentielle linéaire de la forme suivante :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) admettra un certain nombre de points singuliers qui seront les infinis de la fonction rationnelle φ; pour chacun de ces points singuliers on pourra former l'équation déterminante.

Pour que x puisse être une fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut d'abord que la différence des racines de chaque équation déterminante soit l'inverse d'un nombre entier. Mais cette condition n'est pas suffisante.

Nous dirons que deux équations de la forme (1) appartiennent au même *type* :

1° Si la relation (2) est la même pour ces deux équations;

2° Si les infinis de la fonction φ sont les mêmes;

3° Si, pour chacun de ces infinis, les équations déterminantes sont les mêmes.

La question suivante se pose alors :

Dans un type quelconque (pourvu que la différence des racines de chaque équation déterminante soit l'inverse d'un entier), y a-t-il toujours une équation fuchsienne, c'est-à-dire telle que x soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales ?

Cette question est d'une importance capitale dans la théorie des fonctions fuchsiennes, mais elle est extrêmement difficile ; on voit assez aisément que, dans un type quelconque, il ne peut y avoir plus d'une équation fuchsienne ; mais il est plus difficile d'établir qu'il y en a toujours une.

La première démonstration qui ait été donnée est fondée sur ce qu'on appelle la *méthode de continuité*. Nous y avons été conduits, M. Klein et moi, d'une façon indépendante. Dans mon Mémoire sur les groupes des équations linéaires, inséré dans le Tome 4 des *Acta mathematica* (¹), j'ai insisté sur les ressemblances et les différences des résultats de M. Klein et des miens et j'ai donné en même temps un exposé complet de la méthode; je n'ai plus à y revenir. Je crois être arrivé à donner à cette méthode une forme parfaitement rigoureuse, mais elle n'en reste pas moins extrêmement compliquée et a un caractère indirect.

Peu de temps après, la Société royale des Sciences de Göttingen attira l'attention des géomètres sur une autre manière d'aborder la question, en proposant comme sujet de concours l'intégration de l'équation

$$\Delta u = e^u.$$

L'intégration de cette équation conduirait en effet directement à la solution du problème qui nous occupe.

La question posée par la Société de Göttingen fut résolue par M. Picard dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques de M. Jordan* (1890) et complété par une Note des *Comptes rendus* (Tome 116).

La solution proposée par M. Picard consiste à intégrer d'abord l'équation dans un contour assez petit et à étendre ensuite le résultat à un contour quelconque par la méthode alternée de M. Schwarz.

On peut revenir sur la question et chercher à se passer de ce détour. C'est ce que je me propose de faire ici.

Je me bornerai, dans ce Mémoire, aux fonctions fuchsiennes des première, deuxième et sixième familles, c'est-à-dire à celles qui n'existent qu'à l'intérieur

(¹) Ce Tome, p. 300 et suiv. N. E. N.

du cercle fondamental. Le polygone R_0 qui engendre la fonction fuchsienne est alors tout entier à l'intérieur de ce cercle; il a un certain nombre de sommets se répartissant en un certain nombre de cycles.

Mais parmi ces cycles nous distinguerons :

1° Ceux de la première espèce où la somme des angles est égale à 2π;

2° Ceux de la seconde espèce où la somme des angles est égale à $\frac{2\pi}{n}$, n étant un entier plus grand que 1;

3° Ceux de la troisième espèce dont tous les angles sont nuls.

Nous ferons une étude particulière des *fonctions fuchsiennes de la première espèce*, où tous les cycles des sommets sont de la première espèce; nous étendrons ensuite nos résultats aux autres fonctions fuchsiennes.

II. — La fonction u.

Nous emploierons les notations suivantes :

Soient Z et Z′ deux variables complexes liées par une relation algébrique

$$f(Z, Z') = 0, \tag{2}$$

correspondant à la relation (2) du paragraphe précédent. Soit

$$Z = X + iY, \qquad Z' = X' + iY'.$$

Considérons ensuite les quantités

$$Z_0 = X - iY, \qquad Z'_0 = X' - iY'$$

imaginaires conjuguées de Z et Z′. Elles seront évidemment liées par une relation

$$f_0(Z_0, Z'_0) = 0, \tag{2 bis}$$

où f_0 est un polynome dont les coefficients sont imaginaires conjugués de ceux de f.

Supposons maintenant que Z et Z′ soient des fonctions fuchsiennes

$$Z = \varphi(z), \qquad Z' = \varphi'(z)$$

de la variable complexe

$$z = x + iy.$$

Alors Z_0 et Z'_0 seront des fonctions fuchsiennes

$$Z_0 = \varphi_0(z_0), \qquad Z'_0 = \varphi'_0(z_0)$$

de la variable conjuguée

$$z_0 = x - iy.$$

Le cercle fondamental aura pour équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

ou bien

$$zz_0 = 1.$$

Cela posé, supposons que la variable Z décrive dans son plan un arc infiniment petit dS, et que la variable z décrive dans le sien l'arc infiniment petit correspondant. Soit ds la longueur de cet arc décrit par z, *longueur évaluée au point de vue de la géométrie non euclidienne*, c'est-à-dire ce que j'ai appelé la L de cet arc dans mes Mémoires du Tome I des *Acta mathematica* (¹). On aura

$$dS = \sqrt{dZ\, dZ_0}; \qquad ds = \frac{\sqrt{dz\, dz_0}}{1 - zz_0}.$$

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

une substitution du groupe fuchsien. Quand la variable z décrira l'arc considéré dont la L est ds, la variable $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ décrira un arc dont la L sera encore ds, et la variable

$$\varphi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

qui sera encore égale à Z, décrira un arc dont la longueur sera encore dS.

Le rapport

$$\frac{dS}{ds}$$

n'est donc pas altéré par les substitutions du groupe fuchsien; c'est donc une fonction uniforme de Z, Z', Z_0, Z'_0.

Posons alors

$$e^u = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

d'où

$$u = -\log\frac{dZ}{dz} - \log\frac{dZ_0}{dz_0} - 2\log(1 - zz_0).$$

Si l'on observe que Z est fonction seulement de z et Z_0 de z_0, on trouvera

$$\frac{d^2 u}{dZ\, dZ_0} = -2\frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}\frac{d^2\log(1 - zz_0)}{dz\, dz_0} = 2\frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

(¹) Ce Tome, p. 114 et 117. N. E. N.

ou enfin

$$\frac{d^2 u}{dZ\, dZ_0} = 2\, e^u.$$

Si l'on passe des variables Z et Z_0 aux variables X et Y, on trouve

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{d^2 u}{dY^2} = 4\, \frac{d^2 u}{dZ\, dZ_0}$$

ou bien

$$(3) \qquad \Delta u = 8\, e^u.$$

Pour que la fonction u cesse d'être finie, il faut que l'un des facteurs

$$\frac{dz}{dZ}, \quad \frac{dz_0}{dZ_0}, \quad 1 - zz_0$$

soit nul ou infini.

Le facteur $1 - zz_0$ ne peut jamais être infini; si la fonction fuchsienne est de la première famille, c'est-à-dire si le polygone R_0 n'a pas de cycle de la troisième espèce, le facteur $1 - zz_0$ ne peut pas non plus devenir nul, parce que le polygone R_0 n'a aucun point sur la circonférence du cercle fondamental.

Si, au contraire, le polygone R_0 a des cycles de sommets de la troisième espèce, le facteur $1 - zz_0$ ne peut devenir nul qu'en un sommet appartenant à l'un de ces cycles.

En dehors des sommets appartenant aux cycles de la troisième espèce, la fonction u ne peut donc cesser d'être finie que si l'un des facteurs

$$\frac{dz}{dZ}, \quad \frac{dz_0}{dZ_0}$$

est nul ou infini. Comme ces deux facteurs sont imaginaires conjugués, ils deviendront nuls et infinis en même temps.

La condition pour que u cesse d'être fini, c'est donc que

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dZ}{dz} = \infty.$$

On aura $\dfrac{dZ}{dz} = 0$ dans deux cas :

1° Aux sommets de R_0 qui appartiennent à un cycle de deuxième ou de troisième espèce; nous y reviendrons.

2° Si l'on a à la fois

$$f(Z, Z') = 0, \qquad \frac{df}{dZ'} = 0,$$

c'est-à-dire si la tangente à la courbe $f(Z, Z') = 0$ est parallèle à l'axe des Z'.

Si le point correspondant n'est pas un point double de la courbe $f = 0$, on aura

$$\frac{df}{dZ'} = 0,$$

mais on n'aura pas

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

ni, par conséquent,

$$\frac{dZ'}{dz} = 0.$$

Si, alors, on pose

$$dS' = \sqrt{dZ'\,dZ'_0}$$

et

$$e^{u'} = \frac{ds^2}{dS'^2},$$

c'est-à-dire si u' est la fonction qui joue, par rapport à Z', le même rôle que u par rapport à Z, cette nouvelle fonction u' ne deviendra pas infinie au point correspondant.

Supposons maintenant que le point considéré soit un point double de $f = 0$; on aura alors à la fois

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dZ'}{dz} = 0.$$

Mais posons

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

R étant une fonction rationnelle de Z et de Z'; nous pouvons choisir cette fonction R de telle façon que Z'' prenne des valeurs différentes au point double sur les deux branches de courbe qui s'y croisent.

Dans ces conditions, on n'aura pas

$$\frac{dZ''}{dz} = 0,$$

et, par conséquent, si u'' est la fonction qui joue par rapport à Z'' le même rôle que u par rapport à Z', u'' ne deviendra pas infinie au point correspondant.

On peut d'ailleurs toujours supposer que la courbe $f = 0$ ne présente d'autre singularité que des points doubles ordinaires. Si, au contraire, le point z était un sommet de R_0, appartenant à un cycle de deuxième ou de troisième espèce, toutes les dérivées

$$\frac{dZ}{dz}, \quad \frac{dZ'}{dz}, \quad \frac{dZ''}{dz}$$

seraient nulles à la fois et toutes les fonctions

$$u, \quad u', \quad u''$$

deviendraient infinies à la fois.

3° On aura

$$\frac{dZ}{dz} = \infty,$$

quand on aura

$$Z = \infty.$$

Mais si l'on pose

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

et si u'' est la fonction qui joue par rapport à Z'' le même rôle que u par rapport à Z, on aura

$$Z'' = 0,$$

et, par conséquent, on n'aura ni

$$\frac{dZ''}{dz} = 0,$$

ni

$$u'' = \infty.$$

En résumé, *si la fonction fuchsienne est de première espèce, c'est-à-dire s'il n'y a pas de cycles de deuxième et troisième espèces, les fonctions*

$$u, \quad u', \quad u'', \quad \ldots$$

ne peuvent devenir infinies à la fois.

Dans le cas général, ces fonctions ne pourront devenir infinies à la fois qu'aux différents sommets des divers cycles de deuxième et de troisième espèces.

Examinons maintenant ce qui arrive en un sommet d'un cycle de deuxième espèce.

Si la somme des angles du cycle est $\frac{2\pi}{n}$ et si a est un sommet de deuxième espèce et A la valeur correspondante de Z, la fonction fuchsienne

$$Z - A = \varphi(z) - A$$

sera développable suivant les puissances de $z - a$, et le développement commencera par un terme en $(z - a)^n$. Le développement de $\frac{dZ}{dz}$ commencera donc par un terme en $(z - a)^{n-1}$; il vient donc

$$\log(Z - A) = n \log(z - a) + Q,$$
$$\log \frac{dZ}{dz} = (n - 1) \log(z - a) + Q'.$$

Q et Q' restant finis pour $z = a$, et, par conséquent,

$$\log \frac{dZ}{dz} = \frac{n-1}{n} \log(Z - A) + Q'',$$

$$\log \frac{dZ_0}{dz_0} = \frac{n-1}{n} \log(Z_0 - A_0) + Q''_0$$

et enfin

$$u = -\frac{2n-2}{n} \log|Z - A| + q,$$

Q'', Q''_0 et q restant finis pour $z = a$. J'ajoute que q est développable suivant les puissances de $Z - A$, $Z_0 - A_0$, $\sqrt[n]{(Z - A)(Z_0 - A_0)}$.

Passons aux sommets d'un cycle de troisième espèce; on aura alors, dans le voisinage de ce cycle,

$$\frac{1}{z-a} = \psi(Z) + b \log(Z - A),$$

b étant une constante et ψ une fonction développable suivant les puissances de $Z - A$. On tire de là

$$\frac{dz}{dZ} = -(z-a)^2 \left[\psi'(Z) + \frac{b}{Z-A}\right],$$

d'où

$$\log \frac{dZ}{dz} = \log(Z - A) - 2 \log(z - a) + Q,$$

Q désignant une quantité qui reste finie pour $z = a$.

On aurait, de même,

$$\log \frac{dZ_0}{dz_0} = \log(Z_0 - A_0) - 2 \log(z_0 - a_0) + Q_0,$$

Q_0 restant fini pour $z = a$; comme le sommet a est sur le cercle fondamental, on a $aa_0 = 1$ et, par conséquent,

$$u = -2 \log|Z - A| + 2 \log \frac{(z-a)(z_0 - a_0)}{aa_0 - zz_0} + q,$$

q restant fini pour $z = a$.

Observons maintenant que l'on a identiquement

$$\frac{zz_0 - aa_0}{(z-a)(z_0 - a_0)} = \frac{a}{z-a} + \frac{a_0}{z_0 - a_0} + 1 = ab \log(Z - A) + a_0 b_0 \log(Z_0 - A_0) + q',$$

q' restant fini pour $z = a$.

Mais il est aisé de vérifier que le produit ab doit être réel, de sorte que

$$ab = a_0 b_0$$

et

$$\frac{zz_0 - aa_0}{(z-a)(z_0-a_0)} = 2ab\log|Z-A| + q' = -\log|Z-A|e^{q''},$$

q'' restant fini pour $z = a$.

Nous trouvons donc enfin

$$u = -2\log|Z-A| - 2\log\log|Z-A| - 2q'' + q.$$

Plus précisément, nous aurons

$$u = -2\log|Z-A| - 2\log(\log|Z-A| + \psi) + \varphi,$$

ψ et φ étant holomorphes en $Z - A$ et $Z_0 - A_0$.

Ainsi donc :

1° Dans le voisinage d'un sommet de la deuxième espèce, la différence

$$u + \frac{2n-2}{n}\log|Z-A|$$

reste finie ou, plus exactement, toutes les différences

$$u + \frac{2n-2}{n}\log|Z-A|, \qquad u' + \frac{2n-2}{n}\log|Z'-A'|, \qquad u'' + \frac{2n-2}{n}\log|Z''-A''|$$

ne peuvent pas devenir infinies à la fois.

2° Dans le voisinage d'un sommet de la troisième espèce, toutes les différences

$$\begin{gathered} u + 2\log|Z-A| + 2\log\log|Z-A|, \\ u' + 2\log|Z'-A'| + 2\log\log|Z'-A'|, \\ u'' + 2\log|Z''-A''| + 2\log\log|Z''-A''|, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

ne peuvent pas devenir infinies à la fois.

Il importe de se rendre compte de la raison de cette différence entre les sommets de la deuxième et de la troisième espèce.

Soit $\rho^2 = x^2 + y^2$, et supposons, pour simplifier, que u soit fonction de ρ seulement; l'équation

$$\Delta u = 8e^u$$

peut alors s'écrire

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} = 8e^u. \tag{4}$$

Supposons que l'on veuille intégrer par approximations successives de la façon suivante; nous prendrons

$$\frac{d^2 u_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_0}{d\rho} = 0,$$

$$\frac{d^2 u_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_1}{d\rho} = 8\, e^{u_0},$$

$$\frac{d^2 u_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_2}{d\rho} = 8(e^{u_0+u_1} - e^{u_0}),$$

$$\frac{d^2 u_3}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_3}{d\rho} = 8(e^{u_0+u_1+u_2} - e^{u_0+u_1}),$$

. . . .

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$$

Bornons-nous aux deux premières approximations; nous aurons, par exemple,

$$u_0 = p \log \rho, \qquad e^{u_0} = \rho^p,$$

$$u_1 = \frac{8 \rho^{p+2}}{(p+2)^2}.$$

L'expression de u_1 devient illusoire pour $p = -2$, et l'on peut en conclure que l'équation (4) ne peut avoir d'intégrale de la forme

$$u = -2 \log \rho + v,$$

v restant fini pour $\rho = 0$; elle en a une, au contraire, de la forme

$$u = p \log \rho + v$$

si p n'est pas égal à -2.

En revanche, l'équation (4) admet pour intégrale

$$u = -2 \log \rho - 2 \log \log \rho - \log 4.$$

Je me contenterai de cet aperçu qui suffit pour faire comprendre la différence entre le cas des sommets de la deuxième espèce qui correspond à p différent de -2, et celui des sommets de la troisième espèce qui correspond à $p = -2$.

La variable z est le rapport des intégrales d'une certaine équation fuchsienne

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2 v}{dZ^2} = \varphi(Z, Z')v$$

qui correspond à l'équation (1) du paragraphe précédent.

Si le « type » de cette équation est donné, on connaîtra :

1° La relation algébrique

$$f(Z, Z') = 0;$$

2° Les valeurs A de Z qui correspondent aux divers cycles de sommets, soit de la seconde, soit de la troisième espèce;

3° Le nombre entier n relatif à chacun des sommets de la seconde espèce.

III. — Surfaces de Klein.

M. Klein a imaginé un mode de représentation des fonctions algébriques dont l'emploi peut nous être utile.

Considérons une courbe algébrique définie par l'équation

$$(2) \qquad f(Z, Z') = 0.$$

On peut construire une surface fermée, et de telle façon qu'à tout point réel ou imaginaire de la courbe (2) corresponde un point réel de la surface et un seul. Cependant, à un point double de la courbe (2) correspondront deux points réels de la surface, appartenant respectivement aux deux branches de courbe qui se coupent au point double.

Nous supposerons, d'ailleurs, que les coordonnées du point de la surface sont des fonctions continues des coordonnées du point correspondant de la courbe, et même que ces fonctions continues ont des dérivées de tous les ordres.

Les surfaces de Riemann ne sont que des cas particuliers des surfaces de Klein; une surface de Klein se réduit à une surface de Riemann quand elle est infiniment aplatie et réduite à un certain nombre de feuillets appliqués sur un plan.

Mais nous devons faire une distinction et séparer les surfaces de Klein *isotropes* des surfaces de Klein *anisotropes*.

Une surface de Klein sera dite *isotrope* si le mode de correspondance entre les points de la courbe et ceux de cette surface est telle que la représentation du plan des Z sur la surface de Klein soit une *représentation conforme*. Aux différents points du plan des Z correspondent différents points de la courbe (2) et, par conséquent, différents points de la surface de Klein; cette correspondance définit une transformation d'une région du plan des Z dans une région de la surface de Klein; pour que la surface de Klein soit isotrope, il faut que cette transformation conserve les angles.

Nous pourrions ne nous servir que des surfaces isotropes; les travaux de MM. Schwarz et Klein permettent, en effet, d'affirmer que les différents points d'une courbe algébrique quelconque peuvent toujours être représentés sur une surface de Klein isotrope.

Mais il est préférable de ne pas s'imposer cette restriction, ce qui ne compliquera pas beaucoup notre analyse; et, en effet, on sera dispensé de s'appuyer sur le théorème que je viens de citer et dont la démonstration est assez longue.

Au contraire, on peut pour ainsi dire regarder comme évident que, si l'on se donne une courbe (2) quelconque de genre p et une surface fermée quelconque $2p+1$ fois connexe, on peut faire correspondre d'une façon univoque les points de la courbe à ceux de la surface.

Ainsi, l'on pourra faire correspondre d'une façon univoque les points réels d'une sphère et les points imaginaires d'une courbe unicursale quelconque; ou bien les points réels d'un tore et les points imaginaires d'une courbe de genre 1 quelconque.

Précisons la nature de la correspondance.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que la courbe (2) n'a d'autre singularité que des points doubles ordinaires et qu'elle se comporte régulièrement à l'infini, c'est-à-dire que ses directions asymptotiques sont toutes distinctes et non parallèles aux axes.

Cela posé, soit M un point de coordonnées courantes sur la surface, correspondant au point Z, Z' de la courbe; soit P un point de la surface de Klein, correspondant au point

$$Z = A, \qquad Z' = A'$$

de la courbe.

Si la distance MP est très petite et si au point

$$Z = A, \qquad Z' = A'$$

on n'a pas

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

la distance MP est du même ordre de grandeur que $|Z - A|$.

Si, au contraire, on a

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

mais si l'on n'a pas

$$\frac{df}{dZ'} = 0,$$

la distance MP ne sera pas du même ordre de grandeur que $|Z - A|$; elle sera, en général, du même ordre de grandeur que le carré de $|Z - A|$ et en tout cas du même ordre de grandeur que $|Z' - A'|$.

Si l'on a à la fois

$$\frac{df}{dZ} = \frac{df}{dZ'} = 0,$$

c'est-à-dire si le point $Z = A$, $Z' = A'$ est un point double de la courbe (2), la distance MP ne sera plus du même ordre de grandeur que $|Z - A|$ ou que $|Z' - A'|$; mais nous pouvons poser

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

R étant une fonction rationnelle de Z et Z' dont le numérateur et le dénominateur s'annulent au point double.

Si A'' est l'une des deux valeurs que prend Z'' au point double et celle précisément qui correspond au point P, la distance MP est du même ordre de grandeur que $|Z'' - A''|$.

Si enfin le point P correspond à un point à l'infini de la courbe (2), la distance MP est du même ordre de grandeur que $\left|\frac{1}{Z}\right|$.

Considérons maintenant une fonction u des coordonnées du point M; le point M correspond à un point du plan des Z dont les coordonnées sont X et Y, parties réelle et imaginaire de Z. Alors u est aussi une fonction de X et Y.

Soient dS un arc infiniment petit dans le plan des Z et $d\sigma$ l'arc correspondant sur la surface de Klein; soient $d\Omega$ une aire infiniment petite dans le plan des Z et $d\omega$ l'aire correspondante sur la surface.

Par l'extrémité Z de l'arc dS, je mène un arc infiniment petit ZZ_1 normal à dS et dont la longueur sera dN.

Soit MM_1 l'arc infiniment petit de la surface de Klein correspondant à l'arc ZZ_1 et aboutissant, par conséquent, à l'extrémité M de l'arc $d\sigma$.

Supposons d'abord la surface de Klein isotrope; alors, si j'appelle dn la longueur de l'arc MM_1, l'arc MM_1 sera normal à $d\sigma$ et l'on aura

$$\frac{d\sigma}{dn} = \frac{dS}{dN}, \qquad \frac{d\omega}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{dS}\right)^2.$$

Soit u la valeur de la fonction u au point M, ou, ce qui revient au même, au point Z et

$$u + \frac{du}{dn}dn = u + \frac{du}{dN}dN$$

sa valeur au point M_1 ou, ce qui revient au même, au point Z_1. On aura

$$\frac{du}{dn}\,d\sigma = \frac{du}{dN}\,dS.$$

Le théorème de Green, appliqué dans le plan des Z, nous donne

$$\int \Delta u \, d\Omega = \int \frac{du}{dN}\,dS, \tag{3}$$

ou, en considérant deux fonctions u et v,

$$\int v\,\Delta u\, d\Omega = \int v\frac{du}{dN}\,dS - \int\left(\frac{du}{dX}\frac{dv}{dX} + \frac{du}{dY}\frac{dv}{dY}\right)d\Omega. \tag{4}$$

Les intégrales sont étendues soit à tous les éléments $d\Omega$ d'une certaine aire plane, soit à tous les éléments dS du contour qui limite cette aire. Les fonctions u et v sont supposées continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Posons maintenant

$$\mathrm{D}u = \Delta u\,\frac{d\Omega}{d\omega}$$

et

$$\mathrm{E}(u, v) = \left(\frac{du}{dX}\frac{dv}{dX} + \frac{du}{dY}\frac{dv}{dY}\right)\frac{d\Omega}{d\omega},$$

de telle sorte que

$$\mathrm{E}(u, v) = \mathrm{E}(v, u),$$
$$\mathrm{E}(u, u) > 0.$$

Les équations (3) et (4) deviennent alors

$$\int \mathrm{D}u\,d\omega = \int \frac{du}{dn}\,d\sigma, \tag{3 bis}$$

$$\int v\,\mathrm{D}u\,d\omega = \int v\frac{du}{dn}\,d\sigma - \int \mathrm{E}(u, v)\,d\omega. \tag{4 bis}$$

Ces équations représentent le théorème de Green étendu à la surface de Klein; mais la première est susceptible d'une interprétation physique remarquable. Supposons que u représente la température d'un point de la surface; alors $\frac{du}{dn}$ représentera la dérivée de cette température estimée suivant la normale à l'arc $d\sigma$.

Si la surface est supposée conductrice et qu'elle soit homogène et isotrope au point de vue de la conductibilité calorifique, le produit

$$\frac{du}{dn}\,d\sigma$$

représentera le flux de chaleur qui traverse l'élément $d\sigma$ pendant l'unité de temps, pourvu que l'on choisisse convenablement les unités.

L'intégrale

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma$$

représente alors la quantité de chaleur qui entre dans l'aire $\int d\omega$ à travers son contour.

L'expression $\mathrm{D}u\,d\omega$ représente donc la quantité de chaleur cédée à l'élément de surface $d\omega$ par les éléments voisins de la surface.

Supposons maintenant la surface de Klein anisotrope.

D'abord l'arc MM_1 ne sera plus normal à l'arc $d\sigma$.

Si l'on considère sur le plan des Z un cercle infiniment petit ayant pour centre le point Z, la figure correspondante sur la surface de Klein sera une ellipse infiniment petite, ayant pour centre le point M. Alors les tangentes à l'arc MM_1 et à l'arc $d\sigma$ seront deux diamètres conjugués de cette ellipse.

Nous n'aurons plus alors

$$\frac{\mathrm{MM}_1}{d\mathrm{N}} = \frac{d\sigma}{d\mathrm{S}};$$

mais nous pourrons poser

$$dn = \frac{d\sigma\, d\mathrm{N}}{d\mathrm{S}}$$

et nous aurons

$$\mathrm{MM}_1 = \frac{a'\, dn}{b'},$$

a' et b' étant les longueurs des diamètres conjugués de notre ellipse qui sont dirigés respectivement suivant les tangentes à MM_1 et à $d\sigma$.

Ayant ainsi modifié la définition de dn, nous aurons

$$\frac{du}{dn} d\sigma = \frac{du}{d\mathrm{N}} d\mathrm{S}.$$

Nous conserverons les définitions de $\mathrm{D}u$ et de $\mathrm{E}(u, v)$ et nous retomberons sur les équations (3 *bis*) et (4 *bis*).

L'interprétation physique subsiste ; si, en effet, la surface est supposée conductrice, mais que la conductibilité ne soit pas isotrope, le flux de chaleur qui traverse l'élément $d\sigma$ sera encore représenté par le produit

$$\frac{du}{dn} d\sigma,$$

la définition de dn ayant été modifiée comme nous venons de le dire.

L'équation (3 *bis*) entraîne comme conséquence

$$\int \mathrm{D}u\, d\omega = 0,$$

quand l'intégrale est étendue à la surface de Klein tout entière; et, en effet, cette surface est fermée.

L'interprétation physique de cette équation est évidente : la conductibilité de la surface amène des échanges de chaleur entre ses diverses parties, mais ne peut altérer la quantité totale de chaleur que possède la surface entière.

IV. — La fonction U.

Nous considérons diverses quantités

$$Z, \quad Z', \quad Z''$$

toutes fonctions rationnelles de Z, Z', et les fonctions correspondantes

$$u, \quad u', \quad u'',$$

telles qu'elles ont été définies dans le paragraphe II.

Posons maintenant

$$e^{\mathrm{U}} = e^u \frac{d\Omega}{d\omega}.$$

On en conclurait, si la surface de Klein était isotrope,

$$e^{\mathrm{U}} = \frac{ds^2}{d\sigma^2}.$$

Dans tous les cas on aura également

$$e^{\mathrm{U}} = e^u \frac{d\Omega'}{d\omega},$$

l'aire $d\Omega'$ étant l'aire du plan des Z' qui correspond à l'aire $d\Omega$ du plan des Z; et, en effet, l'on a

$$e^u = \frac{ds^2}{dS^2}, \qquad e^{u'} = \frac{ds^2}{dS'^2}, \qquad \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{dS^2}{dS'^2}.$$

On aurait de même

$$e^{\mathrm{U}} = e^{u''} \frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

La définition de la fonction U *est donc indépendante du choix de la fonc-*

tion Z parmi les diverses fonctions

$$Z, \quad Z', \quad Z'', \quad \ldots.$$

Il vient alors

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega} = 8\, e^u \frac{d\Omega}{d\omega} = 8\, e^U$$

et enfin

$$DU = 8\, e^U + D \log \frac{d\Omega}{d\omega};$$

comme $D \log \frac{d\Omega}{d\omega}$ est une fonction connue que je puis poser égale à $-\Phi$, je puis écrire

$$(1) \qquad DU = 8\, e^U - \Phi.$$

La définition de U ne dépendant pas du choix de Z, on devra avoir

$$-\Phi = D \log \frac{d\Omega}{d\omega} = D \log \frac{d\Omega'}{d\omega} = D \log \frac{d\Omega''}{d\omega} = \ldots$$

et par conséquent

$$D \log \frac{d\Omega'}{d\Omega} = 0, \qquad \Delta \log \frac{d\Omega'}{d\Omega} = 0,$$

ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier.

Je dis maintenant que la fonction Φ ne peut devenir infinie. En effet, elle ne peut cesser d'être finie que si $\log \frac{d\Omega}{d\omega}$ est infini, c'est-à-dire si

$$Z = \infty \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dZ'} = 0.$$

Mais il faudrait en même temps que

$$\log \frac{d\Omega'}{d\omega} = \infty,$$

ce qui entraînerait

$$Z' = \infty \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dZ} = 0.$$

Il n'y a donc de doute que pour les points de la surface de Klein qui correspondent aux points à l'infini ou aux points doubles de la courbe

$$(2) \qquad f(Z, Z') = 0.$$

Mais il faudrait encore que, pour toutes les fonctions Z'', on eût

$$\log \frac{d\Omega'}{d\omega} = \infty.$$

Or c'est ce qui n'arrive pas, pour un point à l'infini, si l'on fait

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

ni pour un point double, si l'on fait

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

le numérateur et le dénominateur de R s'annulant à la fois au point double.

La fonction Φ *est donc toujours finie.* C. Q. F. D.

Que dire maintenant de la fonction U.

Si on laisse de côté les points de la surface de Klein qui correspondent à un sommet de deuxième ou de troisième espèce du polygone R_0, on pourra trouver une fonction Z'' telle que

$$u'' \quad \text{et} \quad \log \frac{d\Omega''}{d\omega}$$

soient finis. La fonction U est donc finie.

Si la fonction fuchsienne est de première espèce, la fonction U *sera donc finie sur toute la surface de Klein et elle sera définie par l'équation*

$$\Delta U = 8e^U - \Phi. \tag{1}$$

Supposons maintenant que a soit un sommet de deuxième espèce de R_0 et soient A, A', A'' les valeurs correspondantes de Z, Z' et Z'' et P le point correspondant de la surface de Klein.

Nous pourrons supposer que l'on a choisi la fonction Z'' de telle sorte que

$$\log \frac{d\Omega'}{d\omega}$$

reste fini ; alors la différence

$$u'' + \frac{2n-2}{n} \log |Z' - A'|$$

et, par conséquent, la différence

$$U + \frac{2n-2}{n} \log MP$$

resteront finies.

Une observation cependant : lorsque Z'' tend vers A'', l'expression

$$u + \frac{2n-2}{n} \log |Z'' - A''|$$

tend vers une limite finie et déterminée; mais quand le point M se rapproche de P, l'expression

$$U + \frac{2n-2}{n} \log MP$$

à moins que la surface de Klein ne soit isotrope) reste finie, mais ne tend pas vers une limite déterminée; sa limite dépend de la direction de la droite MP. Si ρ est le rayon d'un cercle très petit situé dans le plan des Z'' et ε le diamètre de l'ellipse correspondante de la surface de Klein dont la direction est la même que celle de MP, c'est l'expression

$$U + \frac{2n-2}{2} \log \frac{\rho . MP}{\varepsilon}$$

qui tend vers une limite déterminée quand MP tend vers zéro.

Posons

$$v'' = u'' + \frac{2n-2}{n} \log |Z'' - A''|,$$

il viendra

$$\Delta v'' = \Delta u'' = 8\, e^{u''} \frac{d\Omega''}{d\Omega} = 8\, e^{v''} |Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}} \frac{d\Omega''}{d\Omega}.$$

On voit que la fonction v'' satisfait à une équation de la forme

$$\Delta v'' = \theta\, e^{v''} \frac{d\Omega''}{d\Omega},$$

où θ est une fonction donnée, constamment positive, mais devenant infinie pour $Z'' = A''$.

Posons maintenant

$$e^V = e^{v''} \frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Si nous conservons aux lettres θ et Φ leur signification

$$\theta = 8 |Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}}; \qquad \Phi = -D \log \frac{d\Omega''}{d\omega},$$

il viendra

$$DV = \theta e^V - \Phi.$$

Au point P (correspondant au point $Z'' = A''$), la fonction θ deviendra infinie, mais V et Φ resteront finis.

Envisageons de même un sommet de la troisième espèce; nous choisirons u'' de telle façon que

$$u'' + 2 \log |Z'' - A''| + 2 \log \log |Z'' - A''|$$

reste fini et nous poserons

$$v'' = u'' + 2\log|Z'' - A''| + 2\log\log|Z'' - A''|,$$
$$\theta = 8|Z'' - A''|^{-2}\log^{-2}|Z'' - A''|.$$

Nous aurons alors

$$\Delta v'' = \Delta u'' + 2\Delta\log\log|Z'' - A''| = \frac{d\Omega''}{d\Omega}\left(8e^{u''} - \frac{2}{|Z'' - A''|^2\log^2|Z'' - A''|}\right),$$

et, si nous posons encore

$$e^V = e^{v''}\frac{d\Omega''}{d\omega},$$

il viendra

$$DV = \theta e^V - \Phi - \frac{\theta}{4}\frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Nous sommes ainsi conduits à changer la définition de U. Nous poserons

$$U = u + \log\frac{d\Omega}{d\omega} - h,$$

où h est une fonction uniforme qui reste finie en tous les points de la surface de Klein, sauf aux points qui correspondent à des sommets de deuxième ou de troisième espèce de R_0.

En un sommet de la deuxième espèce, la différence

$$h - \frac{2n-2}{n}\log|Z'' - A''|$$

devra rester finie; en un sommet de troisième espèce, la différence

$$h - 2\log|Z'' - A''| - 2\log\log|Z'' - A''|$$

devra rester finie.

Nous pourrons toujours choisir la fonction h de façon à satisfaire à ces conditions et même de telle façon que la fonction h en dehors des sommets de deuxième et de troisième espèce, et les fonctions

$$h - \frac{2n-2}{n}\log|Z'' - A''|; \qquad h - 2\log|Z'' - A''| - 2\log\log|Z'' - A''|$$

dans le voisinage de ces sommets, que ces diverses fonctions, dis-je, aient leurs dérivées de tous les ordres finies et continues.

Dans ces conditions, la fonction U *sera toujours finie et elle satisfera à l'équation*

$$DU = 8e^U e^{-h} + D\log\frac{d\Omega}{d\omega} + Dh,$$

ou, en posant

$$\theta = 8\, e^{-h}, \qquad -\Phi = \mathrm{D} \log \frac{d\Omega}{d\omega} + \mathrm{D}\, h,$$

à l'équation

$$\mathrm{DU} = \theta\, e^{\mathrm{U}} - \Phi. \tag{1 bis}$$

Les fonctions θ et Φ sont des fonctions *données;* la première est toujours positive, elle ne peut jamais s'annuler; elle ne peut devenir infinie qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèces; la fonction Φ ne peut devenir infinie qu'aux sommets de troisième espèce.

Aux sommets de deuxième espèce, θ devient infinie comme

$$| Z'' - A'' |^{\frac{2-2n}{n}}.$$

Aux sommets de troisième espèce, θ et Φ deviennent infinies comme

$$(| Z'' - A'' | \log | Z'' - A'' |)^{-2}.$$

Le rapport

$$\frac{\Phi}{\theta}$$

reste donc fini: la limite de ce rapport est d'ailleurs égale à

$$\frac{1}{4} \frac{d\Omega''}{d\omega};$$

elle est donc positive.

Ainsi, s'il y a des sommets de troisième espèce, la fonction Φ peut devenir infinie, mais infinie positive; elle n'a donc plus de limite supérieure, mais *elle a toujours une limite inférieure.*

V. — Maxima et minima.

La propriété fondamentale de l'expression $\mathrm{D}u$ est la suivante : Si la fonction u est maxima, $\mathrm{D}u$ est négatif; si la fonction u est minima, $\mathrm{D}u$ est positif; ce qui signifie, au point de vue physique, qu'un point où la température est maximum peut céder de la chaleur aux points voisins, mais ne peut en recevoir.

Examinons la chose d'un peu plus près, et pour cela reprenons l'équation (3 *bis*) du paragraphe III

$$\int \mathrm{D}u\, d\omega = \int \frac{du}{dn}\, d\sigma. \tag{3 bis}$$

Si au point P la fonction u est maximum, dans le voisinage de ce point, les courbes $u =$ const. seront de petites courbes fermées s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point P.

L'intégrale $\int \frac{du}{dn} d\sigma$, prise le long d'une de ces petites courbes, sera toujours négative, car $\frac{du}{dn}$ sera toujours négatif.

L'intégrale $\int \mathrm{D}u\, d\omega$, étendue à l'aire limitée par une de ces petites courbes, sera donc négative.

Il faut donc qu'à l'intérieur de chacune de ces petites courbes u puisse prendre des valeurs négatives et, comme je puis supposer cette courbe aussi voisine du point P que je le veux, on pourra trouver, aussi près du point P qu'on le veut, des points où $\mathrm{D}u$ sera négatif.

Si la fonction $\mathrm{D}u$ est continue, elle ne pourra pas être positive en P; elle pourra s'annuler en P, mais à la condition qu'il y ait dans le voisinage de P des points où elle est négative. Il peut se faire que $\mathrm{D}u$ devienne infinie en P, mais toujours à la condition qu'il y ait dans le voisinage de P des points où elle soit négative.

Il convient toutefois de s'assurer que, si $\mathrm{D}u$ devient infini, l'intégrale

$$\int |\mathrm{D}u|\, d\omega$$

reste finie. C'est ce qui arrivera dans le problème qui nous occupe.

Nous avons vu que, aux sommets de la deuxième espèce, DU devient infini de l'ordre de

$$\frac{1}{\mathrm{MP}^{2-\frac{2}{n}}}$$

et aux sommets de la troisième espèce, infini de l'ordre de

$$\frac{1}{\mathrm{MP}^2 \log^2 \mathrm{MP}}.$$

L'intégrale

$$\int |\mathrm{DU}|\, d\omega$$

est du même ordre que

$$\int |\mathrm{DU}|\, \mathrm{MP}\, d(\mathrm{MP}),$$

c'est-à-dire que

$$\int \frac{d\mathrm{MP}}{\mathrm{MP}^{1-\frac{2}{n}}}, \qquad \int \frac{d\mathrm{MP}}{\mathrm{MP}\log^2 \mathrm{MP}},$$

et l'on vérifie aisément que ces deux intégrales sont finies.

Considérons alors l'équation

$$DU = \theta e^U - \Phi.$$

Je suppose que θ est toujours positif et ne peut s'annuler; je supposerai en outre que θ et Φ sont toujours finis (c'est ce qui arrive, comme nous l'avons vu, dans le cas des fonctions fuchsiennes de la première espèce).

Enfin, je supposerai d'abord que Φ est toujours positif et ne peut s'annuler.

Alors θ et Φ, ne pouvant ni s'annuler, ni devenir infinies, admettront chacune un minimum θ_0 et Φ_0 et chacune un maximum θ_1 et Φ_1; toutes ces quantités sont positives.

D'autre part U, étant fini, aura un maximum U_1 et un minimum U_0.

Pour le maximum, on aura

$$DU < 0$$

et, par conséquent,

$$\theta e^{U_1} - \Phi < 0,$$

ou *a fortiori*

$$\theta_0 e^{U_1} - \Phi_1 < 0.$$

Pour le minimum, on aura

$$DU > 0,$$

d'où

$$\theta e^{U_0} - \Phi > 0,$$

ou *a fortiori*

$$\theta_1 e^{U_0} - \Phi_0 > 0.$$

La fonction U satisfera donc toujours aux inégalités

$$\log \Phi_0 - \log \theta_1 < U < \log \Phi_1 - \log \theta_0. \tag{1}$$

On peut obtenir des limites plus rapprochées en considérant le rapport $\frac{\Phi}{\theta}$; les inégalités

$$\theta e^{U_1} - \Phi < 0, \qquad \theta e^{U_0} - \Phi > 0$$

montrent que e^U reste toujours compris entre le minimum et le maximum de $\frac{\Phi}{\theta}$.

Ce résultat serait illusoire si Φ n'était pas toujours positif.

Supposons maintenant que Φ ne soit pas toujours positif, mais qu'on puisse trouver une fonction η, telle que

$$\Phi + D\eta$$

soit toujours positif.

Posons alors

$$U = V + \eta;$$

l'équation devient alors

$$DV = \theta e^\eta e^V - \Phi - D\eta.$$

Les fonctions θe^{η}, $\Phi + D\eta$ étant toujours finies et positives, les résultats précédents peuvent s'appliquer, et l'on voit que e^V reste toujours compris entre le maximum et le minimum de

$$\frac{\Phi + D\eta}{\theta e^{\eta}}.$$

Si donc η_0 et η_1 sont le minimum et le maximum de η, et si ζ_0 et ζ_1 sont le minimum et le maximum de

$$\frac{\Phi + D\eta}{\theta},$$

on aura

$$(2) \qquad \zeta_0 e^{\eta_0 - \eta_1} < e^U < \zeta_1 e^{\eta_1 - \eta_0}.$$

Si θ et Φ peuvent devenir infinis, les résultats précédents subsistent-ils? Dans les cas dont nous aurons à nous occuper, θ ne pourra devenir infini qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèces et Φ aux sommets de troisième espèce.

Dans tous les cas, l'expression

$$(3) \qquad e^U - \frac{\Phi}{\theta}$$

restera finie et déterminée; cette expression devra être négative pour les maxima (sans quoi DU ne pourrait devenir négatif dans le voisinage du point correspondant au maximum) et positive pour les minima.

Si donc Φ est toujours positif, e^U sera toujours compris entre le maximum et le minimum de $\frac{\Phi}{\theta}$.

Si Φ n'est pas toujours positif, mais si $\Phi + D\eta$ est toujours positif, les inégalités (2) subsisteront.

Envisageons maintenant l'équation

$$(4) \qquad DV = \theta e^U V - \psi.$$

Soient V_1 et V_0 le maximum et le minimum de V; on devra avoir

$$\theta e^U V_1 - \psi < 0,$$
$$\theta e^U V_0 - \psi > 0,$$

ce qui montre que V reste compris entre le maximum et le minimum du rapport

$$\frac{\psi}{\theta e^U}.$$

Comme θe^U est essentiellement positif et ne peut s'annuler, ce résultat reste vrai, soit que ψ soit constamment positif, soit que ψ puisse changer de signe.

Il reste vrai encore et n'est pas illusoire, quand θ et même quand ψ peuvent devenir infinis pourvu que le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ demeure fini.

Je dis maintenant que l'équation (4) ne peut admettre deux solutions; si elle en admettait deux, V et V', la différence V — V' satisferait à l'équation

$$D(V - V') = \theta e^U (V - V').$$

Cette équation est de même forme que (4), mais ψ est nul. Sont donc également nulles la limite supérieure et la limite inférieure entre lesquelles peut varier $V - V'$, d'après ce que nous venons de voir. Donc

$$V - V' = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De même, l'équation

$$DU = \theta e^U - \Phi$$

ne peut admettre deux solutions, car si elle en admettait deux, U et $U + V$, on aurait

$$DV = \theta e^U (e^V - 1)$$

Si V_1 et V_0 sont le maximum et le minimum de V, on devrait avoir

$$e^{V_1} \leq 1, \qquad e^{V_0} \geq 1,$$

d'où

$$V_1 \leq 0, \qquad V_0 \geq 0, \qquad V_1 \geq V \geq V_0,$$

ce qui entraîne

$$V_1 = V = V_0 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VI. L'équation $Du = \varphi$.

Je me propose d'intégrer l'équation

$$(1) \qquad Du = \varphi,$$

où u est la fonction inconnue qui doit être finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, et la fonction φ qui est donnée. C'est comme si l'on demandait la température finale de chaque point de la surface, en supposant qu'elle ne cède pas de chaleur au dehors par rayonnement, mais que chaque élément $d\omega$ de la surface est le siège d'une source de chaleur produisant dans l'unité de temps une quantité de chaleur $-\varphi\, d\omega$.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que

$$\int \varphi \, d\omega = 0, \tag{2}$$

l'intégrale étant étendue à la surface entière. En effet, nous avons trouvé plus haut

$$\int \mathrm{D}u \, d\omega = 0$$

et, d'ailleurs, l'équilibre thermique n'est évidemment possible que si la quantité *totale* de chaleur fournie par les sources est nulle.

Supposons cette condition remplie. Pour résoudre notre problème, nous allons introduire une fonction qui jouera le même rôle que la fonction de Green dans la théorie du potentiel.

Reprenons la courbe algébrique

$$f(Z, Z') = 0, \tag{3}$$

qui est la même que la courbe (2) des paragraphes précédents.

Considérons l'intégrale abélienne

$$J = \int R(Z, Z')\, dZ, \tag{4}$$

où R est une fonction rationnelle de Z et de Z'.

Soient alors

$$(Z = Z_0,\ Z' = Z'_0), \qquad (Z = Z_1,\ Z' = Z'_1),$$
$$(Z = U_0,\ Z' = U'_0), \qquad (Z = U_1,\ Z' = U'_1)$$

quatre points analytiques pris sur la courbe (3). Les deux premiers (Z_0, Z'_0), (Z_1, Z'_1) seront les limites inférieure et supérieure de l'intégrale (4).

Cette intégrale elle-même sera une intégrale abélienne de la troisième espèce admettant pour points singuliers logarithmiques les deux points analytiques (U_0, U'_0), (U_1, U'_1).

Donc, sauf aux points analytiques (U_0, U'_0), (U_1, U'_1), la fonction J sera holomorphe; dans le voisinage de (U_0, U'_0), la différence

$$J + \log(Z_1 - U_0) - \log(Z_0 - U_0)$$

et, dans le voisinage de (U_1, U'_1), la différence

$$J - \log(Z_1 - U_1) + \log(Z_0 - U_1)$$

seront holomorphes en Z_1 et Z_0.

Pour achever de définir l'intégrale (4), nous supposerons que les parties réelles de ses $2p$ périodes cycliques sont nulles.

L'intégrale J ne change pas quand on permute les deux points analytiques

$$(Z_0, Z'_0), \quad (Z_1, Z'_1)$$

avec les deux points analytiques

$$(U_0, U'_0), \quad (U_1, U'_1).$$

C'est le résultat bien connu dans la théorie des fonctions abéliennes sous le nom de *Vertauschung von Parameter und Argument*.

Je désignerai par M, P, M_1, P_1 les points de la surface de Klein qui correspondent aux quatre points analytiques

$$(Z_1, Z'_1), \quad (Z_0, Z'_0), \quad (U_1, U'_1), \quad (U_0, U'_0),$$

et par

$$G(M, P: M_1, P_1)$$

la partie réelle de l'intégrale J.

On voit que

$$G, \quad G + \log\left|\frac{Z_1 - U_0}{Z_0 - U_0}\right|, \quad G - \log\left|\frac{Z_1 - U_1}{Z_0 - U_1}\right|$$

seront des fonctions harmoniques de X et Y (si l'on pose $Z_1 = X + iY$), la première pour tous les points analytiques sauf pour U_0 et U_1, la seconde dans le voisinage de U_0, la troisième dans le voisinage de U_1.

Observons enfin que la définition précédente devrait être modifiée si l'un de nos quatre points analytiques venait en un point de la courbe (3) où

$$\frac{df}{dZ'} = 0, \qquad \frac{df}{dZ} = 0;$$

il conviendrait de remplacer alors par la fonction Z' la fonction Z qui joue le rôle prépondérant dans notre définition; ou bien encore, si l'un des quatre points analytiques venait en un point double de la courbe (3), il faudrait remplacer Z par

$$Z'' = \frac{P(Z, Z')}{Q(Z, Z')},$$

P et Q étant deux polynomes entiers s'annulant tous deux au point double.

Soient $d\omega$ et $d\omega_1$ deux éléments quelconques de la surface de Klein; soient M et M_1 les centres de gravité de ces éléments; soient P et P_1 deux points *fixes* quelconques sur la surface de Klein. Soit φ_1 une fonction quelconque des coordonnées du point M_1.

Considérons l'intégrale

$$v = \int G(M, P; M_1, P_1)\varphi_1 \, d\omega_1, \tag{5}$$

étendue à tous les éléments $d\omega_1$ de la surface de Klein. C'est une fonction des coordonnées du point M.

Je dis d'abord que cette intégrale est finie, si la fonction φ_1 est finie ellemême. Et, en effet, la fonction G ne peut devenir infinie que si le point M_1 vient en M ou en P (elle s'annule si M se confond avec P et, par conséquent aussi, à cause de la *Vertauschung*, si M_1 se confond avec P_1); mais, si M_1 vient en M ou en P, la fonction G devient infinie logarithmiquement, de sorte que notre intégrale reste finie et déterminée.

Pour pousser l'étude plus loin, je divise la surface de Klein en deux régions, l'une S' réduite à une petite calotte entourant le point M, l'autre S'' comprenant le reste de la surface, et je pose

$$v = v' + v'',$$

v' et v'' représentant la même intégrale étendue respectivement à S' et S''.

Je suppose que le point M ne se confond ni avec P ni avec P_1.

Considérons d'abord l'intégrale v''; si M_1 reste dans la région S'' qui ne contient pas le point M, les trois distances MM_1, MP, MP_1 restent finies et l'on peut assigner une limite supérieure à la fonction G et à chacune de ses dérivées.

L'intégrale

$$\int H\varphi_1 \, d\omega_1,$$

où H est une dérivée quelconque de G, est non seulement finie, mais *uniformément* convergente. Nous pouvons donc appliquer le procédé de la différentiation sous le signe $\int$ et nous voyons d'abord que toutes les dérivées de v'' sont finies.

Il vient ensuite

$$Dv'' = \int DG\varphi_1 \, d\omega_1 = 0,$$

puisque

$$DG = 0.$$

Considérons maintenant v'; la portion S' de la surface étant très petite pourra être représentée d'une façon univoque sur le plan des Z et nous aurons

$$v' = \int G\varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1,$$

$d\Omega_1$ étant l'aire de l'élément du plan des Z correspondant à l'élément $d\omega_1$ de la surface de Klein et l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\Omega_1$ de la portion du plan des Z qui correspond à la région S'.

Mais on a

$$G = \log|Z_1 - U_1| + H,$$

H étant une fonction harmonique de X et de Y.

Nous aurons alors

$$v' = v'_1 + v_2,$$
$$v_1 = \int \log|Z_1 - U_1| \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1,$$
$$v'_2 = \int H\varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1.$$

Nous voyons d'abord que l'on peut appliquer à l'intégrale v'_2 le procédé de la différentiation sous le signe $\int$, de sorte que toutes les dérivées de v'_2 sont finies; d'ailleurs on a

$$\Delta v'_2 = \int \Delta H \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1 = 0,$$

d'où

$$D v'_2 = 0.$$

Ensuite les propriétés du potentiel logarithmique nous apprennent :

1° Que v'_1 est fini ainsi que ses dérivées des K premiers ordres, si φ_1 est fini ainsi que ses dérivées des K — 1 premiers ordres;

2° Que

$$\Delta v'_1 = -2\pi\varphi \frac{d\omega}{d\Omega},$$

φ et $\frac{d\omega}{d\Omega}$ représentant les valeurs que prennent φ_1 et $\frac{d\omega_1}{d\Omega_1}$ quand le point M_1 vient en M. On en conclut

$$D v'_1 = -2\pi\varphi.$$

En résumé, v est fini ainsi que ses dérivées des K premiers ordres et φ est fini ainsi que ses dérivées des K — 1 premiers ordres, et l'on a

$$D v = -2\pi\varphi.$$

J'ai supposé que M ne se confondait ni avec P, ni avec P_1.

Si M se confond avec P, G et v s'annulent.

Il me reste à faire voir qu'aucune singularité ne se présente quand M se confond avec P_1, et pour cela je vais montrer que l'intégrale v ne dépend pas de la position du point P_1.

Si nous remplaçons P_1 par un autre point P_2, v se change en

$$\int G(M, P; M_1, P_2)\varphi_1\, d\omega_1.$$

Puisque

$$G(M, P; M_1, P_1) = G(M, P; M_1, P_2) - G(M, P; P_1, P_2),$$

je vois que v a augmenté de

$$\int G(M, P; P_1, P_2)\varphi_1\, d\omega_1 = G(M, P; P_1, P_2)\int \varphi_1\, d\omega_1.$$

Or cette expression est nulle à cause de la relation (2). Donc v n'a pas changé. C. Q. F. D.

En résumé, la solution de l'équation (1) *nous est donnée par la formule*

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int G(M, P; M_1, P_1)\varphi_1\, d\omega_1. \tag{6}$$

La solution donnée par l'équation (6) n'est pas unique; on peut évidemment y ajouter une constante arbitraire; à part cela, il n'y en a pas d'autre.

Ce qui caractérise la solution particulière (6), c'est qu'elle s'annule au point P.

La solution (6) satisfait à une inégalité qui nous sera utile dans la suite.

Soient η une fonction quelconque, toujours positive, et η_1 la valeur de cette fonction au point M_1. Soient

$$\varphi = \psi\eta, \qquad \varphi_1 = \psi_1\eta_1.$$

On aura évidemment

$$|u| < (\text{max. de } |\psi|)\int \frac{|G|\eta_1\, d\omega_1}{2\pi}.$$

L'intégrale

$$\int \frac{|G|\eta_1\, d\omega_1}{2\pi}$$

est une fonction de M; la fonction sous le signe $\int$ ne peut devenir infinie que dans trois cas : 1° si le point M vient en M_1; 2° si la fonction η_1 devient infinie; 3° si le point M vient en P_1.

Afin d'exclure ce troisième cas, je décrirai autour de P_1 une petite courbe fermée et je supposerai que le point M ne pénètre pas à l'intérieur de cette courbe fermée.

Lorsque le point M est voisin de M_1, la fonction G devient infinie de l'ordre de $\log MM_1$; en outre, je supposerai que la fonction χ_1 devient infinie en certains points A qui correspondront aux sommets de la deuxième espèce, et cela infinie de l'ordre de $M_1 A^{\frac{2-2n}{n}}$; je suppose qu'il n'y ait pas de sommets de la troisième espèce et qu'en tous les autres points la fonction χ_1 soit finie.

Alors l'intégrale

$$\int \frac{|G|\chi_1 \, d\omega_1}{2\pi}$$

est finie et même converge uniformément. Et, en effet, dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire si le point M coïncide avec un point A et si M_1 est très voisin de M, la fonction sous le signe $\int$ sera infinie de l'ordre de

$$MM_1^{\frac{2-2n}{n}} \log MM_1,$$

et l'intégrale ne deviendra pas infinie. Nous pouvons donc assigner à cette intégrale une limite β' et écrire

$$|u| < \beta' (\text{max. de } |\psi|). \tag{7}$$

Cette inégalité est vraie pourvu que M ne pénètre pas à l'intérieur de la courbe qui entoure le point P_1.

Mais nous avons vu que u ne dépend pas de la position du point P_1 et ne change pas quand P_1 vient en P_2; nous aurons donc

$$|u| < \beta'' (\text{max. de } |\psi|), \tag{7 bis}$$

pourvu que M ne pénètre pas à l'intérieur d'une petite courbe entourant P_2.

Si, alors, β est le plus grand des deux nombres β' et β'', nous aurons

$$|u| < \beta \, (\text{max. de } |\psi|), \tag{8}$$

quelle que soit la position du point M.

Ce résultat est vrai pourvu que la fonction χ_1 ne devienne jamais infinie que d'ordre $2 - \frac{2}{n} < 2$.

C'est une condition à laquelle satisfait la fonction θe^v quand il n'y a pas de sommet de troisième espèce.

VII. — L'équation $\mathrm{D}u = \eta u - \varphi$.

Considérons l'équation

$$\mathrm{D}u = \lambda\eta u - \varphi - \lambda\psi. \tag{1}$$

Je supposerai la solution développable suivant les puissances de λ et je la mettrai sous la forme

$$u = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \ldots.$$

Les c_k sont des constantes et les u_k s'annulent au point P.

J'aurai la suite d'équations

$$\tag{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}u_0 = -\varphi, \\ \mathrm{D}u_1 = \eta(u_0 + c_0) - \psi, \\ \mathrm{D}u_2 = \eta(u_1 + c_1), \\ \mathrm{D}u_3 = \eta(u_2 + c_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Pour que la solution soit possible, nous devrons avoir

$$0 = \int \varphi \, d\omega = \int [\eta(u_0 + c_0) - \psi] \, d\omega = \int \eta(u_1 + c_1) \, d\omega = \ldots,$$

ce qui nous donne la suite d'équations

$$\tag{3} \left\{ \begin{array}{l} c_0 \int \eta \, d\omega = \int \psi \, d\omega - \int \eta u_0 \, d\omega, \\ c_1 \int \eta \, d\omega = -\int \eta u_1 \, d\omega, \\ c_2 \int \eta \, d\omega = -\int \eta u_2 \, d\omega, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Si ces conditions sont supposées remplies, la formule (6) du paragraphe précédent nous permettra de calculer $u_0, u_1, \ldots$.

Ainsi, pourvu que l'on ait

$$\int \varphi \, d\omega = 0,$$

nous pouvons calculer successivement, par les équations (2) et (3), d'abord u_0, puis $c_0, u_1, c_1, u_2, c_2, \ldots$.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ les maxima de $|u_1|, |u_2|, \ldots$.

Si la fonction η est supposée toujours positive, on aura

$$|c_1| \int \eta \, d\omega < \int \eta \, |u_1| \, d\omega < \gamma_1 \int \eta \, d\omega,$$

d'où

$$|c_1| < \gamma_1,$$

et, de même,

$$|c_2| < \gamma_2, \qquad |c_3| < \gamma_3, \qquad \ldots.$$

L'inégalité (8) du paragraphe précédent nous donnera ensuite

$$\gamma_2 < \beta(\text{max. de } |u_1 + c_1|) < 2\beta\gamma_1$$

et, de même,

$$\gamma_3 < 2\beta\gamma_2, \qquad \gamma_4 < 2\beta\gamma_3, \qquad \ldots.$$

La série

$$\sum \lambda^k \gamma_k$$

converge donc, pourvu que

$$2\beta\lambda < 1;$$

et par conséquent, à cette condition, la série

$$\sum \lambda^k (u_k + c_k) \tag{4}$$

converge uniformément.

Si u est la somme de cette série, u sera donc une fonction finie et continue des coordonnées de M.

Nous aurons, d'autre part (puisque la série converge uniformément),

$$\int \eta \, u \, d\omega = \int \eta (u_0 + c_0) \, d\omega + \lambda \int \eta (u_1 + c_1) \, d\omega + \ldots = 0.$$

Nous pourrons alors, par la formule (6) du paragraphe précédent, trouver une fonction v qui satisfasse à l'équation

$$\mathrm{D}v = \lambda \eta u - \varphi - \lambda \psi.$$

Je dis que cette fonction v est identique à u.

Posons, en effet,

$$u = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \ldots + \lambda^n (u_n + c_n) + \mathrm{R}_n,$$

$$v = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \ldots + \lambda^{n+1} (u_{n+1} + c_{n+1}) + \mathrm{S}_n,$$

il viendra

$$\mathrm{DS}_n = \lambda \eta \mathrm{R}_n.$$

La série (4) convergeant uniformément, nous aurons

$$|R_n| < K(2\lambda\beta)^n,$$

K étant une constante assignable; on conclut

$$|S_n| < K(2\lambda\beta)^{n+1}.$$

Quand n croît indéfiniment $(2\lambda\beta)^n$ et, par conséquent, $|R_n|$ et $|S_n|$ tendent vers zéro. La différence $u - v$ est égale à

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1}(u_{n+1} + v_{n+1}) < |R_n| + |S_n| + 2\lambda^{n+1}\gamma_{n+1}.$$

Elle tend donc vers zéro quand n croît indéfiniment et, comme elle ne dépend pas de n, elle est nulle. Donc $u = v$. Donc u satisfait à l'équation

$$Du = \lambda\eta u - \varphi - \lambda\psi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette démonstration suppose que η, φ, ψ restent finis ou ne peuvent devenir infinis qu'en certains points (qui correspondraient aux sommets de la deuxième espèce) et *seulement infinis d'ordre* $2 - \frac{2}{n} < 2$.

Je terminerai par la remarque suivante :

Si, dans une certaine région de la surface de Klein, η, φ et ψ sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en sera de même de u.

Soit, en effet, $Dv = \theta$, équation que l'on peut intégrer par la formule (6) du paragraphe précédent.

Nous avons vu que, si, dans une certaine région, θ est finie ainsi que ses dérivées des K premiers ordres, v sera finie ainsi que ses dérivées des $K + 1$ premiers ordres.

Appliquons ce résultat à l'équation

$$Du = \lambda\eta u - \lambda\varphi - \lambda\psi.$$

Comme u est finie, le second membre est fini; donc u est finie ainsi que ses dérivées du premier ordre; donc le second membre est fini ainsi que ses dérivées du premier ordre; donc u est finie ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, et ainsi de suite.... C. Q. F. D.

Supposons maintenant que l'on sache intégrer l'équation

$$Du = \eta u - \varphi \tag{5}$$

et proposons-nous d'intégrer

$$(6)\qquad Du = (\eta + \lambda\eta')u - \varphi.$$

Les deux fonctions η et η' sont supposées toujours positives.

Soit

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots;$$

l'équation (6) nous donnera la suite d'équations

$$(7)\qquad \begin{cases} Du_0 = \eta u_0 - \varphi, \\ Du_1 = \eta u_1 + \eta' u_0, \\ Du_2 = \eta u_2 + \eta' u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les équations (7) étant de la forme (5), nous saurons les intégrer et elles nous donneront successivement $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

Les principes du paragraphe V nous donnent les inégalités suivantes :

$$|u_0| < \text{max. de} \left|\frac{\varphi}{\eta}\right|,$$

$$|u_1| < \text{max. de} \left|\frac{\eta' u_0}{\eta}\right|,$$

$$|u_2| < \text{max. de} \left|\frac{\eta' u_1}{\eta}\right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient alors γ_k le maximum de $|u_k|$ et β celui de $\left|\frac{\eta'}{\eta}\right|$; il viendra

$$\gamma_1 < \beta\gamma_0, \qquad \gamma_2 < \beta\gamma_1, \qquad \ldots.$$

Donc la série

$$(8)\qquad u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots$$

converge uniformément pourvu que

$$|\lambda\beta| < 1.$$

J'ai supposé plus haut que nous savions intégrer l'équation (5); je précise cette hypothèse en disant que nous savons l'intégrer quelle que soit la fonction φ, pourvu que le rapport $\left|\frac{\varphi}{\eta}\right|$ soit limité. J'ai supposé aussi plus haut que le rapport $\left|\frac{\eta'}{\eta}\right|$ a une limite supérieure, et c'est cette limite supérieure que j'ai appelée β.

Soit alors u la somme de la série (8); cette somme est finie; nous savons alors intégrer l'équation

$$Dv = \eta v + \lambda \eta' u - \varphi,$$

puisque le rapport

$$\left| \frac{\lambda \eta' u - \varphi}{\eta} \right|$$

est limité.

Je dis que l'intégrale v de cette équation est précisément égale à u.

Soient, en effet,

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \ldots + \lambda^n u_n + R_n,$$
$$v = u_0 + \lambda u_1 + \ldots + \lambda^{n+1} u_{n+1} + S_n;$$

on aura

$$DS_n = \eta S_n + \lambda \eta' R_n.$$

Or

$$|R_n| < K(\lambda\beta)^n, \qquad K \text{ étant une constante.}$$

Les principes du paragraphe X donnent ensuite

$$|S_n| < \text{max. de} \left| \frac{\lambda \eta' R_n}{\eta} \right| < K(\lambda\beta)^{n+1}.$$

Donc la différence

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1} u_{n+1}$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini ; elle est donc nulle et $u = v$.

C. Q. F. D.

On démontrerait ensuite comme plus haut que si, dans une certaine région, η, φ et η' sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en est de même de u.

Considérons maintenant l'équation

$$(9) \qquad Du = \eta u - \varphi$$

et posons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = 1,$$
$$\varphi = \varphi_1 + \lambda_1 \psi_1.$$

Les λ sont des constantes positives ; la fonction φ_1 est assujettie à la condition unique

$$\int \varphi_1 \, d\omega = 0,$$

mais elle est d'ailleurs arbitraire.

Nous allons intégrer successivement les équations

$$(10) \qquad \begin{cases} Du = \lambda_1 \eta u - \varphi_1 - \lambda_1 \psi_1, \\ Du = \lambda_1 \eta u + \lambda_2 \eta u - \varphi, \\ Du = (\lambda_1 + \lambda_2) \eta u + \lambda_3 \eta u - \varphi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Du = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p-1}) \eta u + \lambda_p \eta u - \varphi. \end{cases}$$

La première équation (10) est de la forme (1); nous saurons donc l'intégrer, pourvu que

$$\lambda_1 < \frac{1}{2\beta},$$

β étant la quantité qui figure dans l'inégalité (8) du paragraphe précédent.

Les autres équations (10) sont de la forme (6); on les rend identiques à l'équation (6) en changeant

$$\begin{array}{llll}
\lambda_1 \eta \text{ en } \eta, & \eta \text{ en } \eta', & \lambda_2 \text{ en } \lambda, & \text{pour la } 2^e \text{ équation (10)}, \\
(\lambda_1 + \lambda_2)\eta \text{ en } \eta, & \eta \text{ en } \eta', & \lambda_3 \text{ en } \lambda, & \text{pour la } 3^e \text{ équation (10)}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-1})\eta \text{ en } \eta; & \eta \text{ en } \eta', & \lambda_p \text{ en } \lambda, & \text{pour la } p^{\text{ième}} \text{ équation (10)}.
\end{array}$$

Nous saurons donc intégrer *successivement* ces équations (10), pourvu que

$$\lambda_2 < \frac{1}{\text{max. de } \dfrac{\eta}{\lambda_1 \eta}}, \qquad \lambda_3 < \frac{1}{\text{max. de } \dfrac{\eta}{(\lambda_1 + \lambda_2)\eta}}, \qquad \dots$$

ou

$$\lambda_2 < \lambda_1, \qquad \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \dots, \qquad \lambda_p < \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-1}.$$

Or nous pouvons toujours satisfaire à ces conditions et aux relations

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1, \qquad \lambda_1 < \frac{1}{2\beta},$$

en choisissant l'entier p assez grand.

Donc nous saurons intégrer l'équation (9), *pourvu que :*

1° *Le rapport* $\left|\dfrac{\varphi}{\eta}\right|$ *soit limité;*

2° *Que* η *soit toujours positif et ne s'annule pas;*

3° *Que* η *soit partout fini ou ne puisse devenir infini qu'en un nombre limité de points* (correspondant aux sommets de deuxième espèce) *et seulement d'ordre* $2 - \dfrac{2}{n} < 2$.

L'intégrale u est partout finie et continue.

Si, dans une certaine région, les fonctions données η et φ sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en sera de même de u.

VIII. — Extension aux sommets de troisième espèce.

Les résultats précédents s'appliquent, pourvu que la fonction η_1 ne devienne infinie qu'en un nombre limité de points et seulement d'ordre $2 - \frac{2}{n} < 2$.

C'est la condition à laquelle satisfait la fonction θe^V, s'il n'y a pas de sommets de troisième espèce. Mais aux sommets de troisième espèce, cette fonction θe^V devient infinie de la même manière que

$$\frac{1}{x^2 \log^2 x}$$

devient infini pour $x = 0$.

Nous sommes donc conduits à examiner ce qui se passe quand, en certains points (sommets de troisième espèce), la fonction η_1 devient infinie et cela de telle sorte que le produit

$$\eta_1 \overline{MK}^2 \log^2 \overline{MK}$$

tende vers une limite finie et déterminée quand le point M se rapproche indéfiniment du sommet de troisième espèce K.

Dans ce cas, l'intégrale

$$\int \frac{|G| \eta_1 \, d\omega_1}{2\pi},$$

considérée à la fin du paragraphe VI, n'est pas finie quand le point M vient en K; on ne peut donc pas lui assigner une limite supérieure β'; on ne peut donc plus écrire l'inégalité (8) du paragraphe VI.

Si alors nous reprenons les équations (1), (2) et (3) du paragraphe VII, nous pouvons encore former les fonctions u_0, u_1, u_2, ...; mais nous ne pouvons plus écrire les inégalités

$$\gamma_3 < 2\beta\gamma_2, \qquad \gamma_4 < 2\beta\gamma_3, \qquad \ldots,$$

ni, par conséquent, affirmer que la série

$$S = \sum \lambda^k (u_k + c_k)$$

converge.

D'ailleurs, il est aisé de voir que

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

deviennent infinies au sommet de troisième espèce K et infinies respectivement du même ordre de grandeur que

$$\log\log \mathrm{MK}, \quad \log^2 \log \mathrm{MK}, \quad \log^3 \log \mathrm{MK}, \quad \ldots.$$

Néanmoins, nous verrons plus tard que la série S converge en tous les points de la surface de Klein, sauf aux sommets de troisième espèce, et que la somme de cette série tend vers une limite finie et déterminée quand le point M se rapproche de l'un de ces sommets.

On pourrait dire, dans un langage abrégé mais peu correct, qu'aux sommets de troisième espèce la somme de la série est finie, bien que chacun des termes soit infini.

Un exemple simple fera mieux comprendre ma pensée.

Soit λ un nombre positif, et considérons la fonction x^λ; nous pouvons la développer suivant les puissances de λ et écrire

$$x^\lambda = 1 + \frac{\lambda \log x}{1} + \frac{\lambda^2 \log^2 x}{1.2} + \ldots + \frac{\lambda^n \log^n x}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Chacun des termes devient infini pour $x = 0$, mais la somme de la série x^λ reste finie.

On pourra donc encore intégrer l'équation (1) du paragraphe VII.

Mais, pour établir toutes ces propositions, nous rencontrerons bien des difficultés. Ces mêmes difficultés, non encore surmontées, se retrouvent dans la méthode de M. Picard et dans toutes les méthodes d'approximations successives.

Pour en triompher, nous allons procéder par étapes.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul sommet de troisième espèce, que nous appellerons K, et proposons-nous d'intégrer l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{D}u = \zeta\varphi.$$

Dans cette équation, ζ et φ sont deux fonctions données et la dernière est partout finie. Quant à ζ, elle est partout positive et elle est finie, sauf au point K où elle est infinie comme

$$\frac{1}{\mathrm{MK}^2 \log^3 \mathrm{MK}},$$

aux sommets de deuxième espèce, s'il y en a, où elle devient infinie comme τ_i et au point P_1 où elle pourra devenir infinie comme $\log \mathrm{MP}_1$.

La solution de l'équation (1) nous sera donnée par la formule

$$u = \int \zeta_1 \varphi_1 \, G(M, K; M_1, P_1) \, d\omega_1,$$

analogue à la formule (6) du paragraphe VI.

Cela s'établirait par des raisonnements tout à fait analogues à ceux du paragraphe VI, mais qu'il est inutile de répéter ici.

Remarquons toutefois que la condition

$$\int \zeta \varphi \, d\omega = 0$$

n'est plus ici nécessaire puisque la fonction u peut devenir infinie pour $M = P_1$.

Cela posé, on a évidemment

$$|u| < \gamma \int \zeta_1 \, |G(M, K; M_1, P_1)| \, d\omega_1.$$

Étudions l'intégrale

$$\int \zeta_1 \, |G(M, K; M_1, P_1)| \, d\omega_1.$$

C'est une fonction des coordonnées du point M qui ne peut présenter de singularité que quand le point M vient en K ou en P_1.

Qu'arrive-t-il d'abord quand M est voisin de K? Partageons la surface de Klein en deux parties par une petite courbe fermée entourant le point K.

Nous aurons d'abord la région S extérieure à la petite courbe fermée; la portion correspondante de l'intégrale sera très petite de l'ordre de MK.

Considérons maintenant la région S' intérieure à cette petite courbe; si les deux points M et M_1 sont dans cette région, G sera de même ordre de grandeur que

$$\log \frac{MM_1 \,.\, KP_1}{MP_1 \,.\, KM_1}$$

ou que

$$\log \frac{MM_1}{KM_1},$$

c'est-à-dire qu'on pourra trouver une quantité β telle que

$$\zeta_1 < \beta' \frac{1}{KM_1^2 \,|\log^3 KM_1|},$$

$$d\omega_1 < \beta'' \, KM_1 \, d(KM_1) \, d\varepsilon,$$

ε étant l'angle de KM_1 et de KM.

Si donc nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{KM}_1 = \rho, \qquad \mathrm{KM} = r,$$

$$\mathrm{MM}_1 = \delta = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varepsilon}, \qquad b = \beta\beta'\beta'',$$

notre intégrale sera plus petite que

$$b \int \left| \log \frac{\delta}{\rho} \right| \frac{d\rho \, d\varepsilon}{\rho \, |\log^3 \rho|}.$$

Nous supposerons que notre petite courbe fermée a pour équation

$$\rho = \mathrm{R},$$

c'est-à-dire qu'elle est l'intersection de la surface de Klein avec une sphère de rayon R ayant son centre en K.

L'intégrale doit alors être prise entre les limites o et 2π pour ε, o et R pour ρ; si l'on considère ρ et ε comme les coordonnées polaires d'un point dans un plan, point que nous appellerons encore M_1, l'intégrale est prise à l'intérieur d'un cercle de rayon 1, et dont le centre pourra être encore désigné par K.

De même nous regarderons r et o comme les coordonnées polaires d'un autre point, que nous appellerons encore M; et la distance MM_1 de ces deux points, dans ce plan, sera encore égale à δ.

Nous partagerons alors la surface du cercle de rayon 1 en deux régions : l'une telle que

$$\delta > \rho, \qquad \mathrm{MM}_1 > \mathrm{KM}_1, \qquad \left| \log \frac{\mathrm{MM}_1}{\mathrm{KM}_1} \right| = \log \frac{\mathrm{MM}_1}{\mathrm{KM}_1},$$

l'autre telle que

$$\delta < \rho, \qquad \mathrm{MM}_1 < \mathrm{KM}_1, \qquad \left| \log \frac{\mathrm{MM}_1}{\mathrm{KM}_1} \right| = \log \frac{\mathrm{KM}_1}{\mathrm{MM}_1}.$$

Ces deux régions seront séparées l'une de l'autre par la droite π, perpendiculaire au milieu de MK.

L'intégrale, étendue à la première région, est plus grande que l'intégrale étendue à la seconde région.

En premier lieu, le champ d'intégration est plus grand; en second lieu, si nous envisageons deux points M_1 symétriques l'un de l'autre, par rapport à π, et situés, l'un dans la première région, l'autre dans la seconde, nous remarquerons que la valeur de

$$\frac{1}{\rho \log^3 \rho}$$

est plus grande pour le premier de ces points que pour le second, tandis que la valeur de

$$\left|\log\frac{\partial}{\rho}\right|$$

est la même pour les deux.

Notre intégrale est donc plus petite que

$$2b\int\left|\log\frac{\partial}{\rho}\right|\frac{d\rho\, d\varepsilon}{\rho\,|\log^3\rho\,|},$$

l'intégration étant étendue à la première région seulement. Mais, dans cette région, on a

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{\partial}{\rho}\right| = \log\frac{\partial}{\rho} = \log\frac{\mathrm{MM_1}}{\mathrm{KM_1}} &< \log\frac{\mathrm{KM_1}+\mathrm{MK}}{\mathrm{KM_1}}\\ &= \log\left(1+\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{KM_1}}\right) = \log\left(1+\frac{r}{\rho}\right).\end{aligned}$$

Donc notre intégrale est plus petite que

$$2b\int\log\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\frac{d\rho\, d\varepsilon}{\rho\,|\log^3\rho\,|},$$

ou *a fortiori* plus petite que la même intégrale étendue au cercle de rayon R tout entier, c'est-à-dire que

$$4\pi b\int_0^{\mathrm{R}}\log\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\frac{d\rho}{\rho\,|\log^3\rho\,|}.$$

Décomposons l'intégrale de la façon suivante :

$$\int_0^{\mathrm{R}} = \int_0^r + \int_r^{\mathrm{R_0}} + \int_{\mathrm{R_0}}^{\mathrm{R}}.$$

La lettre $\mathrm{R_0}$ désigne une quantité que nous déterminerons plus complètement plus tard, mais qui doit être $> r$.

Considérons d'abord la troisième intégrale prise de $\mathrm{R_0}$ à R; entre ces limites on a

$$\log\left(1+\frac{r}{\rho}\right) < \frac{r}{\rho}.$$

L'intégrale est donc plus petite que

$$r\int\frac{d\rho}{\rho^2\,|\log^3\rho\,|} < r\int\frac{d\rho}{\rho^2} < \frac{r}{\mathrm{R_0}}.$$

Envisageons maintenant la seconde intégrale prise de r à $\mathrm{R_0}$; entre ces limites on a

$$r < \rho, \qquad \log\left(1 - \frac{r}{\rho}\right) < \log 2.$$

et l'intégrale est plus petite que

$$\log 2 \int \frac{d\rho}{\rho |\log^3 \rho|} = \frac{\log 2}{2}\left(\frac{1}{\log^2 R_0} - \frac{1}{\log^2 r}\right) < \frac{\log 2}{2 \log^2 R_0}.$$

Venons enfin à la troisième intégrale prise de 0 à r; entre ces limites, on a

$$\rho < r; \qquad \log\left(1 - \frac{r}{\rho}\right) = \log\left(1 - \frac{\rho}{r}\right) + \log\frac{r}{\rho} < \log 2 + \log\frac{r}{\rho}.$$

L'intégrale est donc plus petite que

$$\log 2 \int \frac{d\rho}{\rho |\log^3 \rho|} + \int \log\frac{r}{\rho}\,\frac{d\rho}{\rho|\log^3\rho|} = \frac{\log 2}{\log^2 r} + \frac{1}{2|\log r|}.$$

Notre intégrale est donc plus petite que

$$4\pi b \frac{r}{R_0} + 2\pi b \log 2 \frac{1}{\log^2 R_0} + \frac{4\pi b \log 2}{\log^2 r} + \frac{2\pi b}{|\log r|},$$

et cela quel que soit R_0: en prenant, par exemple, $R_0 = \sqrt{r}$, on voit que notre intégrale est de l'ordre de grandeur de

$$\frac{1}{|\log r|} = \frac{1}{|\log MK|}.$$

Supposons maintenant M très voisin de P_1.

Nous pouvons trouver une quantité positive H telle que l'on ait constamment

$$|G| < |\log MM_1| + |\log MP_1| + \log|KM_1| + H,$$

et, en effet, si l'une des distances MM_1, MP_1, KM_1 est très petite (par exemple MM_1), G est égal à $\pm \log MM_1$ + une quantité finie.

Si deux de ces distances sont très petites, par exemple MP_1 et KM_1, nous pouvons ramener au cas précédent en introduisant un point auxiliaire K' et écrivant

$$G(M, K; M_1, P_1) = G(M, K'; M_1, P_1) + G(K', K; M_1, P_1).$$

Pour chacune des fonctions G qui entrent dans le second membre, une seule des distances est très petite.

Or, les intégrales

$$\int H \zeta_1 \, d\omega_1, \quad \int |\log MM_1| \zeta_1 \, d\omega_1, \quad \int \log|KM_1| \zeta_1 \, d\omega_1$$

sont finies; l'intégrale

$$\int |\log \mathrm{MP}_1| \zeta_1 \, d\omega_1 = |\log \mathrm{MP}_1| \int \zeta_1 \, d\omega_1$$

est de l'ordre de $|\log \mathrm{MP}_1|$.

D'où cette conséquence : l'intégrale

$$\int |G| \zeta_1 \, d\omega_1$$

est finie, sauf dans le voisinage du point K où elle est de l'ordre de $\dfrac{1}{|\log \mathrm{MK}|}$ et dans le voisinage du point P_1 où elle est de l'ordre de $|\log \mathrm{MP}_1|$.

Il existe donc une quantité b' telle que

$$\int |G| \zeta_1 \, d\omega_1 < b \left| \frac{\log \mathrm{MP}_1}{\log \mathrm{MK}} \right|,$$

et, par conséquent, telle que

(3) $$|u| < \alpha\gamma b' \left| \frac{\log \mathrm{MP}_1}{\log \mathrm{MK}} \right|.$$

Si nous posons maintenant

$$\eta u = \zeta \varphi'$$

et si nous observons qu'on peut trouver une quantité ε telle que

$$\frac{\eta}{\zeta} < \varepsilon \left| \frac{\log \mathrm{MK}}{\log \mathrm{MP}_1} \right|,$$

il viendra

(4) $$|\varphi'| < \alpha\gamma \qquad (\alpha = b'\varepsilon).$$

Soit donc γ' le maximum de $|\varphi'|$; nous pourrons trouver une quantité α ne dépendant que des points K et P_1 et telle que l'on ait toujours

(5) $$\gamma' < \alpha\gamma.$$

Considérons maintenant l'équation

(6) $$\mathrm{D}u = \lambda \eta u + \varphi$$

et proposons-nous de trouver une solution u de cette équation qui s'annule au point K et puisse devenir au point P_1 infinie comme $\log \mathrm{MP}_1$.

Proposons-nous de développer cette solution suivant les puissances de λ et soit

(7) $$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots$$

Nous aurons, en introduisant une série de fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, la série d'équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \zeta\varphi_0 = \varphi; & \mathrm{D}u_0 = \zeta\varphi_0; \\ \zeta\varphi_1 = \eta u_0; & \mathrm{D}u_1 = \zeta\varphi_1; \\ \zeta\varphi_2 = \eta u_1; & \mathrm{D}u_2 = \zeta\varphi_2; \\ \ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

que l'on traitera comme l'équation (1).

Si alors $|\varphi_0|$ est limité et que γ_0 soit son maximum, si γ_k est le maximum de $|\varphi_k|$ on aura, en vertu des inégalités (5) et (3),

$$\gamma_k < \alpha\gamma_{k-1} < \alpha^k\gamma_0; \qquad |u_k| < \beta\delta\gamma_k \mathrm{MK}|\log \mathrm{MP}_1|.$$

La série (7) est donc convergente pourvu que

$$\lambda\alpha < 1$$

et elle nous fournit la solution de l'équation (6).

Si l'on avait eu

$$\int \zeta\varphi_0\, d\omega = \int \zeta\varphi_1\, d\omega = \ldots = \int \zeta\varphi_k\, d\omega = \ldots = 0,$$

les fonctions $u_0, u_1, \ldots$ auraient été indépendantes de la position du point P_1, ainsi que je l'ai expliqué dans le paragraphe VI; nous aurions donc pu affirmer que ces fonctions, et par conséquent la fonction u, demeurent finies, même au point P_1. C'est le raisonnement de la fin du paragraphe VI.

Prenons maintenant l'équation

$$\mathrm{D}u = \lambda\eta u + \varphi + \mu\psi; \tag{8}$$

φ et ψ sont deux fonctions données; μ est une constante indéterminée que je supposerai développée suivant les puissances de λ,

$$\mu = \mu_0 + \lambda\mu_1 + \lambda^2\mu_2 + \ldots,$$

et il s'agit de déterminer u et μ de façon que u soit partout fini et s'annule en K.

Je suppose que $\int \psi\, d\omega$ ne soit pas nul.

Nous avons la suite d'équations

$$\begin{array}{lll} \int \varphi\, d\omega + \mu_0 \int \psi\, d\omega = 0; & \zeta\varphi_0 = \varphi + \mu_0\psi; & \mathrm{D}u_0 = \zeta\varphi_0; \\ \int \eta u_0\, d\omega + \mu_1 \int \psi\, d\omega = 0; & \zeta\varphi_1 = \eta u_0 + \mu_1\psi; & \mathrm{D}u_1 = \zeta\varphi_1; \\ \int \eta u_1\, d\omega + \mu_2 \int \psi\, d\omega = 0; & \zeta\varphi_2 = \eta u_1 + \mu_2\psi; & \mathrm{D}u_2 = \zeta\varphi_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

que l'on traitera comme l'équation (1); les propriétés de l'équation (1) subsisteront, mais il y a plus : à cause de la relation

$$\int \zeta \varphi_k \, d\omega = 0,$$

la fonction u_k ne dépendra pas de la position du point P_1, de telle façon qu'en choisissant convenablement la constante b', l'inégalité (2) pourra être remplacée par la suivante :

$$|u_k| < \frac{b'\gamma_k}{|\log MK|},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left| \int \eta \, u_k \, d\omega \right| < \varepsilon' \gamma_k,$$

ε' étant une nouvelle constante, et enfin

$$|\mu_{k+1}| < \varepsilon'' \gamma_k,$$

en désignant par $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ la valeur de $\left| \int \psi \, d\omega \right|$.

Soit α' une quantité plus grande que le maximum de $\left| \frac{\psi}{\zeta} \right|$, nous avons

$$\zeta \varphi_k = \eta \, u_{k-1} + \mu_k \psi,$$

et nous pouvons trouver une quantité α ne dépendant que du point K, telle que

$$\frac{\eta}{\zeta} = \alpha |\log MK|.$$

Il viendra alors

$$\gamma_k < (\alpha + \alpha' \varepsilon'') \gamma_{k-1}.$$

La série (7) converge donc pourvu que

$$\lambda(\alpha + \alpha' \varepsilon'') < 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Énonçons le résultat obtenu :

On peut satisfaire à l'équation (8) *et cela de telle façon que u s'annule en* K *et soit toujours fini, pourvu que les rapports*

$$\frac{\varphi}{\zeta}, \quad \frac{\psi}{\zeta}$$

soient limités.

Soit maintenant v une fonction définie de la façon suivante :

Traçons autour de K une petite courbe fermée, et soit A la valeur de Z qui correspond au sommet de troisième espèce K.

A l'intérieur de la petite courbe, v sera égal à $\log\left|\frac{1}{Z-A}\right|$.

A l'extérieur v ne pourra s'annuler ni devenir infini.

Enfin partout, sauf au point K, v est fini ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres.

Soit h un exposant constant quelconque.

A l'intérieur de la petite courbe, on aura

$$Dv^h = \Delta v^h \frac{d\Omega}{d\omega}; \qquad \Delta v^h = \frac{h(h-1)}{|Z-A|^2}\log^{h-2}\left|\frac{1}{Z-A}\right|.$$

Faisons d'abord une hypothèse particulière sur η et supposons qu'à l'intérieur de la petite courbe η se réduise à

$$\frac{1}{|Z-A|^2\log^2\left|\frac{1}{Z-A}\right|}\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

J'appellerai η_0 cette fonction η particulière satisfaisant à cette condition.

Il est clair alors qu'on aura, à l'intérieur de la petite courbe,

$$Dv^h = \lambda\eta_0 v^h$$

si l'on suppose

$$\lambda = h(h-1).$$

Je puis donc poser

$$Dv^h = \lambda\eta_0 v^h + \psi,$$

ψ étant nul à l'intérieur de la petite courbe et restant fini à l'extérieur de cette courbe, sauf aux sommets de troisième espèce, où le rapport $\frac{\psi}{\eta_0}$ et, par conséquent, le rapport $\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|$ restent finis.

Supposons donc que l'on ait l'équation

$$Du = \lambda'\eta_0 u + \varphi + \mu\psi, \tag{8 bis}$$

où $\left|\frac{\varphi}{\varphi}\right|$ est limité et où ψ est la fonction que nous venons de définir.

Dans cette équation, μ est une constante indéterminée de sorte que l'équation est de même forme que l'équation (8). Mais nous devons faire plusieurs remarques :

1° L'intégrale $\int \psi \, d\omega$ ne peut être nulle ; on a, en effet,

$$\int \psi \, d\omega = -\lambda \int \eta_0 v^h \, d\omega,$$

et η_0 et v sont essentiellement positifs.

2° La fonction ψ dépend de λ ; elle est même développable suivant les puissances de λ ; en effet, on trouve aisément

$$\mathrm{D} v^h = h v^{h-1} \mathrm{D} v + h(h-1) v^{h-2} \mathrm{E}(v, v).$$

On voit que h est développable suivant les puissances de λ, et qu'il en est de même de v^h *à l'extérieur de la petite courbe*, puisque dans cette région v ne devient ni nul ni infini ; il en est donc aussi de même de $\mathrm{D} v^h$.

A l'intérieur de la petite courbe ψ est nul, et à l'extérieur

$$\psi = \mathrm{D} v^h - \lambda \eta_0 v^h$$

sera développable suivant les puissances de λ.

On pourra alors résoudre l'équation (8 *bis*) de telle façon que u s'annule au point K, pourvu que

$$\lambda'(\alpha + \alpha' \varepsilon'') < 1.$$

Dans cette inégalité, α ne dépend que de la position du point K, elle ne dépend donc pas de λ ; il en est de même de la quantité ε' définie plus haut ; mais il n'en est pas de même de α' et de $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$.

En effet, α' doit être plus grand que le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$ et $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ est égal à $\left|\int \psi \, d\omega\right|$.

Or, nous avons

$$\psi = h v^{h-1} \mathrm{D} v + h(h-1) v^{h-2} \mathrm{E}(v, v) - \lambda \eta_0 v^h.$$

A l'intérieur de la petite courbe ψ est nul ; à l'extérieur $\frac{\eta_0}{\zeta}$ est limité.

Nous avons

$$\lambda = h(h-1) ;$$

cette équation, considérée comme déterminant h, admet deux racines, l'une négative, l'autre positive (puisque nous supposons λ positif). Nous prendrons la racine négative ; cette racine est plus petite que λ en valeur absolue.

Si alors v_0 est la plus petite valeur à l'extérieur de la petite courbe, on pourra trouver une constante A telle que

$$\left|\frac{\psi}{\zeta}\right| < \mathrm{A}\lambda v_0^h.$$

Si maintenant nous envisageons

$$\int \psi \, d\omega = -\lambda \int \eta_0 v^h \, d\omega,$$

nous voyons que cette expression est plus grande en valeur absolue que

$$\lambda \int \eta_0 v^h \, d\omega,$$

l'intégrale étant étendue, non plus à la surface de Klein tout entière, mais à l'extérieur de la petite courbe : et, en effet, les éléments de l'intégrale supprimés sont essentiellement positifs.

Si v_1 est la plus grande valeur de v à l'extérieur de la petite courbe, on aura, puisque h est négatif,

$$v^h > v_1^h,$$

et, par conséquent,

$$\lambda \int \eta_0 v^h \, d\omega > \lambda v_1^h \int \eta_0 \, d\omega$$

ou

$$\left| \int \psi \, d\omega \right| > \mathrm{B}\lambda v_1^h,$$

B étant une constante.

La condition à laquelle doit satisfaire $\frac{\alpha'\varepsilon}{\varepsilon'}$ est

$$\frac{\alpha'\varepsilon''}{\varepsilon'} > \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^h.$$

Si, en effet, cette condition est remplie, on aura certainement

$$\alpha \quad \text{max. de} \left|\frac{\psi}{\zeta}\right|.$$

Nous supposerons

$$\lambda < \lambda_0,$$

λ_0 étant une constante et

$$\frac{\alpha'\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{h_0},$$

où h_0 est la valeur de h qui correspond à λ_0 de telle sorte que

$$\lambda_0 = h_0(h_0 - 1).$$

Alors la condition imposée à $\frac{\alpha' \varepsilon''}{\varepsilon'}$ sera bien remplie, *et cette quantité est devenue indépendante de λ.*

Alors on pourra satisfaire à l'équation (8 *bis*), pourvu que

$$\lambda'(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1.$$

Supposons donc que nous ayons à la fois

$$\lambda < \lambda_0, \qquad \lambda(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1, \qquad \lambda = \lambda',$$

et soit u' la solution de l'équation (8 *bis*); on aura, puisque nous supposons $\lambda = \lambda'$,

$$\mathrm{D}u' = \lambda \eta_0 u' + \varphi - \mu\psi,$$

et la valeur de μ ne sera pas infinie.

On a, d'ailleurs,

$$\mathrm{D}v^h = \lambda \eta_0 v^h + \psi.$$

Si donc nous posons

$$u = u' - \mu v^h,$$

il viendra

$$\mathrm{D}u = \lambda \eta_0 u + \varphi. \tag{9}$$

D'ailleurs u ne devient pas infini au point K, mais, au contraire, s'y annule; car u' et v^h (l'exposant h étant négatif) s'y annulent l'un et l'autre.

On peut donc résoudre l'équation (9), pourvu que $\left|\frac{\varphi}{\eta}\right|$ soit limité.

Nous avons, il est vrai, fait une hypothèse toute particulière sur la fonction η, supposée égale à η_0; posons donc l'équation plus générale

$$\mathrm{D}u = \eta u + \varphi; \tag{10}$$

je dis qu'on saura également l'intégrer.

Posons, en effet,

$$\eta = \lambda \eta_0 + \eta',$$

en attribuant à λ une valeur assez petite pour qu'on ait

$$\lambda < \lambda_0, \qquad \lambda\alpha < 1$$

et que, par conséquent, on puisse intégrer l'équation (9). Envisageons l'équation

$$\mathrm{D}u = (\lambda\eta_0 + \mu\eta')u + \varphi. \tag{11}$$

On peut assimiler cette équation à l'équation (6) du paragraphe précédent.

l'équation (9) étant elle-même assimilée à l'équation (5) du même paragraphe.

Le rapport $\dfrac{\eta'_i}{\lambda\eta_{i0}}$ est, d'ailleurs, limité.

On voit donc, par le raisonnement du paragraphe précédent, que l'on saura intégrer (11) pourvu que μ soit assez petit; et ensuite, en répétant le raisonnement appliqué à l'équation (9) à la fin du même paragraphe, que l'on sait encore intégrer (11), quelle que soit la valeur attribuée à μ, et en particulier pour $\mu = 1$.

On sait donc intégrer l'équation (10).

Le théorème une fois établi pour le cas où il n'y a qu'un sommet de troisième espèce, la méthode de M. Picard permettrait facilement de le généraliser quel que soit le nombre de ces sommets.

Mais je préfère arriver directement au résultat; je suivrai une voie peu différente de celle qui m'a servi dans le cas particulier traité d'abord et que je pourrais suivre encore, si je ne craignais de trop me répéter.

Je supposerai deux sommets de troisième espèce K et K_1.

La fonction η_i sera partout positive; elle ne deviendra infinie qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèce; aux sommets de deuxième espèce, elle sera infinie de l'ordre $2 - \dfrac{2}{n}$; en K, elle sera infinie de l'ordre

$$\frac{1}{\mathrm{MK}^2 \log^2 \mathrm{MK}},$$

et, de plus, développable suivant les puissances de MK et de $\left|\dfrac{1}{\log \mathrm{MK}}\right|$ et de même en K_1.

La fonction ζ sera partout positive et le rapport

$$\frac{\zeta \,|\log \mathrm{MK} \log \mathrm{MK}_1|}{\eta_i}$$

sera limité, de telle façon qu'au point K, par exemple, ζ sera de l'ordre de

$$\frac{1}{\mathrm{MK}^2 \log^3 \mathrm{MK}}.$$

On verrait alors, comme plus haut, qu'on peut trouver une constante b' telle que

$$\int \zeta_1 \, d\omega_1 \,|\, \mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{K}; \mathrm{M}_1, \mathrm{P}_1) \,| < b' \left|\frac{\log \mathrm{MP}_1}{\log \mathrm{MK}}\right|,$$

$$\int \zeta_1 \, d\omega_1 \,|\, \mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{K}_1; \mathrm{M}_1, \mathrm{P}_1) \,| < b' \left|\frac{\log \mathrm{MP}_1}{\log \mathrm{MK}_1}\right|.$$

Soit ensuite φ une fonction satisfaisant aux conditions

$$(12) \qquad \int \zeta\varphi\, d\omega = 0; \qquad \int \varphi_1 \zeta_1\, G(K_1, K; M_1, P_1)\, d\omega_1 = 0 \qquad (|\varphi| < \gamma),$$

et soit

$$u = \int \varphi_1 \zeta_1\, G(M, K; M_1, P_1)\, d\omega_1.$$

A cause des relations (12), on aura également

$$\begin{aligned} u &= \int \varphi_1 \zeta_1\, G(M, K; M_1, P_1)\, d\omega_1 \\ &= \int \varphi_1 \zeta_1\, G(M, K; M_1, P_2)\, d\omega_1 = \int \varphi_1 \zeta_1\, G(M, K_1; M_1, P_1)\, d\omega_1, \end{aligned}$$

P_2 étant un autre point arbitraire de la surface de Klein. On pourra donc trouver une constante b' telle que l'on ait à la fois

$$|u| < b'\gamma \left| \frac{\log MP_1}{\log MK} \right|; \qquad |u| < b'\gamma \left| \frac{\log MP_1}{\log MK_1} \right|;$$

$$|u| < b'\gamma \left| \frac{\log MP_2}{\log MK} \right|; \qquad |u| < b'\gamma \left| \frac{\log MP_2}{\log MK_1} \right|.$$

En d'autres termes, u est fini même dans le voisinage de P_1 et de P_2 et très petit de l'ordre de $\frac{1}{|\log MK|}$, $\frac{1}{|\log MK_1|}$, dans le voisinage de K et K_1.

On aura donc, en choisissant convenablement la constante b'',

$$|u| < \frac{b''\gamma}{|\log MK . \log MK_1|}.$$

Posons

$$\eta u = \zeta\varphi';$$

soient γ' le maximum de $|\varphi'|$ et $\frac{\alpha}{b''}$ celui de $\frac{\eta}{\zeta |\log MK \log MK_1|}$. Nous aurons

$$(13) \qquad \gamma' < \alpha\gamma,$$

inégalité analogue à (5).

Cela posé, envisageons l'équation

$$(14) \qquad Du = \lambda\eta u + \varphi + \mu\psi + \mu'\psi',$$

où φ, ψ, ψ' sont des fonctions données; μ et μ' des constantes indéterminées.

Peut-on l'intégrer de façon que u soit toujours fini?

Nous supposerons :

1° Que les rapports $\frac{\varphi}{\zeta}$, $\frac{\psi}{\zeta}$, $\frac{\psi'}{\zeta}$ sont limités;

2° Que les intégrales

$$\int \psi' \, d\omega, \quad \int \psi_1 \, G(K, K_1, M_1, P_1) \, d\omega_1$$

sont différentes de zéro.

J'écrirai, pour abréger, g *au lieu de* $G(K, K_1, M_1, P_1)$;

3° Que

$$\int \psi \, d\omega = \int \varphi \, d\omega = 0.$$

Nous supposerons u, μ et μ' développés suivant les puissances de λ,

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \ldots, \qquad \mu = \mu_0 + \lambda \mu_1 + \ldots, \qquad \mu' = \mu'_0 + \lambda \mu'_1 + \ldots.$$

Nous aurons la suite d'équations

$$\mu'_0 = 0, \qquad \int \varphi_1 g \, d\omega_1 + \mu_0 \int \psi_1 g \, d\omega_1 = 0,$$

$$\varphi + \mu_0 \psi = \zeta \varphi_0, \qquad D u_0 = \zeta \varphi_0,$$

$$\int \eta u_0 \, d\omega + \mu'_1 \int \psi' \, d\omega = 0, \qquad \eta u_0 + \mu'_1 \psi' = \varphi'.$$

$$\int \varphi'_1 g \, d\omega_1 + \mu_1 \int \psi_1 g \, d\omega_1 = 0,$$

$$\eta u_0 - \mu_1 \psi + \mu'_1 \psi' = \zeta \varphi'_0, \qquad D u_1 = \zeta \varphi'_0,$$

$$\int \eta u_1 \, d\omega + \mu'_2 \int \psi' \, d\omega = 0, \qquad \eta u_1 + \mu'_2 \psi' = \varphi'',$$

$$\int \varphi''_1 g \, d\omega_1 + \mu_2 \int \psi_1 g \, d\omega_1 = 0,$$

$$\eta u_1 + \mu_2 \psi + \mu'_2 \psi' = \zeta \varphi''_0, \qquad D u_2 = \zeta \varphi''_0.$$

. . . .

Bien entendu, ψ_1, φ'_1, φ''_1, ... représentent les valeurs que prennent les fonctions ψ, φ', φ'', ... quand le point M vient en M_1.

On voit que φ_0, φ'_0, φ''_0, ... n'ont aucun rapport avec φ_1, φ'_1, φ''_1, ... ou avec φ, φ', φ'', ...

Soient γ_0, γ_1, γ_2, ... les maxima de φ_0, φ'_0, φ''_0, ...

J'aurai d'abord

$$|u_0| < \frac{b'' \gamma_0}{|\log MK . \log MK_1|},$$

d'où je conclus que je puis trouver une constante c telle que

$$\left| \int \eta\, u_0\, d\omega \right| < c\gamma_0,$$

et comme $\int \psi' d\omega$ est une constante différente de zéro, je puis trouver une constante c' telle que

$$\mu_1' < c'\gamma_0.$$

Si alors β et β' sont les maxima de

$$\frac{\eta\, b''}{\zeta |\log \mathrm{MK} \log \mathrm{MK}_1|} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\psi'}{\zeta}\right|,$$

on aura

$$\left|\frac{\varphi'}{\zeta}\right| < (\beta + c'\beta')\gamma_0.$$

Or l'intégrale $h = \int \zeta_1 g\, d\omega_1$ est une constante finie, et l'intégrale $h' = \int \psi_1 g\, d\omega_1$ est une constante différente de zéro. On a donc

$$\left| \int \varphi_1' g\, d\omega_1 \right| < (\beta + c'\beta') h\gamma_0$$

et

$$|\mu_1| < (\beta + c'\beta') \frac{h}{h'} \gamma_0.$$

Or

$$\varphi_0' = \frac{\eta\, u_0}{\zeta} + \mu_1 \left|\frac{\psi}{\zeta}\right| + \mu_1' \left|\frac{\psi'}{\zeta}\right|.$$

Si β'' est le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$, il viendra

$$|\varphi_0'| < \left[\beta + (\beta + c'\beta') \frac{h\beta''}{h'} + c'\beta'\right]\gamma_0$$

ou, en posant

$$\alpha = (\beta + c'\beta')\left(1 + \frac{h\beta''}{h'}\right),$$

$$\gamma_1 < \alpha\gamma_0 ;$$

on trouverait de même

$$\gamma_2 < \alpha\gamma_1,$$

ou, plus généralement,

$$\gamma_k < \alpha\gamma_{k-1}.$$

Nous voyons que la série

$$\sum \lambda^k \gamma_k$$

converge pour

$$\lambda\alpha < 1,$$

et comme

$$|u_k| < \frac{b''\gamma_k}{|\log MK.\log MK_1|},$$

il en sera de même de la série

$$\sum \lambda_k u_k.$$

Traçons maintenant, autour de K et de K_1, deux petites courbes fermées. Soit d'ailleurs ε une fonction définie comme il suit :

Je désigne par A et A_1 les valeurs de Z correspondant aux deux points K et K_1.

A l'intérieur de la petite courbe entourant K, on aura

$$\varepsilon = \log\left|\frac{1}{Z-A}\right|.$$

A l'intérieur de la seconde petite courbe, ε est partout nul.

A l'extérieur des deux courbes, ε ne peut s'annuler ni devenir infini. Enfin ε est partout fini ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres.

Nous poserons ensuite

$$C\lambda = h(h-1),$$

C étant la valeur que prend $\eta_1|Z-A|^2\log^2|Z-A|$ au point K et h étant la racine négative de cette équation du second degré; soit

$$D\varepsilon^h = \lambda\eta_1\varepsilon^h + \theta.$$

Je dis que la fonction $\frac{\theta}{\zeta}$ est limitée.

En effet, c'est seulement au point K que le rapport $\frac{\theta}{\zeta}$ pourrait devenir infini.

Or, dans le voisinage du point K, la fonction η_1, par hypothèse, est développable suivant les puissances entières croissantes (positives ou négatives) de

$$(Z-A),\quad (Z_0-A_0)\quad \text{et}\quad \frac{1}{\log\left|\frac{1}{Z-A}\right|};$$

il en est de même de

$$\varepsilon^h\log^{-h}\left|\frac{1}{Z-A}\right|,\quad D\varepsilon^h\log^{-h}\left|\frac{1}{Z-A}\right|$$

et, par conséquent, de

$$\theta\log^{-h}\left|\frac{1}{Z-A}\right|.$$

Dans le développement de θ, les termes qui sont de l'ordre le plus élevé, c'est-à-dire de l'ordre de

$$|Z - A|^{-2} \log^{-2+h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|,$$

se détruisent, et les termes de l'ordre immédiatement inférieur, c'est-à-dire de l'ordre de

$$|Z - A|^{-2} \log^{-3+h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|,$$

seront très petits par rapport à ζ (puisque h est négatif); donc $\frac{\theta}{\zeta}$ reste fini.

C. Q. F. D.

Soit maintenant v' une fonction engendrée comme v, mais de telle façon que le point K_1 joue le rôle du point K et inversement, c'est-à-dire que l'on ait, à l'intérieur de la première petite courbe,

$$v' = 0$$

et à l'intérieur de la seconde

$$v' = \log \frac{1}{|Z - A_1|}.$$

Soit C' la quantité qui joue, par rapport à K_1, le même rôle que C par rapport à K; soit enfin h' la racine positive de l'équation

$$C'\lambda = h'(h' - 1)$$

et posons

$$\theta e^{v'h} = \lambda \eta_1 e^{v'h} - \theta';$$

nous verrons encore que $\frac{\theta'}{\zeta}$ est limité.

Soient maintenant ψ et ψ' deux combinaisons linéaires de θ et θ' :

$$\psi = a\theta + c\theta',$$
$$\psi' = b\theta + d\theta.$$

Je dis qu'on peut choisir les coefficients constants a, b, c, d de telle façon que

$$\int \psi \, d\omega = 0, \qquad \int \psi' \, d\omega = 0, \qquad \int \psi_1 g \, d\omega_1 = 0.$$

Pour que cela fût impossible, il faudrait en effet que l'on eût : ou bien

$$\int \theta \, d\omega = \int \theta' \, d\omega = 0,$$

ou bien

$$\int \theta \, d\omega \int \theta'_1 g \, d\omega_1 - \int \theta' \, d\omega \int \theta_1 g \, d\omega_1 = 0.$$

Comme v et v' sont arbitraires sur une partie de la surface de Klein, on pourra toujours s'arranger de façon que cela n'ait pas lieu.

Seulement il importe de remarquer que ψ et ψ' dépendent de λ; le rapport entre le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$ et $\left|\int \psi_1 g\, d\omega_1\right|$, et le rapport entre le maximum de $\left|\frac{\psi'}{\zeta}\right|$ et $\left|\int \psi' d\omega\right|$ dépendent aussi de λ.

Il importe de rechercher si ces rapports ne deviennent pas infinis quand λ s'annule.

Cherchons donc les limites de $\frac{\theta}{\lambda}$ et $\frac{\theta'}{\lambda}$ pour $\lambda = 0$.

Pour cela nous nous servirons de la formule

$$D v^h = h v^{h-1} D v + h(h-1) v^{h-2} E(v, v).$$

Si l'on tient compte alors de

$$D v^h = \lambda \eta v^h + \theta; \qquad C\lambda = h(h-1),$$

il viendra, en divisant par λ et faisant tendre λ vers o,

$$-C\frac{Dv}{v} + C\frac{E(v, v)}{v^2} = \eta + \lim \frac{\theta}{\lambda}.$$

Si nous appelons θ_0 et θ'_0 les limites de $\frac{\theta}{\lambda}$ et $\frac{\theta'}{\lambda}$, nous voyons que les fonctions $\frac{\theta_0}{\zeta}$ et $\frac{\theta'_0}{\zeta}$ sont limitées; en effet, dans le voisinage des points K et K_1, Dv s'annule et la différence

$$C\frac{E(v, v)}{v^2} - \eta$$

est, au plus, de l'ordre de

$$\frac{1}{|Z - A|^2 \log^3\left|\frac{1}{Z - A}\right|},$$

c'est-à-dire de l'ordre de ζ.

D'autre part, comme v et v' sont arbitraires sur une partie de la surface de Klein, nous pourrons nous arranger pour que l'on n'ait pas

$$\int \theta_0\, d\omega = \int \theta'_0\, d\omega = 0,$$

$$\int \theta_0\, d\omega \int \theta'_{0,1} g\, d\omega_1 - \int \theta'_0\, d\omega \int \theta_{0,1} g\, d\omega_1 = 0,$$

c'est-à-dire que l'on peut s'arranger pour que les rapports dont il a été question plus haut ne deviennent pas infinis quand λ s'annule.

Formons alors l'équation

$$\text{(15)} \qquad Du = \lambda' \eta u + \varphi + \mu\psi + \mu'\psi'.$$

C'est l'équation (14), sauf qu'on a changé λ en λ' : elle est donc intégrable pourvu que

$$\lambda'\alpha < 1.$$

La quantité α a été définie plus haut; elle est seulement assujettie à avoir une limite inférieure. Mais cette limite inférieure dépend de λ puisque ψ et ψ' dépendent de λ.

Toutefois, elle ne deviendra pas infinie pour $\lambda = 0$, puisqu'il en est ainsi des deux rapports dont il a été question plus haut.

Donc, si nous faisons varier λ de 0 à λ_0, cette limite inférieure restera plus petite qu'une certaine quantité β, et il suffira de prendre α indépendant de λ et plus grand que β, pour que nous puissions affirmer que notre équation (15) est intégrable toutes les fois que

$$\alpha\lambda' < 1.$$

Soit u_0 la solution de cette équation (15), et soit maintenant l'équation

$$\text{(16)} \qquad Du = \lambda \eta u + \varphi, \qquad \int \varphi \, d\omega = 0.$$

On résoudra cette équation en faisant

$$u = u_0 - \mu(av^h + cv'^h) - \mu'(bv^h + dv'^{h'}),$$

en ayant soin de faire

$$\lambda' = \lambda,$$

et cela sera permis pourvu que

$$\lambda' = \lambda < \lambda_0, \qquad \lambda' = \lambda < \frac{1}{\alpha}.$$

On remarquera quelques différences entre la démonstration que j'ai donnée dans le cas d'un seul sommet de troisième espèce et celle que j'ai donnée dans le cas de deux sommets.

Dans la première, j'ai employé un détour en me servant de la fonction auxiliaire η_0; dans la seconde, j'ai évité ce détour, mais j'ai dû supposer que η était d'une forme particulière, c'est-à-dire développable suivant les puissances croissantes de $Z - A$, $Z_0 - A_0$, $\frac{1}{\log|Z - A|}$. Cette condition est, d'ailleurs, remplie dans les applications que nous aurons à faire.

J'aurais pu tout aussi bien faire le contraire, mais j'ai voulu donner un exemple de deux procédés différents de démonstration.

Si l'équation (16) est intégrable pour $\int \varphi\, d\omega = 0$, elle le sera également quand cette condition ne sera pas remplie, car nous pouvons trouver une fonction v telle que

$$\int \eta v\, d\omega \quad 0.$$

Nous pouvons ensuite choisir la constante μ de telle sorte que

$$\mu \int (\mathrm{D}v - \lambda\eta v)\, d\omega = -\lambda\mu \int \eta v\, d\omega = \int \varphi\, d\omega.$$

Nous pourrons alors intégrer l'équation

$$\mathrm{D}u = \lambda\eta u + [\varphi - \mu(\mathrm{D}v - \lambda\eta v)], \tag{17}$$

qui satisfait à la condition

$$\int [\varphi - \mu(\mathrm{D}v - \lambda\eta v)]\, d\omega = 0.$$

L'intégrale de (16) est alors égale à l'intégrale de (17) augmentée de μv.

En résumé, ce que nous avons dit au paragraphe précédent de l'équation (1) reste vrai quand il y a des sommets de troisième espèce; ce que nous avons dit dans ce même paragraphe des équations (5), (6) et (9) reste donc vrai également.

Nous pouvons nous résumer en disant que l'équation

$$\mathrm{D}u = \eta u - \varphi \tag{18}$$

est susceptible d'être intégrée. Ce résultat n'est établi jusqu'ici qu'en supposant que le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ est limité.

Je dis maintenant qu'il sera vrai encore pourvu que le rapport $\frac{\varphi}{\eta}$ soit limité et partout bien déterminé.

Nous avons, en effet,

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi}{\eta}\,\frac{\eta}{\psi}.$$

Le rapport $\frac{\eta}{\psi}$ est fini, sauf aux sommets de troisième espèce; nous n'avons donc qu'à examiner ce qui se passe dans le voisinage de l'un de ces sommets.

Nous avons supposé plus haut que, dans ce voisinage, η est développable suivant les puissances croissantes de

$$Z - A, \quad Z_0 - A_0, \quad \frac{1}{\log |Z - A|}.$$

Nous supposerons qu'il en est de même de φ.

Si, alors, nous appelons α la valeur du rapport $\frac{\varphi}{\eta}$ au sommet de troisième espèce K et que nous posions

$$\varphi = \alpha \eta - \varphi_1,$$

le rapport $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ restera fini au point K.

Supposons donc, pour fixer les idées, deux sommets de troisième espèce K et K_1; soient α et α_1 les valeurs de $\frac{\varphi}{\eta}$ aux points K et K_1.

Soit v une fonction quelconque, finie et continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres et prenant les valeurs α et α_1 aux points K et K_1; on aura

$$\text{(19)} \qquad D(u - v) = \eta(u - v) - (\varphi - \eta v - Dv).$$

Comme le rapport

$$\frac{\varphi - \eta v - Dv}{\varphi}$$

reste fini aux points K et K_1, on saura intégrer l'équation (19) et, par conséquent, l'équation (17).

IX. — Application du calcul des variations.

J'arrive à l'étude de l'équation

$$\text{(1)} \qquad DU = \theta e^U - \Phi$$

dont, nous l'avons vu, dépend le problème de la formation des fonctions fuchsiennes.

Mais, avant de démontrer, par des procédés rigoureux, l'intégrabilité de cette équation, je veux d'abord la faire pressentir par un de ces aperçus fondés sur le calcul des variations dont on fait quelquefois usage en Physique mathématique.

Pour cela, je suppose d'abord que Φ soit toujours positif, et je donne à la fonction U un accroissement infiniment petit δU.

J'envisage l'intégrale

$$\int \delta U \, d\omega (\theta e^U - \Phi - DU), \tag{2}$$

étendue à la surface de Klein tout entière.

L'intégration par parties donne

$$\int \delta U \, DU \, d\omega = - \int E(U, \delta U) \, d\omega,$$

de sorte que l'intégrale (2) devient

$$\int d\omega [(\theta e^U - \Phi) \delta U + E(U, \delta U)].$$

Or

$$(\theta e^U - \Phi) \delta U = \delta(\theta e^U - \Phi U); \qquad E(U, \delta U) = \frac{1}{2} \delta E(U, U).$$

Notre intégrale (2) n'est donc autre chose que la variation δJ, en posant

$$J = \int d\omega \left[\frac{1}{2} E(U, U) + \theta e^U - \Phi U \right].$$

La variation δJ ne peut donc s'annuler sans que l'équation (1) soit satisfaite.

L'intégrale J admet-elle un minimum? $E(U, U)$ est essentiellement positif; quant à l'expression

$$\theta e^U - \Phi U,$$

elle atteint son minimum pour

$$\theta e^U = \Phi,$$

équation à laquelle on peut satisfaire, puisque Φ et θ sont toujours positifs.

Le minimum atteint est

$$\Phi \left(1 - \log \frac{\Phi}{\theta} \right).$$

Donc, on a toujours

$$J > \int d\omega \, \Phi \left(1 - \log \frac{\Phi}{\theta} \right).$$

Donc J a un minimum.

Donc on peut satisfaire à l'équation (1).

Supposons maintenant que Φ ne soit plus toujours positif, et soit Φ_0 la valeur moyenne de Φ, de telle façon que

$$\Phi_0 \int d\omega = \int \Phi \, d\omega.$$

Nous pourrons poser alors

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

et l'on aura

$$\int \Phi_1 \, d\omega = 0.$$

Je dis qu'on peut satisfaire à l'équation (1), pourvu que Φ_0 soit positif.

En effet, puisqu'on a

$$\int \Phi_1 \, d\omega = 0,$$

on peut trouver une fonction v telle que

$$D v = -\Phi_1.$$

Posons alors

$$U = V + v;$$

l'équation (1) devient

$$DV = \theta \, e^v e^V - \Phi_0. \tag{1 bis}$$

On pourra résoudre l'équation (1 *bis*) qui est de même forme que (1), car θe^v est toujours positif et Φ_0 est une constante positive.

Peut-on maintenant résoudre l'équation (1) quand

$$\int \Phi \, d\omega < 0?$$

Non; en effet, on a

$$\int DU \, d\omega = 0$$

et, par conséquent,

$$\int \Phi \, d\omega = \int \theta \, e^U \, d\omega > 0.$$

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse résoudre l'équation (1), c'est que

$$\int \Phi \, d\omega > 0.$$

X. — L'équation $DU = \theta e^U - \Phi$.

Nous allons maintenant donner de ce résultat une démonstration rigoureuse.

Envisageons d'abord l'équation

$$D u = \theta \, e^u - \varphi; \tag{1}$$

supposons qu'on sache l'intégrer et qu'elle admette comme intégrale

$$u = u_0.$$

Envisageons ensuite l'équation

$$D u = \theta \, e^u - \varphi - \lambda \psi. \tag{2}$$

Je me propose de chercher à quelles conditions cette nouvelle équation sera intégrable.

Pour cela, je suppose u développé suivant les puissances de λ et j'écris

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots.$$

Alors e^{u-u_0} sera également développable suivant les puissances de λ, et je pourrai écrire

$$\begin{aligned} e^{u-u_0} = 1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \ldots, \\ + \lambda^2 w_2 + \lambda^3 w_3 + \ldots. \end{aligned}$$

J'aurai évidemment

$$w_2 = \frac{u_1^2}{2}, \qquad w_3 = \frac{u_1^3}{6} + u_1 u_2, \qquad w_4 = \frac{u_1^4}{24} + u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_1^2 u_2}{2}, \qquad \ldots.$$

En général, *les w seront des polynomes entiers par rapport aux u_k et les coefficients de ces polynomes seront tous positifs.*

Alors $u_0, u_1, \ldots$ nous seront donnés successivement par les équations

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{D} u_0 = \theta e^{u_0} - \varphi,$$

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{D} u_1 = \theta e^{u_0} u_1 - \psi, \\ &\mathrm{D} u_2 = \theta e^{u_0} (u_2 + w_2), \\ &\mathrm{D} u_3 = \theta e^{u} (u_3 + w_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Nous avons supposé qu'on savait intégrer l'équation (1). D'autre part, d'après les paragraphes VII et VIII, on sait intégrer les équations (3).

Dans la première équation (3), θ, u_0 et ψ sont connues, et u_1 est la fonction inconnue; dans la seconde, θ, u_0 et w_2 sont connues et u_2 est la fonction inconnue et ainsi de suite.

Voyons maintenant à quelles inégalités satisfont les fonctions u_k ainsi formées.

Quand u_2 atteint son maximum, $\mathrm{D}u_2$ doit être négatif; donc

$$u_2 < - w_2.$$

Au contraire, quand u_2 atteint son minimum, on doit avoir

$$u_2 > - w_2.$$

Donc le maximum de u_2 est plus petit que celui de $(-w_2)$ et le minimum de u_2 plus grand que celui de $(-w_2)$.

Donc le maximum de $|u_2|$ est plus petit que celui de $|w_2|$.

On verrait de même que le maximum de $|u_3|$ est plus petit que celui de $|w_3|$ et, en général, que le maximum de $|u_k|$ est plus petit que celui de $|w_k|$.

Pour la même raison, le maximum de $|u_1|$ est plus petit que celui de

$$\frac{|\psi|}{\theta e^{u_0}}.$$

(Rappelons que θ et e^{u_0} sont essentiellement positifs.)

Donc

$$\text{max de } |u_1| < \frac{\max\left|\frac{\psi}{\theta}\right|}{\min e^{u_0}}.$$

Mais u_0 satisfait à l'équation

$$\mathrm{D}u_0 = \theta e^{u_0} - \varphi.$$

Quand u_0 atteint son minimum, on doit donc avoir

$$\theta e^{u_0} - \varphi > 0$$

et, par conséquent, si φ est toujours positif,

$$\text{min de } e^{u_0} > \min\left|\frac{\varphi}{\theta}\right|;$$

d'où enfin

$$\max|u_1| < \frac{\max\left|\frac{\psi}{\theta}\right|}{\min\left|\frac{\varphi}{\theta}\right|}.$$

Soit $u'_1, u'_2, \ldots, u'_k, \ldots$ une suite de constantes positives, soit w'_k un polynome formé avec les u'_j comme w_k l'est avec les u_j.

Comme les polynomes w_k ont tous leurs coefficients positifs, si l'on suppose

$$u'_1 > \max|u_1|, \qquad u'_2 > \max|u_2|, \qquad \ldots, \qquad u'_{k-1} > \max|u_{k-1}|,$$

on aura

$$w'_k > \max|w_k|,$$

et si l'on suppose

$$u'_k = w'_k,$$

on aura

$$u'_k > \max|w_k| > \max|u_k|,$$

de sorte que, de proche en proche, on aura

$$(4) \qquad u'_k = w'_k, \qquad w'_k > \max|w_k|, \qquad u'_k > \max|u_k|.$$

Posons maintenant

$$(5) \qquad v = \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \ldots;$$

il viendra, d'après la définition des polynomes w et w',

$$\begin{aligned} e^v = 1 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \lambda^3 u'_3 + \ldots \\ + \lambda^2 w'_2 + \lambda^3 w'_3 + \ldots \end{aligned}$$

ou, à cause de l'égalité $u'_k = w'_k$,

$$(6) \qquad e^v = 2v + 1 - \lambda u'_1.$$

Comme u'_1 n'est assujetti qu'à être plus grand que le maximum de u_1, je prendrai

$$u'_1 = \frac{\max\left|\frac{\psi}{\theta}\right|}{\min\left|\frac{\varphi}{\theta}\right|}.$$

De l'équation (6) je tirerai v en série ordonnée suivant les puissances de λ, et la limite de convergence de cette série correspondra à la valeur de λ pour laquelle l'équation (6) a une racine double.

Or, en différentiant l'équation (6), je trouve

$$e^v = 2, \qquad v = \log 2;$$
$$\lambda u'_1 = \log 4 - 1.$$

Donc, *la série* (5) *converge, pourvu que*

$$|\lambda u'_1| < \log 4 - 1.$$

Donc, en vertu des inégalités (4),

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots$$

converge absolument et uniformément.

Il en est de même de la série

$$e^u = e^{u_0}(1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots + \lambda^2 w_2 + \ldots).$$

En effet, les termes de cette série sont respectivement plus petits que ceux de la série convergente (à termes positifs et constants)

$$e^{v+u_0} = e^{u_0}(1 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \ldots + \lambda^2 w'_2 + \ldots).$$

Formons donc les deux séries

$$\theta e^u - \varphi - \lambda\psi = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \ldots$$

et

$$\int V_0^1 G\, d\omega_1 + \lambda \int V_1^1 G\, d\omega_1 + \lambda^2 \int V_2^1 G\, d\omega_1 + \ldots,$$

où j'ai écrit, pour abréger, G au lieu de

$$G(M, P; M_1, P_1),$$

et où V_k^1 est la valeur de la fonction V_k au point M_1.

La première de ces séries sera uniformément convergente, de sorte que la seconde représentera l'intégrale

$$J = \int (\theta\, e^u - \varphi - \lambda\psi)_1 G\, d\omega_1,$$

où

$$(\theta\, e^u - \varphi - \lambda\psi)_1$$

représente la valeur au point M_1 de la fonction

$$\theta\, e^u - \varphi - \lambda\psi.$$

On a donc

$$DJ = \theta\, e^u - \varphi - \lambda\psi.$$

D'autre part, on a

$$D\int V_0^1 G\, d\omega_1 = V_0 = \theta\, e^{u_0} - \varphi,$$

$$D\int V_1^1 G\, d\omega_1 = V_1 = \theta\, e^{u_0} u_1 - \psi,$$

$$D\int V_2^1 G\, d\omega_1 = V_2 = \theta\, e^{u_0}(u_2 + w_2),$$

. . . .

En résumé, si nous posons, pour abréger,

$$\int V_k^1 G\, d\omega_1 = v_k,$$

on aura

$$D u_k = D v_k$$

et, par conséquent,

$$u_k = v_k + C_k,$$

C_k étant une constante. Les deux séries

$$u = \sum \lambda^k u_k \qquad \text{et} \qquad \sum \lambda^k v_k = J$$

sont convergentes et la convergence est uniforme, pourvu que M reste en dehors d'une petite courbe entourant le point P_1.

Soient donc u la somme de la première série et J celle de la deuxième; soit c celle de la série $\sum \lambda^k C_k$. On aura

$$C = J + c$$

et, par conséquent,

$$D u = DJ = \theta e^u - \varphi - \lambda\psi.$$

Notre équation est donc satisfaite.

Cela suppose que φ est toujours positif et que les rapports $\frac{\varphi}{\theta}$ et $\frac{\psi}{\theta}$ sont limités et partout bien déterminés.

L'équation

$$(7) \qquad D u = \theta e^u - \alpha\theta$$

admet-elle une solution, quelle que soit la constante positive α?

Oui, car elle admet pour intégrale

$$u = \log \alpha.$$

Soit maintenant l'équation

$$(8) \qquad D u = \theta e^u - \alpha\theta - \mu\psi,$$

où ψ est une fonction toujours positive et telle que $\frac{\psi}{\theta}$ soit limité.

Est-elle toujours intégrable, quelles que soient les constantes positives α et μ?

Changeons μ en $\mu + \lambda$; l'équation devient

$$(8\ bis) \qquad D u = \theta e^u - \alpha\theta - \mu\psi - \lambda\psi,$$

qui se ramène à la forme (2) en posant

$$\varphi = \alpha\theta + \mu\psi.$$

Comme $\mu\psi$ est essentiellement positif, nous avons

$$\text{min de } \left|\frac{\varphi}{\theta}\right| > \alpha$$

Si donc l'équation (8) est intégrable, il en sera de même de (8 *bis*) pourvu que

$$\left|\frac{\lambda}{\alpha} \max \frac{\psi}{\theta}\right| < \log 4 - 1.$$

Si donc l'équation (8) est intégrable pour

$$\mu = \mu_0.$$

elle le sera encore pour

$$\mu_0 < \mu < \mu_0 + (\log 4 - 1)\frac{\alpha}{\max\left|\frac{\psi}{\theta}\right|}$$

et, par conséquent, pour

$$\mu_0 < \mu < \mu_0 + \frac{n\alpha}{\max\left|\frac{\psi}{\theta}\right|}(\log 4 - 1),$$

et, comme le nombre n peut être pris aussi grand que l'on veut, elle sera intégrable pour toutes les valeurs de μ supérieures à μ_0.

Or l'équation (8) est intégrable pour $\mu = 0$, puisqu'elle se réduit alors à l'équation (7); elle est donc intégrable pour toutes les valeurs positives de μ.

C. Q. F. D.

On peut conclure de là que l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{D}u = \theta e^u - \varphi$$

est toujours intégrable pourvu :

1° Que la fonction φ soit toujours positive et ne puisse s'annuler;

2° Que cette fonction reste finie, sauf aux sommets de deuxième et de troisième espèce, où θ devient infini;

3° Pourvu, enfin, que le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ tende vers une limite déterminée quand on se rapproche de l'un de ces sommets et que cette limite ne soit ni nulle, ni infinie.

Dans ces conditions, en effet, le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ restera constamment compris entre deux limites positives, de telle façon que

$$\beta > \frac{\psi}{\theta} > \alpha.$$

Nous pourrons poser

$$\varphi = \alpha\theta + \psi.$$

Alors ψ sera toujours positif et le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ sera limité.

L'équation

$$\mathrm{D}u = \theta e^u - \alpha\theta - \mu\psi$$

sera donc intégrable pour toutes les valeurs positives de μ et, en particulier, pour la valeur 1.

C. Q. F. D.

Dans le cas particulier des fonctions fuchsiennes de la première espèce, il n'y a pas de sommets de deuxième et de troisième espèce, la fonction θ est toujours finie, et l'équation (1) est intégrable si la fonction φ est toujours positive et toujours finie. Elle l'est, en particulier, si φ est une constante positive.

Supposons maintenant que φ soit toujours finie, mais ne soit pas toujours positive. Soit φ_0 la valeur moyenne de φ, de telle sorte que

$$\varphi_0 \int d\omega = \int \varphi \, d\omega.$$

Il existera alors une fonction v qui satisfera à

$$Dv = \varphi_0 - \varphi,$$

puisque $\int (\varphi_0 - \varphi)\, d\omega = 0$. (*Cf.* § VI.)

Il existera une fonction w satisfaisant à

$$Dw = \theta e^v e^w - \varphi_0,$$

pourvu que la constante φ_0 soit positive.

La fonction

$$u = v + w$$

satisfera alors à

$$Du = \theta e^u - \varphi.$$

Donc, *dans le cas des fonctions fuchsiennes de première espèce, c'est-à-dire dans le cas où θ est toujours fini, si, d'ailleurs, la fonction φ est toujours finie, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1) *soit intégrable, c'est que la valeur moyenne de φ soit positive.*

On peut généraliser ce résultat pour le cas où il y a des sommets de deuxième et de troisième espèce.

Supposons, en effet, que la fonction φ soit toujours finie, sauf aux sommets de deuxième et de troisième espèce, où le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ tend vers une limite positive déterminée qui n'est ni nulle, ni infinie.

Supposons de plus que

$$\int \varphi \, d\omega > 0.$$

Il est évident qu'on peut poser

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

et cela de telle façon :

1° Que φ_1 soit toujours positive;

2° Que φ_2 soit toujours finie;

3° Que

$$\int \varphi_2 \, d\omega = 0.$$

Alors le rapport $\frac{\varphi_1}{\theta}$ tendra vers une limite finie et différente de zéro dans le voisinage des sommets et l'on aura

$$\int \varphi_1 \, d\omega > 0.$$

Donc on trouvera des fonctions v et w qui satisferont à

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,v &= -\varphi_2, \\ \mathrm{D}\,w &= \theta\, e^v e^w - \varphi_1. \end{aligned}$$

La fonction

$$u = v + w$$

satisfait alors à l'équation (1).

Donc l'équation est intégrable aux conditions suivantes :

1° *Si la valeur moyenne de φ est positive;*

2° *Si le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ tend vers une limite positive finie et différente de zéro quand on se rapproche d'un sommet de deuxième ou de troisième espèce.*

Il subsiste encore une restriction dont je voudrais me débarrasser.

Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ doit être fini aux sommets de deuxième et de troisième espèce, et, de plus, *en ces sommets, il ne doit pas s'annuler.* Cette restriction est essentielle en ce qui concerne les sommets de troisième espèce, mais elle doit disparaître en ce qui concerne ceux de deuxième espèce.

Soit, en effet, ψ une fonction quelconque assujettie aux conditions suivantes :

1° Sa valeur moyenne sera nulle; 2° elle est finie partout, sauf aux sommets de deuxième espèce; 3° aux sommets de deuxième espèce, le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ sera positif et différent de zéro; on pourra alors, en vertu des principes du paragraphe VI, intégrer l'équation

$$\mathrm{D}\,v = \psi.$$

On ne le pourrait pas si nous avions supposé que le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ était différent de zéro aux sommets de troisième espèce. L'intégrale

$$\int \psi_1 \, G(M, P; M_1, P_1)\, d\omega_1$$

ne serait pas alors restée finie quand M serait venu en un de ces sommets.

Soit, d'autre part, l'équation

$$(1) \qquad Du = \theta e^u - \varphi$$

et supposons que φ satisfasse aux conditions suivantes :

1° On a

$$\int \varphi \, d\omega > 0;$$

2° Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ a partout une valeur finie et déterminée;

3° Aux sommets de deuxième espèce, cette valeur peut être positive, négative ou nulle;

4° Aux sommets de troisième espèce, elle sera positive et différente de zéro.

Si nous posons

$$u - \lambda v = w,$$

il viendra

$$(9) \qquad Dw = \theta e^{\lambda v} e^w - \varphi - \lambda\psi.$$

Nous pourrons prendre la constante positive λ assez grande pour que, aux sommets de deuxième espèce, les rapports

$$\frac{\varphi + \lambda\psi}{\theta}, \quad \frac{\varphi + \lambda\psi}{\theta e^{\lambda v}}$$

soient positifs, et, en effet, $\frac{\psi}{\theta}$ est positif, $\left|\frac{\varphi}{\theta}\right|$ est limité.

Aux sommets de troisième espèce, ces rapports sont égaux à

$$\frac{\varphi}{\theta}, \quad \frac{\varphi}{\theta e^{\lambda v}}$$

et, par conséquent, positifs d'après l'hypothèse.

On pourra donc intégrer l'équation (9) et, par conséquent, l'équation (1).

En résumé, *voici les conditions pour que l'équation* (1) *soit intégrable :*

1° On doit avoir

$$\int \varphi \, d\omega > 0;$$

2° Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ doit avoir partout une valeur finie et déterminée;

3° Cette valeur, qui peut être quelconque aux sommets de deuxième espèce, doit être positive et différente de zéro aux sommets de troisième espèce.

XI. — Application aux fonctions fuchsiennes.

Nous venons de voir à quelles conditions peut s'intégrer l'équation (1) du paragraphe précédent; or, au début de ce travail, nous avons montré que la formation des fonctions fuchsiennes dépend de l'intégration d'une équation de même forme,

$$\mathrm{DU} = \theta e^{\mathrm{U}} - \Phi. \tag{1}$$

Voyons si elle satisfait aux conditions énoncées.

La fonction Φ est finie, sauf aux sommets de troisième espèce, et en ces sommets la valeur du rapport $\frac{\Phi}{\theta}$ est finie, déterminée, positive et différente de zéro; c'est ce que nous avons montré à la fin du paragraphe IV.

Il reste donc à vérifier que l'on a

$$\int \varphi \, d\omega > 0.$$

Je rappelle que

$$-\Phi = \mathrm{D} \log \frac{d\Omega}{d\omega} + \mathrm{D} h,$$

h étant une fonction partout finie, sauf aux sommets de deuxième et de troisième espèce et telle que la différence

$$h - \left(2 - \frac{2}{n}\right) \log |\mathrm{Z} - \mathrm{A}| \tag{2}$$

reste finie aux sommets de deuxième espèce et que la différence

$$h - 2 \log |\mathrm{Z} - \mathrm{A}| - 2 \log \log |\mathrm{Z} - \mathrm{A}| \tag{3}$$

reste finie aux sommets de troisième espèce.

Nous supposerons que Z est lié à Z′ par une relation algébrique

$$\mathrm{F}(\mathrm{Z}, \mathrm{Z}') = 0.$$

Cette relation représente une courbe algébrique d'ordre m; je puis, sans restreindre la généralité, supposer que cette courbe a ses m directions asymptotiques distinctes et qu'elle n'a d'autre singularité que des points doubles ordinaires.

Je puis supposer aussi que les sommets de deuxième ou de troisième espèce ne correspondent ni à un point double de la courbe, ni à un point à l'infini, ni à un point où la tangente est parallèle à l'axe des Z [c'est ce qui m'a permis tout à l'heure d'écrire Z — A et non Z'' — A'' dans les formules (2) et (3)].

Cela posé, quand $\log \frac{d\Omega}{d\omega}$ devient-il infini ?

1° Quand $\frac{d\Omega}{d\omega}$ devient infini, c'est-à-dire quand le point Z, Z' s'éloigne à l'infini sur l'une des branches asymptotiques de la courbe;

2° Aux points où la tangente est parallèle à l'axe des Z, on a

$$\frac{dZ}{dZ'} = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = 0$$

et, comme $\frac{d\Omega'}{d\omega}$ est fini, $\frac{d\Omega}{d\omega}$ est nul;

3° Aux points doubles, on a, à la fois,

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{dF}{dZ'} = 0;$$

mais Z' est fonction holomorphe de Z et $\frac{d\Omega}{d\omega}$ reste fini.

Nous avons donc

$$\Phi = D\psi,$$
$$\psi = -\log \frac{d\Omega}{d\omega} - h$$

et ψ devient logarithmiquement infini en un certain nombre de points singuliers qui se répartissent en quatre sortes :

Première sorte. — Ce sont les m points à l'infini de la courbe $F = 0$.

Deuxième sorte. — Ce sont les points où $\frac{dF}{dZ'} = 0$; leur nombre est

$$m(m-1) - 2d,$$

d étant le nombre des points doubles, ou bien

$$2m + 2p - 2,$$

p étant le genre de la courbe.

Troisième sorte. — Ce sont les sommets de deuxième espèce.

Quatrième sorte. — Ce sont les sommets de troisième espèce.

Entourons chacun de ces points singuliers d'une courbe infiniment petite. La surface de Klein se trouve partagée en deux régions : la région intérieure à ces petites courbes, qui est infiniment petite, et la région extérieure qui est finie.

L'intégrale $\int \Phi d\omega$, étendue à la région intérieure, est infiniment petite. L'intégrale étendue à la région extérieure est

$$\int \Phi\, d\omega = \int \mathrm{D}\psi\, d\omega = \int \frac{d\psi}{dn}\, d\sigma,$$

en vertu de l'équation (3 *bis*) du paragraphe III; dn et $d\sigma$ sont définis comme au paragraphe III, que la surface de Klein soit isotrope ou anisotrope.

L'intégrale du troisième membre est étendue au périmètre de toutes les petites courbes; mais il faut observer que les dn positifs doivent être comptés vers l'extérieur de la région où se fait l'intégration double, c'est-à-dire vers l'*intérieur* de la petite courbe.

Considérons d'abord une petite courbe entourant un des m points singuliers de la première sorte : ceux où Z devient infini.

Nous prendrons

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

d'où

$$\frac{d\Omega}{d\Omega''} = \left|\frac{dZ}{dZ''}\right|^2 = \frac{1}{|Z''|^4}.$$

A l'intérieur de notre petite courbe nous avons donc

$$\psi = 4\log|Z''| - \log\frac{d\Omega''}{d\omega} - h.$$

Or, $\log\dfrac{d\Omega''}{d\omega} + h$ reste fini; notre intégrale est donc égale, en négligeant des infiniment petits, à

$$4\int \frac{d\log|Z''|}{dn}\, d\sigma,$$

ou bien, toujours avec les notations du paragraphe III,

$$4 \int \frac{d \log |Z''|}{dN''} dS''.$$

dS'' et dN'' étant les arcs infiniment petits qui correspondent sur le plan des Z'' aux arcs $d\sigma$ et dn de la surface de Klein.

Si nous posons

$$Z'' = \rho e^{i\omega}$$

et si l'on suppose que la petite courbe a pour équation $\rho =$ const., et correspond à un cercle sur le plan des Z''; cette intégrale peut s'écrire

$$-4 \int \frac{d \log \rho}{d\rho} \rho \, d\omega = -4 \int d\omega = -8\pi.$$

J'ai mis le signe $-$, parce que les dN'' positifs doivent être comptés vers l'intérieur du petit cercle $\rho =$ const.

Considérons maintenant une petite courbe entourant un des

$$2m + 2p - 2$$

points singuliers de la deuxième sorte.

Soit $Z = A$, $Z' = A'$ ce point singulier. Nous aurons

$$\psi = -\log \frac{d\Omega}{d\omega'} - \log \frac{d\Omega'}{d\Omega} - h.$$

D'autre part, on aura

$$Z - A = (Z' - A')^2 H,$$

H étant une série ordonnée suivant les puissances de $Z' - A'$ et ne s'annulant pas pour $Z' = A'$.

On en déduit

$$\frac{dZ}{dZ'} = (Z - A') H',$$

H' ne s'annulant pas pour $Z = A'$.

Il vient donc

$$\log \frac{d\Omega}{d\Omega'} = 2 \log \left| \frac{dZ}{dZ'} \right| = 2 \log |Z - A'| + 2 \log H,$$

d'où

$$\psi = -2 \log |Z - A'| - 2 \log H - \log \frac{d\Omega'}{d\omega} - h.$$

L'expression

$$2 \log H + \log \frac{d\Omega}{d\omega} + h$$

reste finie; donc l'intégrale se réduit à

$$-2\int \frac{d\log|Z'-A'|}{dn}\,d\sigma.$$

Le même calcul montrerait que cette intégrale est égale à 4π.

Considérons une courbe entourant un point singulier de la troisième sorte; il vient

$$h = \left(2-\frac{2}{n}\right)\log|Z-A| + h_1,$$

h_1 étant fini et, par conséquent,

$$\psi = \left(\frac{2}{n}-2\right)\log|Z-A| - h_1 - \log\frac{d\Omega}{d\omega},$$

$h_1 + \log\dfrac{d\Omega}{d\omega}$ étant fini.

Notre intégrale est donc égale à

$$\left(\frac{2}{n}-2\right)\int \frac{d\log|Z-A|}{dn}\,d\sigma$$

(dans cette formule, la lettre n figure deux fois dans deux sens différents; n est un nombre entier et dn une longueur infiniment petite; mais aucune confusion n'est à craindre), c'est-à-dire, toujours d'après le même raisonnement, à

$$4\pi\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Passons enfin aux sommets de la quatrième sorte; on a

$$h = 2\log|Z-A| + 2\log\log|Z-A| + h_1,$$

h_1 restant fini; notre intégrale se réduit donc à

$$-2\int \frac{d\log|Z-A|}{dn}\,d\sigma - 2\int \frac{d\log\log|Z-A|}{dn}\,d\sigma.$$

La première intégrale se réduit à 4π. Quant à la seconde, si nous posons

$$Z - A = \rho\, e^{i\omega}$$

et si nous supposons que la petite courbe a pour équation $\rho =$ const., elle se réduit à

$$+2\int \frac{d\log\log\rho}{d\rho}\,\rho\,d\omega = 2\int \frac{d\omega}{\log\rho}$$

et tend vers zéro quand ρ tend vers zéro.

L'intégrale se réduit donc finalement à 4π.

En résumé, nous trouvons :

1° Pour les m points de la première sorte,

$$-8m\pi;$$

2° Pour les $2m+2p-2$ points de la deuxième sorte,

$$8m\pi+8p\pi-8\pi;$$

3° Pour les q points de la troisième sorte (sommets de la deuxième espèce),

$$4\pi\left(q-\sum\frac{1}{n}\right);$$

4° Pour les q' points de la quatrième sorte (sommets de la troisième espèce),

$$4q'\pi.$$

Nous avons donc finalement

$$\int\Phi\,d\omega=4\pi\left(2p-2+q+q'-\sum\frac{1}{n}\right).$$

Considérons le polygone fuchsien R_0, et soient $2k$ le nombre de ses côtés, h le nombre des cycles de sommets de première espèce, q et q' ceux des cycles de sommets de deuxième et de troisième espèce.

La somme des angles est égale à

$$2\pi\left(h+\sum\frac{1}{n}\right).$$

Le déficit angulaire (proportionnel à la surface non euclidienne) est

$$2\pi\left(k-1-h-\sum\frac{1}{n}\right).$$

On a, d'autre part,

$$p=\frac{k+1-h-q-q'}{2},$$

d'où

$$k=2p-1+h+q+q',$$

ce qui montre que le déficit angulaire est égal à

$$2\pi\left(2p-2+q+q'-\sum\frac{1}{n}\right).$$

L'intégrale $\int\Phi\,d\omega$ est donc égale au double du déficit angulaire.

Elle est donc positive. C. Q. F. D.

Donc, l'équation

$$DU = \theta e^U - \Phi$$

peut s'intégrer; donc, dans tout type fuchsien, il y a une équation fuchsienne.

Le théorème fondamental est démontré pour toutes les fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental; je me réserve d'y revenir en ce qui concerne les autres fonctions fuchsiennes et, en particulier, celles de la troisième famille.

XII. — Formation des équations fuchsiennes.

Soit

$$\frac{d^2 v}{dZ^2} = v\,\varphi(Z, Z') \tag{1}$$

notre équation fuchsienne, où φ est une fonction rationnelle des deux variables Z et Z′ liées par la relation algébrique

$$f(Z, Z') = 0. \tag{2}$$

Les deux intégrales fondamentales de cette équation seront

$$v_1 = \sqrt{\frac{dZ}{dz}}, \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dZ}{dz}}$$

et Z sera une fonction fuchsienne de z.

Si l'on désigne par v_1^0 et v_2^0 les imaginaires conjuguées de v_1 et v_2, on aura

$$v_1^0 = \sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}, \qquad v_2^0 = z_0\sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}.$$

D'autre part, nous avons posé

$$e^u = \frac{dz}{dZ}\,\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

d'où

$$e^{-\frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{dZ}{dz}}\sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}(1 - zz_0),$$

ou bien

$$e^{-\frac{u}{2}} = v_1 v_1^0 - v_2 v_2^0.$$

L'exponentielle $e^{-\frac{u}{2}}$ est une fonction de Z et Z_0 et nous avons, dans ce Mémoire appris à former cette fonction pour les couples de valeurs Z et Z_0 qui sont imaginaires conjuguées.

Cela posé, il vient

$$\frac{d^2 e^{-\frac{u}{2}}}{dZ^2} = \frac{d^2 v_1}{dZ^2} v_1^0 - \frac{d^2 v_2}{dZ^2} v_2^0;$$

ou, à cause de l'équation (1),

$$\frac{d^2 e^{-\frac{u}{2}}}{dZ^2} = e^{-\frac{u}{2}} \varphi(Z, Z'),$$

ou enfin,

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 u}{dZ^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{du}{dZ}\right)^2 = \varphi.$$

La fonction u est connue pour tous les couples de valeurs conjuguées de Z et Z_0, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de X et de Y (en posant $Z = X + iY$).

On connaît donc aussi, pour toutes les valeurs réelles de X et de Y, les dérivées $\frac{du}{dX}$ et $\frac{du}{dY}$ et, par conséquent,

$$\frac{du}{dZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dX} + \frac{du}{i\,dY}\right),$$

$$\frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{2\,d^2 u}{i\,dX\,dY} - \frac{d^2 u}{dY^2}\right).$$

Nous connaissons donc φ et, par conséquent, l'équation fuchsienne est formée. Il est aisé de vérifier que φ est fonction de Z seulement; en effet,

$$\frac{d\varphi}{dZ_0} = -\frac{1}{2}\frac{d^3 u}{dZ^2\,dZ_0} + \frac{1}{2}\frac{du}{dZ}\frac{d^2 u}{dZ\,dZ_0}.$$

Or

$$\frac{d^2 u}{dZ\,dZ_0} = 2\,e^u, \qquad \frac{d^3 u}{dZ^2\,dZ_0} = 2\,e^u\frac{du}{dZ}.$$

Donc

$$\frac{d\varphi}{dZ_0} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On vérifierait facilement les autres propriétés de la fonction φ.

Ces considérations peuvent nous permettre d'entrevoir une autre démonstration de l'existence de l'équation fuchsienne.

Supposons que nous considérions les équations d'un même type fuchsien; la fonction φ qui y figurera ne sera pas entièrement arbitraire; elle dépendra seulement d'un nombre fini N de paramètres.

Les intégrales v_1 et v_2 dépendront de ces N paramètres et, en plus, de quatre constantes d'intégration.

Si l'on forme de cette manière l'expression

$$e^{-\frac{u}{2}} = v_1 v_1^0 - v_2 v_2^0,$$

ce sera une fonction de X et de Y qui dépendra de N + 4 paramètres. Seulement, la fonction ainsi définie pourrait n'être pas uniforme sur la surface de Klein; on la rendrait uniforme par des coupures.

On formerait ensuite l'intégrale du paragraphe IX et l'on répéterait le raisonnement de ce paragraphe fondé sur le calcul des variations. Mais cette fois *ce raisonnement serait rigoureux*, parce que l'intégrale ne dépendrait plus d'une fonction arbitraire, mais d'un certain nombre de constantes arbitraires.

On serait donc certain qu'elle a un minimum.

FONCTIONS MODULAIRES

ET

FONCTIONS FUCHSIENNES (1)

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. 3, p. 125-149 (1912).

I. — Séries ψ à indice négatif.

Les fonctions modulaires ne sont qu'un cas particulier des fonctions fuchsiennes; le groupe fuchsien correspondant est celui des substitutions $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ où α, β, γ, δ sont des *entiers* tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Le cercle fondamental se réduit à une droite, axe des quantités réelles, de telle façon que les fonctions n'existent qu'au-dessus de cet axe. Il est clair que les propriétés générales des fonctions fuchsiennes s'appliquent aux fonctions modulaires; je me suis déjà occupé de cette application dans un Mémoire intitulé : *Sur les invariants arithmétiques*, inséré au Tome 129 du *Journal de Crelle* (1905), mais j'ai laissé dans l'ombre un certain nombre de points sur lesquels je voudrais revenir. Dans les renvois qui vont suivre, la lettre A se rapportera au Mémoire *Sur les fonctions fuchsiennes* [*Acta mathematica*, t. I (2)] et la lettre C au Mémoire *Sur les invariants arithmétiques* que je viens de citer (3).

Rappelons d'abord les principes fondamentaux en quelques mots :

1° Une fonction fuchsienne est une fonction de z, méromorphe dans tout l'intérieur du cercle fondamental (ici pour tout point situé au-dessus de l'axe des quantités réelles, cet axe étant exclu) et satisfaisant à la condition

$$f(z) = f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right). \tag{1}$$

(1) H. Poincaré n'a pu corriger les épreuves de ce Mémoire, dont il avait envoyé le manuscrit à l'impression le 7 juillet 1912, la veille du jour où il est entré à la Clinique où il devait être opéré. N. E. N.

(2) Ce Tome, p. 169-257.

(3) Le Mémoire désigné par la lettre C ne figure pas dans ce Volume.

2° Une fonction thétafuchsienne est une fonction de z, méromorphe à l'intérieur du cercle fondamental et satisfaisant à la condition

$$\Theta\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=\Theta(z)(\gamma z+\delta)^{2m} \tag{2}$$

(la fonction est alors d'ordre m).

On peut avoir avantage à mettre une fonction thétafuchsienne sous la *forme homogène*. Posons $z=\frac{\xi}{\eta}$ et

$$\Theta(\xi,\eta)=\eta^{-2m}\Theta\left(\frac{\xi}{\eta}\right);$$

$\Theta(\xi,\eta)$ sera une fonction homogène d'ordre $-2m$ en ξ et η et la relation (2) deviendra

$$\Theta(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta)=\Theta(\xi,\eta). \tag{2 bis}$$

Pour revenir d'ailleurs de la forme homogène à la forme ordinaire, il suffit de faire $\xi=z$, $\eta=1$.

3° Une fonction thétafuchsienne s'exprime facilement à l'aide des fonctions fuchsiennes; donnons en particulier cette expression dans le cas des fonctions modulaires. Dans ce cas, le polygone fuchsien est un quadrilatère formé de deux triangles égaux (au point de vue non euclidien) et dont les angles sont 0, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$. Soient A, B, C les trois sommets de ce triangle; le sommet A est sur le cercle fondamental (je puis choisir mon polygone fuchsien de façon que ce sommet soit le point $z=\infty$). Il existera une fonction fuchsienne

$$x=f(z)$$

à l'aide de laquelle toutes les autres pourront s'exprimer rationnellement et telle que l'on ait

$$x=\infty \text{ en A},\qquad x=0 \text{ en B},\qquad x=1 \text{ en C};$$

on aura alors, pour une fonction thétafuchsienne quelconque d'ordre m,

$$\Theta(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^m R(x), \tag{3}$$

R étant une fonction rationnelle de x; mais il convient de distinguer quatre espèces de fonctions thétafuchsiennes :

1° Celles de la première ou de la quatrième espèce seront celles qui deviennent infinies à l'intérieur du cercle fondamental. La condition pour qu'une fonction Θ ne puisse pas devenir infinie à l'intérieur de ce cercle, c'est d'abord que R ne puisse devenir infinie que quand $\frac{dx}{dz}$ s'annule, c'est-à-dire pour $x=0$ ou $x=1$, et que l'ordre d'infinitude de R soit moindre que l'ordre de petitesse de l'autre facteur $\left(\frac{dx}{dz}\right)^m$; on devra donc avoir

$$R=\frac{P}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}}, \tag{4}$$

P étant un polynome de degré p et λ_1 et λ_2 étant des entiers tels que

$$\lambda_1 \leqq \frac{m}{2}, \qquad \lambda_2 \leqq \frac{2m}{3}. \tag{4 bis}$$

2° Si les conditions (4) et (4 *bis*) sont remplies, la forme Θ est de deuxième ou de troisième espèce; mais une autre distinction est nécessaire. On a démontré [A, p. 275 ([1]); A, p. 215 ([2])] que pour qu'une fonction thétafuchsienne de la forme (3) puisse être représentée par une série thétafuchsienne, l'expression $x^m R$ doit tendre vers zéro quand x croît indéfiniment, si $x=\infty$ correspond à un sommet situé sur le cercle fondamental, ce qui est ici le cas. Cela nous conduit à la condition

$$p=\lambda_1+\lambda_2-m-1.$$

Si plus généralement on a

$$R=\frac{P}{Q\,x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}}, \tag{5}$$

P et Q étant des polynomes de degrés p et q ne s'annulant ni pour $x=0$, ni pour $x=1$, on devra avoir

$$p-q \leqq \lambda_1+\lambda_2-m-1. \tag{5 bis}$$

3° Si les conditions (5) et (5 *bis*) sont remplies, la fonction est de première ou de seconde espèce; dans le cas contraire, elle est de troisième ou quatrième espèce.

4° Une série thétafuchsienne est une série de la forme suivante : soit $H(\xi, \eta)$ une fonction rationnelle homogène de degré $-2m$ en ξ et en η; la série en question est

$$\Sigma\, H(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta),$$

la sommation étant étendue à toutes les substitutions du groupe fuchsien. Pour

([1]) Ce Tome, p. 241.
([2]) Ce Tome, p. 188.

que cette série converge, il faut que m soit au moins égal à 2 et que la fonction $H(\xi, \eta)$ ne devienne infinie pour aucune valeur de $\frac{\xi}{\eta}$ située sur le cercle fondamental. Dans le cas particulier qui nous occupe et où le cercle fondamental se réduit à l'axe des quantités réelles, cette seconde condition doit s'énoncer ainsi : la fonction rationnelle $H(\xi, \eta)$ ne doit devenir infinie pour aucun système de valeurs *réelles* de ξ et de η, le système $\xi = 0$, $\eta = 0$ étant mis à part.

Je suis obligé d'insister sur ce point à cause d'une inadvertance que j'ai commise dans le Mémoire cité (C., p. 92). J'ai dit que $H(\xi, \eta)$ devait avoir un zéro d'ordre $2h$ au moins pour $\eta = 0$; cette conclusion n'était nullement justifiée par le raisonnement qui précédait et qui conduisait tout simplement à l'énoncé que je viens de donner; je n'en ai heureusement fait aucun usage et le reste du Mémoire a été écrit sans en tenir aucun compte.

Quoi qu'il en soit, nous devons distinguer deux espèces de séries thétafuchsiennes : celles où H devient infini à l'intérieur du cercle fondamental, et celles où H n'y devient jamais infini. Les premières seules peuvent devenir infinies à l'intérieur du cercle fondamental. Les séries thétafuchsiennes de première espèce représentent des fonctions de première espèce, les séries de deuxième espèce représentent des fonctions de deuxième espèce; les fonctions de troisième et de quatrième espèces ne peuvent être représentées par des séries thétafuchsiennes.

5° Mais, outre les séries thétafuchsiennes, nous avons d'autres séries qui peuvent représenter des fonctions thétafuchsiennes. Nous avons en premier lieu les séries

$$\sum \frac{1}{(\alpha\xi + \beta\eta)^{2m}}$$

convergentes si m est au moins égal à 2. On doit y donner à α et β toutes les valeurs entières *premières entre elles*. Ces séries ne diffèrent que par un facteur constant simple de celles que l'on obtiendrait en donnant à α et β toutes les valeurs entières sans exception, sauf bien entendu le système $\alpha = \beta = 0$.

A chaque substitution du groupe correspond un système de valeurs entières et premières entre elles de α et β; réciproquement, à chaque pareil système, correspondent une infinité de substitutions du groupe, comprises dans la formule

$$\left(z, \frac{\gamma z + \delta}{\alpha z + \beta} + \mu\right).$$

γ et δ étant deux entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et μ étant un autre entier arbitraire.

Nous avons ensuite les séries

$$(6) \qquad \psi(\xi, \eta; q, m) = \sum \frac{1}{(\alpha\xi + \beta\eta)^{2m}} e^{2q\pi\frac{\gamma\xi+\delta\eta}{\alpha\xi+\beta\eta}}.$$

Ici encore m et q sont des entiers, le premier au moins égal à 2, le second positif ou négatif; nous donnons à α et β tous les systèmes de valeurs entières premières entre elles; enfin γ et δ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Peu importe d'ailleurs la façon dont on choisit γ et δ, car si l'on change γ et δ en $\gamma + \mu\alpha$ et $\delta + \mu\beta$, μ étant entier, l'exponentielle

$$e^{2q\pi\frac{\gamma\xi+\delta\eta}{\alpha\xi+\beta\eta}}$$

ne change pas. Il est clair que les séries $\sum \frac{1}{(\alpha\xi + \beta\eta)^{2m}}$ rentrent dans le même type et peuvent s'écrire

$$\psi(\xi, \eta; 0, m).$$

Cela posé, considérons la fonction rationnelle $H(\xi, \eta)$ qui sert à former la série thétafuchsienne et décomposons-la en éléments simples par rapport à ξ; nous aurons, si tous les infinis sont simples,

$$(7) \qquad H(\xi, \eta) = \sum \frac{B_k}{\eta^{2m-1}(\xi - a_k\eta)}.$$

S'il y a des infinis multiples, nous aurons des termes de la forme

$$(8) \qquad \frac{C}{\eta^{2m-q}(\xi - a_k\eta)^q},$$

q pouvant être d'ailleurs plus grand que $2m$. Nous n'avons pas à nous inquiéter de la partie entière (par rapport à ξ) de la décomposition de H en éléments simples. Cette partie entière n'existe pas; car H ne doit pas devenir infinie pour $\eta = 0$.

Nous ne pouvons pas nous servir de l'un des éléments simples du second membre de (7) pour construire une série thétafuchsienne, car ces éléments simples deviennent infinis pour $\eta = 0$. Il n'en serait pas de même de l'élément simple (8) si q était au moins égal à $2m$.

D'ailleurs, pour que H ne devienne pas infinie pour $\eta = 0$, il faut certaines relations entre les résidus B_k, à savoir

$$(9) \qquad \Sigma B_k a_k^q = 0 \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, 2m-2).$$

Considérons alors la série thétafuchsienne

$$\Sigma\, \mathrm{H}(\alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta);$$

nous pouvons, en groupant les termes d'une manière convenable, la décomposer en séries partielles; à cet effet, nous grouperons ensemble toutes les substitutions qui correspondent aux mêmes valeurs de γ et de δ; l'ensemble des termes correspondants s'écrira

$$\Sigma\, \mathrm{H}[\alpha\xi + \beta\eta + p(\gamma\xi + \delta\eta), \gamma\xi + \delta\eta],$$

les entiers α, β, γ, δ ayant des valeurs déterminées, tandis que l'entier p est quelconque. Envisageons séparément les divers éléments simples de H; l'un de ces éléments nous donnera

$$\frac{\mathrm{B}_k}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m-1}} \sum \frac{1}{(\alpha\xi + \beta\eta) + (p - a_k)(\gamma\xi + \delta\eta)},$$

et il faut sommer par rapport à l'entier p; la sommation est aisée, on trouve

(10) $$\frac{\pi \mathrm{B}_k}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m}} \cot \pi\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} - a_k\right).$$

Or, la cotangente de x peut être développée suivant les puissances soit croissantes, soit décroissantes de e^{2ix}, suivant que le module de cette exponentielle est très petit ou très grand; nous aurons, dans le premier cas,

$$\pi \cot \pi x = \Sigma\, \lambda_p\, e^{2ip\pi x}$$

(d'ailleurs λ_p est égal à $-i\pi$ pour $p = 0$ et à $-2i\pi$ pour $p > 0$) et dans le second,

$$\pi \cot \pi x = -\Sigma\, \lambda_p\, e^{-2ip\pi x}.$$

L'expression (10) s'écrira donc, si la partie imaginaire de a_k est grande et négative,

$$\mathrm{B}_k \Sigma\, \lambda_p\, e^{-2ip\pi a_k} (\gamma\xi + \delta\eta)^{-2m}\, e^{2ip\pi \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}},$$

et, si elle est grande et positive,

$$-\mathrm{B}_k \Sigma\, \lambda_p\, e^{2ip\pi a_k} (\gamma\xi + \delta\eta)^{-2m}\, e^{-2ip\pi \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}}.$$

Il nous faut sommer, par rapport à p et par rapport à k, ainsi que par rapport aux systèmes d'entiers γ et δ. Nous observerons à l'égard de cette seconde sommation que

$$\Sigma (\gamma\xi + \delta\eta)^{-2m}\, e^{2ip\pi \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}} = \psi(\xi, \eta; -p, m)$$

à cause de la permutation du rôle des entiers α, β avec celui des entiers γ, δ.

Nous aurons donc, à supposer que tous les a_k aient leur partie imaginaire grande,

$$\Theta = \Sigma\, B_k \lambda_p\, e^{-2ip\pi a_k}\, \psi(\xi, \eta;\, -p,\, m) - \Sigma\, B_k \lambda_p\, e^{2ip\pi a_k}\, \psi(\xi, \eta;\, p,\, m); \tag{11}$$

le premier terme du second membre se rapporte aux a_k dont la partie imaginaire est négative et le second terme aux a_k dont la partie imaginaire est positive.

Dans le cas où nous aurions des infinis multiples, nous n'aurions qu'à remarquer que (8) n'est, à un facteur constant près, que la dérivée $(q-1)^e$ du terme général du second membre de (7), dérivée prise par rapport à a_k; nous introduirions ainsi, par exemple, dans le second membre de (11), des termes de la forme

$$M\, \Sigma\, C\, p^{q-1} \lambda_p\, e^{-2ip\pi a_k}\, \psi(\xi, \eta;\, -p,\, m), \tag{11 bis}$$

M étant un facteur numérique simple dépendant de q.

Il importe de nous rendre compte de ce que nous devons entendre par *grande*, quand il s'agit de la partie imaginaire de a_k. Les deux développements de $\cot \pi x$ sont toujours valables, le premier toutes les fois que la partie imaginaire de x est positive, le second toutes les fois qu'elle est négative. Considérons, d'autre part, les différentes valeurs que peut prendre l'expression

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}$$

pour les différentes substitutions du groupe; ce sont les différents transformés du point $z = \frac{\xi}{\eta}$. Ils sont tous au-dessus de l'axe des quantités réelles, leur partie imaginaire est toujours positive et elle peut varier depuis 0 jusqu'à une certaine limite supérieure L qui correspond à ceux des transformés de z qui se trouvent dans ceux des polygones fuchsiens transformés du polygone fuchsien fondamental qui s'étendent à l'infini. Toutes les expressions

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} - a_k$$

devront donc avoir leurs parties imaginaires de même signe, c'est-à-dire que a_k devra avoir sa partie imaginaire négative ou bien plus grande que L.

Supposons d'abord que tous les a_k aient leur partie imaginaire négative. Dans ce cas, la série thétafuchsienne sera de seconde espèce et ne pourra représenter qu'une fonction de seconde espèce; mais nous savons que le nombre des fonctions thétafuchsiennes de seconde espèce linéairement indépendantes est limité. Ce nombre est égal à

$$n, \quad n, \quad n, \quad n, \quad n+1, \quad n$$

pour

$$m = 6n+2, \quad 6n+3, \quad 6n+4, \quad 6n+5, \quad 6n+6, \quad 6n+7$$

[C., p. 100; A., p. 236, 275 (1)].

Donc, pour $m = 2, 3, 4, 5$ et 7, il n'y a pas de fonction de seconde espèce et toute série de seconde espèce est identiquement nulle. Nous considérerons en particulier la série formée avec une fonction rationnelle H présentant un seul infini a d'ordre $2m$

$$H = \frac{1}{(\xi - a\eta)^{2m}}.$$

Si nous lui appliquons la formule (11) convenablement modifiée, il viendra

$$\Theta = M\,\Sigma p^{2m-2}\lambda_p\, e^{-2ip\pi a}\,\psi(\xi, \eta; -p, m). \tag{12}$$

Cette expression, qui est développée suivant les puissances de $e^{-2ia\pi}$, doit être identiquement nulle, quel que soit a; il faut donc que tous les coefficients de la série soient identiquement nuls; la série commence par le terme où $p = 1$, le terme où $p = 0$ est nul à cause du facteur p^{2m-1}. Donc *l'expression*

$$\psi(\xi, \eta; p, m)$$

est nulle identiquement toutes les fois que p *est négatif et que* $m = 2, 3, 4, 5$ *ou* 7.

Pour d'autres valeurs de m, il y a des fonctions de seconde espèce, mais il n'y en a qu'un nombre fini; l'expression (12) doit donc s'écrire

$$\Theta = K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + \ldots + K_q\Theta_q, \tag{12 bis}$$

où q est le nombre des fonctions de seconde espèce linéairement indépendantes, où les Θ_i sont ces fonctions elles-mêmes, où les K_i sont des coefficients qui dépendent seulement de a. En identifiant les expressions (12) et (12 *bis*), nous voyons que, l'identité devant subsister, quels que soient ξ et η, d'une part, et quel que soit a, d'autre part, les coefficients K_i sont développables suivant les puissances de $e^{-2ia\pi}$ et qu'en identifiant les coefficients des puissances de cette

---

(1) Ce Tome, p. 207, 240.

variable on trouve

$$\psi(\xi, \eta; -p, m) = k_1\Theta_1 + k_2\Theta_2 + \ldots + k_q\Theta_q,$$

les k étant des coefficients constants; donc :

1° *Quel que soit m, l'expression $\psi(\xi, \eta; p, m)$, où p est négatif, représente une fonction thétafuchsienne de seconde espèce.*

2° *Il y a toujours une relation linéaire entre $q+1$ de ces expressions si p est négatif.*

Il resterait à former effectivement ces relations linéaires.

II. — Séries ψ à indice positif.

Pour pouvoir aborder l'étude des expressions ψ quand p est positif, il faut nous placer un instant à un autre point de vue. Considérons la fonction

$$x = f(z)$$

pour $z = \infty$, c'est-à-dire pour le sommet A du polygone fuchsien : on aura $x = \infty$. Je puis même écrire

$$\frac{1}{x} = \Sigma\, \mu_q\, e^{2iqz\pi} \tag{1}$$

en développant x suivant les puissances de $e^{2iz\pi}$; le développement commence par un terme du premier degré, je veux dire que $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \gtrless 0$ [A., p. 274 (1)]. Je puis d'ailleurs renvoyer, pour le cas particulier des fonctions modulaires, aux relations connues entre le module et les périodes. On tire de là un autre développement

$$\frac{dx}{dz} = e^{-2iz\pi}\Sigma\, \nu_q e^{2iqz\pi} \qquad (\nu_0 \gtrless 0), \tag{2}$$

donc le développement de $\dfrac{dx}{dz}$ commence par un terme de degré -1 en $e^{2iz\pi}$.

Soit alors une fonction R quelconque, et

$$\Theta = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{R}.$$

Nous prendrons, par exemple,

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}(x)}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}(x-c)},$$

(1) Ce Tome, p. 259.

les entiers λ_1 et λ_2 et le degré p du polynome P satisfaisant aux conditions

$$\lambda_1 = \frac{m}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{2m}{3}, \qquad p = \lambda_1 + \lambda_2 - m. \tag{3}$$

Cette fonction Θ ne pourra devenir infinie à l'intérieur du cercle fondamental que pour la valeur $z = a$ qui correspond à $x = c$. Si nous voulons former la série thétafuchsienne correspondante, il faudra donc que nous prenions (en renonçant à l'homogénéité et faisant, par conséquent, $\xi = z$, $\eta = 1$)

$$\mathrm{H} = \sum \frac{\mathrm{B}'_k}{z - a'_k} + \frac{\mathrm{B}}{z - a}.$$

Les a_k sont les pôles de H qui sont à l'extérieur du cercle fondamental, les B'_k sont les résidus correspondants ; a est le pôle unique intérieur au cercle fondamental et B est le résidu correspondant.

Appliquons la formule (11) du numéro précédent à cette série thétafuchsienne, il viendra

$$\Theta = \Sigma\, \mathrm{B}_k \lambda_p e^{-2ip\pi a'_k} \psi(-p) - \mathrm{B}\, \Sigma\, \lambda_p e^{2ip\pi a} \psi(p). \tag{4}$$

Nous écrirons pour abréger $\psi(p)$ au lieu de $\psi(\xi, \eta; p, m)$.

Le premier terme du second membre de (4) représente une fonction thétafuchsienne de seconde espèce, que nous pourrons écrire

$$\mathrm{K}_1 \Theta_1 + \mathrm{K}_2 \Theta_2 + \ldots + \mathrm{K}_q \Theta_q,$$

q étant le nombre des fonctions de seconde espèce, les Θ_i ces fonctions elles-mêmes et les K des coefficients qui dépendent de a.

Nous savons, par les développements (1) et (2), que $\frac{1}{c}$ et $\frac{dc}{da}$ sont développables suivant les puissances de $e^{2i\pi a}$, le premier développement commençant par un terme de degré 1 et le second par un terme de degré -1. Nous aurons donc

$$\Theta = -\sum \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{\mathrm{P}(x)}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} \frac{x^h}{c^{h+1}}.$$

On peut développer $\frac{1}{c^{h+1}}$ suivant les puissances de $e^{2i\pi a}$, le développement commencera par un terme de degré $h + 1$; nous en déduirons

$$\Theta = -\sum \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{\mathrm{P}_k}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} e^{2ik\pi a}$$

le polynome P_k étant de degré $p + k - 1$.

D'autre part, nous avons

$$B = \left(\frac{dc}{da}\right)^{m-1} \frac{P(c)}{c^{\lambda_1}(c-1)^{\lambda_2}}.$$

Développons encore suivant les puissances de $e^{2i\pi a}$; nous voyons que le développement du premier facteur $\left(\frac{dc}{da}\right)^{m-1}$ commence par un terme de degré $1-m$ et celui du second facteur par un terme de degré $\lambda_1+\lambda_2-p$; donc le développement de B commencera par un terme de degré

$$(1-m)+(\lambda_1+\lambda_2-p)=1,$$

et nous pourrons écrire

$$B = \Sigma\, b_j\, e^{2i\pi ja} \qquad (b_0 = 0,\ b_1 \gtrless 0).$$

De plus, les coefficients K_i pourront aussi être développés sous la forme

$$K_i = -\Sigma\, k_{iq}\, e^{2i\pi qa},$$

de sorte que l'équation (4) deviendra

$$\sum \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{P_q}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} e^{2i\pi qa} = \Sigma\, k_{iq}\Theta_i\, e^{2i\pi qa} + \Sigma\, b_j \lambda_{q-j}\, \psi(q-j)\, e^{2i\pi qa},$$

d'où

$$\Sigma\, b_j \lambda_{q-j}\, \psi(q-j) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{P_q}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} - \Sigma\, k_{iq}\Theta_i$$

(le nombre j peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, q$). On en déduit aisément

$$(5) \qquad \psi(q) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{Q_q}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} + \Sigma\, g_i \Theta_i,$$

Q_q étant un polynome en x entièrement déterminé de degré $p-q-1$ et les g_i des coefficients indéterminés.

La formule (5) donne donc la valeur de la fonction $\psi(q)$ pour q nul ou positif *à une fonction thêtafuchsienne de seconde espèce près.*

III. — Convergence des séries thêtafuchsiennes

Jusqu'à présent, nous nous sommes astreints, dans la formation des séries thêtafuchsiennes, à l'hypothèse que H ne peut devenir infinie sur le cercle fondamental; nous savons, en effet, que cette hypothèse est suffisante pour que la série converge [A., 208 (1)]. Mais elle n'est pas nécessaire et il est possible de l'étendre; pour chercher les conditions de convergence, nous montrons,

(1) Ce Tome page 152.

en effet, que

$$\Sigma|\gamma z+\delta|^{-2m}$$

converge [A., 196 ([1])], et nous en avons conclu que la série thétafuchsienne

$$\Sigma\, \mathrm{H}\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)(\gamma z+\delta)^{-2m}$$

converge également, pourvu que l'on puisse assigner une limite supérieure au module de H, ce qui arrive quand H ne devient pas infinie sur le cercle fondamental.

Supposons maintenant que H devienne infinie au point $z=a$ situé sur le cercle fondamental; alors il pourra se faire que, parmi les expressions

$$\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},$$

il y en ait une infinité qui soient infiniment près de a, auquel cas les valeurs correspondantes de H pourront devenir infiniment grandes. Mais si le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, on a

$$|\gamma z+\delta|^{-2}=\frac{1-\left|\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right|^2}{1-|z|^2}$$

[A., 204 ([2]), lemme V]; de plus, il est clair que

$$\left|\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}-a\right| \geqq |a|-\left|\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right| = 1-\left|\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right| > \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left|\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right|^2;$$

donc

$$\left|\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}-a\right| > \frac{1}{2}(1-|z|^2)|\gamma z+\delta|^{-2}.$$

Si donc H devient infinie du premier ordre pour $z=a$, l'expression $\mathrm{H}\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ sera de l'ordre de $|\gamma z+\delta|^2$ et le terme général de la série thétafuchsienne sera de l'ordre de

$$|\gamma z+\delta|^{2-2m}.$$

Donc *la série convergera encore, pourvu que m soit au moins égal à* 3.

Le nombre m devrait pour la convergence être au moins égal à 4 ou à 5, si H possédait sur le cercle fondamental des infinis doubles ou triples.

([1]) Ce Tome page 172.
([2]) Ce Tome page 179.

Si nous appliquons ce principe en particulier à l'hypothèse

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{C}}{\eta^{2m-q}(\xi - a_k\eta)^q}$$

[formule (8) du paragraphe I], nous voyons que H a un infini d'ordre $2m - q$ sur le cercle fondamental : la condition de convergence serait

$$m \geqq 2 + 2m - q$$

ou

$$q \geqq m + 2.$$

Nous n'aurions ainsi qu'une idée inexacte de la véritable limite de convergence ; en effet, si a est un point double d'une substitution parabolique appartenant au groupe fuchsien, la différence

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - a$$

n'est pas de l'ordre de $(\gamma z + \delta)^{-2}$ comme dans le cas général, mais seulement de l'ordre de $(\gamma z + \delta)^{-1}$; on s'en rendra compte de la façon suivante : je puis d'abord supposer $a = 0$; soient ensuite

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_i, \quad \ldots$$

une infinité de transformés de z, choisis de telle sorte que tout transformé de z par le groupe fuchsien puisse être regardé d'une manière et d'une seule comme le transformé de l'un des z_i par une des puissances de la substitution parabolique ; tous ces transformés de z seront donc de la forme

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{z_i}{mhz_i + 1},$$

m étant un entier (qui est l'exposant de la puissance à laquelle est élevée la substitution parabolique) et h une constante ; on aura d'ailleurs

$$\frac{1}{(\gamma z + \delta)^2} = \frac{dz_i}{dz}\,\frac{1}{(mhz_i + 1)^2}.$$

On peut choisir les z_i de façon qu'ils soient tous à distance finie du cercle fondamental. Dans ces conditions, z_i et $\frac{dz_i}{dz}$ sont finis ; on voit que $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est de l'ordre de $(mhz_i + 1)^{-1}$ et que $(\gamma z + \delta)^{-2}$ est de l'ordre de $(mhz_i + 1)^{-2}$, c'est-à-dire que $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est de l'ordre de $(\gamma z + \delta)^{-1}$. C. Q. F. D.

Nous nous en rendrons d'ailleurs mieux compte en revenant à l'hypothèse

$$H = \frac{C}{\eta^{2m-q}(\xi - a\eta)^q}$$

dans le cas particulier du groupe modulaire.

Le terme général de la série est

$$\frac{C}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m-q}[(\alpha\xi + \beta\eta) - a(\gamma\xi + \delta\eta)]^q}.$$

Dans le cas du groupe modulaire, α, β, γ, δ sont des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Nous pouvons grouper les termes qui correspondent à un même système de valeurs de γ et δ; tous ces termes se déduisent de l'un d'entre eux en changeant α et β en $\alpha + p\gamma$ et $\beta + p\delta$, p étant un entier. Le terme général est alors

$$(1) \qquad \frac{C}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m}} \frac{1}{\left[\dfrac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} + p - a\right]^q}.$$

L'expression

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} + p - a$$

ne peut s'annuler ni devenir infinie; et, en effet, nous pouvons toujours choisir α et β de telle façon que $\dfrac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}$ ait sa partie réelle comprise entre 0 et 1; de plus, cette expression est imaginaire, mais il n'y a qu'un nombre fini de ses déterminations dont la partie imaginaire dépasse une limite donnée; de plus, a est imaginaire; nous pouvons donc assigner une limite supérieure et une limite inférieure au module du rapport

$$\frac{1}{p}\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} + 1 - \frac{a}{p},$$

d'où l'on conclura que le second facteur de (1) est de l'ordre de p^{-q}; de sorte que la série sera convergente ou divergente avec celle dont le terme général est

$$(2) \qquad \frac{C}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m}} \frac{1}{p^q}.$$

Celle-ci se présente comme le produit de deux séries, dont la première converge si $m \geqq 2$ et la seconde si $q \geqq 2$.

Notre série convergera donc pourvu que q soit au moins égal à 2. Pour $q = 1$

elle ne convergerait plus absolument, mais on pourrait en grouper les termes de façon à obtenir une série semi-convergente.

Nous pouvons définir par là des séries thétafuchsiennes que nous appellerons de troisième et de quatrième espèces. Celles de troisième espèce seront celles où H aura des infinis sur le cercle fondamental et à l'extérieur, mais pas à l'intérieur; celles de quatrième espèce seront celles où H aura des infinis sur le cercle et à l'intérieur, et pourra en avoir aussi à l'extérieur. Il est clair qu'une série de quatrième espèce peut toujours être regardée comme la somme d'une série de première espèce et d'une série de troisième espèce.

Pour rechercher ce que représente une série de troisième espèce, il faut distinguer deux cas. Soit a la valeur de z située sur le cercle fondamental et pour laquelle H devient infinie; de deux choses l'une : ou bien a n'est pas un sommet du polygone fuchsien fondamental, ou bien c'est un sommet de ce polygone.

Dans le premier cas, la série Θ ne devient infinie pour aucun point du polygone fuchsien, ni par conséquent pour aucune valeur de la fonction fuchsienne x; elle représente donc une fonction thétafuchsienne de seconde espèce.

Dans le second cas, elle représentera encore une fonction thétafuchsienne, qui ne pourra pas devenir infinie à l'intérieur du cercle fondamental, ni par conséquent pour aucune valeur finie de x; elle satisfera donc aux conditions (4) et (4 *bis*) du paragraphe I. Mais elle ne satisfera plus à la condition (5); il n'est plus vrai, en effet, que $x^m R$ tende vers zéro quand x croît indéfiniment, car la démonstration qui en a été donnée [A., p. 215 ([1])] suppose expressément que H ne devient pas infinie sur le cercle fondamental. La série représente donc une fonction de troisième espèce.

IV. — Introduction des fonctions Λ.

Le procédé du paragraphe II nous donne la somme des séries $\psi(p)$ à *une fonction près de seconde espèce*, laquelle fonction reste d'ailleurs indéterminée. On peut aller plus loin en se servant des fonctions Λ [A., p. 238 ([2])]; ces fonctions nous permettent, en effet, de calculer la somme exacte de cer-

([1]) Ce Tome page 188.
([2]) Ce Tome page 209.

taines séries thétafuchsiennes. Soit donc

$$\Lambda = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} \frac{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}}{(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_q)},$$

où λ_1 et λ_2 sont les plus grands entiers contenus respectivement dans $\frac{m}{2}$ et $\frac{2m}{3}$ et où le nombre q des infinis du dénominateur est égal à

$$q = \lambda_1 + \lambda_2 - m + 1$$

(C., p. 99). Nous poserons d'ailleurs

$$\frac{1}{(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_q)} = \sum \frac{B_k}{x-c_k}.$$

Les résidus B_k sont alors liés par les relations

$$(1) \qquad \Sigma B_k c_k^h = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \dots, q-2).$$

Nous savons ensuite [A., p. 239 (1) et suiv.] que la fonction Λ peut être décomposée en éléments simples sous la forme suivante :

$$(2) \qquad \Lambda = \sum \frac{A_k}{z-a_k}.$$

Nous pouvons grouper ensemble tous les termes du second membre de (2) qui correspondent à une même valeur de c_k; nous trouverons ainsi

$$(3) \qquad \Lambda = \Sigma A_k \Phi(z, a_k),$$

où

$$\Phi(z, a_k) = \sum \frac{1}{(\gamma a_k - \delta)^{2m}} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha a_k - \beta}{\gamma a_k + \delta}}$$

est une fonction thétafuchsienne par rapport à a_k.

Différentions l'équation (3) $2m-1$ fois par rapport à z; nous aurons

$$(4) \qquad D\Lambda = \Sigma A_k D\Phi(z, a_k),$$

où $D = \frac{d^{2m-1}}{dz^{2m-1}}$ est le symbole de $2m-1$ différentiations par rapport à z et où

$$D\Phi(z, a_k) = M \sum \frac{1}{[z(\gamma a_k + \delta) - (\alpha a_k + \beta)]^{2m}}$$

(1) Ce Tome pages 210 et suivantes.

est une fonction thétafuchsienne tant par rapport à z que par rapport à a_k. D'ailleurs

$$M = (-1)(2m-1)!$$

est une constante purement numérique.

Nous appliquerons à $D\Phi(z, a_k)$ les formules (11) et (11 *bis*) du paragraphe I et nous trouverons

$$(5) \qquad D\Phi = + \Sigma \lambda_p \mu_p e^{2ip\pi a_k} \psi(p),$$

où λ_p a le même sens que dans le paragraphe cité et où $\mu_p = -p^{2m-1}(2i\pi)^{2m-1}$. On trouve ainsi

$$(6) \qquad DA = \Sigma \lambda_p \mu_p \psi(p) [\Sigma A_k e^{2ip\pi a_k}].$$

D'autre part, en égalant les résidus, on trouve

$$A_k = B_k \left(\frac{da_k}{dc_k}\right)^m c_k^{\lambda_1} (c_k - 1)^{\lambda}.$$

Mais, d'après les formules (1) et (2) du paragraphe II, $\frac{1}{c_k}$ est développable suivant les puissances de $e^{2i\pi a_k}$, le développement commençant par un terme du premier degré; réciproquement, $e^{2i\pi a_k}$ est développable suivant les puissances de $\frac{1}{c_k}$ et le développement commence par un terme du premier degré; on a donc

$$(7) \qquad e^{2i\pi p a_k} = \sum \gamma_p \frac{1}{c_k^h},$$

les γ étant des coefficients connus et tels que $\gamma_{ph} = 0$ si $h < p$. D'autre part, les développements de

$$\left(\frac{da_k}{dc_k}\right)^m, \quad c_k^{\lambda_1}, \quad (c_k - 1)^{\lambda_2}, \quad \frac{A_k}{B_k}$$

suivant les puissances de $e^{2i\pi a_k}$ commencent respectivement par des termes de degré

$$m, \quad -\lambda_1, \quad -\lambda_2, \qquad m - \lambda_1 - \lambda_2 = 1 - q.$$

On aura donc

$$(8) \qquad \frac{A_k}{B_k} = \Sigma \delta_j c_k^{-j} \qquad \text{où} \qquad j \geq 1 - q.$$

Si nous substituons les développements (7) et (8) dans le second membre de (6), il vient

$$(9) \qquad DA = \Sigma \lambda_p \mu_p \psi(p) \gamma_{ph} \delta_j [\Sigma B_k c_k^{-h-j}].$$

où

$$p \geq 1, \qquad h \geq p, \qquad j \geq 1 - q.$$

Cela nous permet d'écrire

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{D}\mathrm{A} = \Sigma\, \Omega(n)\big[\Sigma\, \mathrm{B}_k c_k^{-n}\big].$$

avec

$$\Omega(n) = \Sigma\, \lambda_p \mu_p \psi(p) \gamma_{ph} \delta_j,$$

où

$$p \geq 1, \qquad h \geq p, \qquad j \geq 1 - q, \qquad h + j = n;$$

d'où

$$n \geq p + 1 - q, \qquad n \geq 2 - q,$$

ce qui prouve que $\Omega(n)$ est une combinaison linéaire de

$$\psi(1), \quad \psi(2), \quad \ldots, \quad \psi(n + q - 1),$$

dont les coefficients peuvent être regardés comme connus.

D'autre part, nous avons

$$\mathrm{A} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2} \sum \frac{\mathrm{B}_k}{x - c_k} = \Sigma\, \mathrm{P}_n\big[\Sigma\, \mathrm{B}_k c_k^{-n}\big],$$

où

$$\mathrm{P}_n = -\left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} x^{n-1+\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2} \qquad (n \geq 1).$$

En rapprochant de (10), on trouve

$$\text{(11)} \qquad \Sigma\, \mathrm{D}\mathrm{P}_n\big[\Sigma\, \mathrm{B}_k c_k^{-n}\big] = \Sigma\, \Omega(n)\big[\Sigma\, \mathrm{B}_k c_k^{-n}\big].$$

Dans le premier membre, n prend toutes les valeurs à partir de 1, et dans le second membre, à partir de $2 - q$. Cela ne fait rien, car les termes du second membre correspondant à

$$n = 0, \qquad -1, \qquad -2, \qquad \ldots, \qquad 2 - q$$

disparaissent en vertu des relations (1). Je dis que, pour $n \geq 1$, on aura

$$\Omega(n) = \mathrm{D}\mathrm{P}_n.$$

Soit, en effet,

$$\mathrm{F}(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \big[\Omega(n) - \mathrm{D}\mathrm{P}_n\big] c^{-n}.$$

La relation (11) pourra s'écrire

$$\Sigma\, \mathrm{B}_k\, \mathrm{F}(c_k) = 0$$

et elle devra avoir lieu, non pas quels que soient les B_k et les c_k, mais toutes les fois que les B_h et les c_k satisferont aux relations (1); il faut donc que le déterminant des

$$1, \quad c_k, \quad c_k^2, \quad \ldots, \quad c_k^{q-2}, \quad F(c_k)$$

s'annule identiquement, quels que soient les c_k. En écrivant que ce déterminant est nul et donnant à $c_2, c_3, \ldots, c_q$ des valeurs constantes quelconques, on obtiendra une relation linéaire entre

$$1, \quad c_1, \quad c_1^2, \quad \ldots, \quad c_1^{q-2}, \quad F(c_1),$$

c'est-à-dire que $F(c)$ devra être égal à un polynome entier de degré $q-2$ en c. Mais $F(c)$ est développable suivant les puissances *positives* de $\frac{1}{c}$; l'égalité n'est donc possible que si le polynome entier est identiquement nul, ce qui entraîne

$$F(c) = 0.$$

Tous les coefficients de $F(c)$ devant être nuls, on aura

$$\Omega(n) = D P_n. \tag{12}$$

Cela permet de sommer exactement, non pas sans doute les séries $\psi(p)$, mais certaines combinaisons linéaires de ces séries. Rendons-nous compte du progrès accompli; au paragraphe II, nous avions trouvé la somme des séries $\psi(p)$ *à une fonction près de seconde espèce*. Pour achever la détermination, il aurait donc fallu connaître pour *chacune* des séries $\psi(p)$ un certain nombre de constantes arbitraires, de sorte que le nombre de ces constantes restées inconnues pour *toutes* les séries $\psi(p)$ aurait été infini.

Mais maintenant que la formule (12) est démontrée, supposons que l'on ait déterminé ces constantes pour

$$\psi(0), \quad \psi(1), \quad \psi(2), \quad \ldots, \quad \psi(q-1), \tag{13}$$

la formule (12) nous donnera exactement $\Omega(1)$, qui est une combinaison des fonctions (13) et de $\psi(q)$; les constantes pourront donc être regardées comme déterminées pour $\psi(q)$. La formule (12) nous donnera ensuite $\Omega(2)$, qui est une combinaison linéaire des fonctions (13), de $\psi(q)$ et de $\psi(q+1)$; les constantes pourront donc être regardées comme déterminées pour $\psi(q+1)$, et ainsi de suite.

Si donc nous connaissons les constantes pour les fonctions (13), nous les connaîtrons pour *toutes* les séries $\psi(p)$. Pour déterminer toutes ces séries, il suffirait donc de déterminer un nombre *fini* de constantes jusqu'ici inconnues. Ces constantes paraissent d'ailleurs être transcendantes.

Si nous considérons une série thétafuchsienne quelconque de première espèce et, d'autre part, une fonction thétafuchsienne de première espèce qui ait les mêmes infinis à l'intérieur du cercle fondamental avec les mêmes résidus, cette série sera égale à cette fonction *à une fonction près de seconde espèce*, c'est-à-dire que sa somme serait entièrement déterminée si l'on connaissait la valeur d'un certain nombre de constantes transcendantes qui restent inconnues jusqu'ici.

Mais la série thétafuchsienne peut être développée suivant les $\psi(p)$ par la formule (11) du paragraphe I. On connaîtra donc les constantes transcendantes dont dépend la somme de la série thétafuchsienne quand on connaîtra celles dont dépendent les séries $\psi(p)$ et, par conséquent, quand on connaîtra celles dont dépendent les fonctions (13).

Pour achever la détermination de *toutes* les séries thétafuchsiennes (pour une valeur donnée de m, bien entendu), il nous suffirait donc de connaître un nombre *fini* de constantes transcendantes. Ces constantes sont évidemment apparentées avec ce que j'ai appelé les *périodes* de certaines expressions que j'ai considérées comme la généralisation des intégrales abéliennes de première espèce et de seconde espèce (C., p. 104 à 108).

V. — Extension aux séries ψ d'indice négatif.

Cherchons maintenant à obtenir des résultats analogues en ce qui concerne les fonctions $\psi(p)$ où p est négatif. Reprenons la formule (3) du paragraphe précédent :

$$X = \Sigma A_k \Phi(z, a_k),$$

où

$$\Phi(z, a_k) = \sum \frac{1}{(\gamma a_k + \delta)^{2m}} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha a_k + \beta}{\gamma a_k + \delta}}$$

est une série thétafuchsienne en a_k engendrée par la fonction rationnelle

$$H(a_k) = \frac{1}{z - a_k},$$

de telle sorte que

$$\Phi(z, a_k) = \Sigma(\gamma a_k + \delta)^{-2m} H\left(\frac{\alpha a_k + \beta}{\gamma a_k + \delta}\right);$$

c'est ce que j'exprimerai d'une façon abrégée en écrivant avec des crochets carrés

$$\Phi(z, a_k) = \Theta[\mathrm{H}(a_k)] = \Theta\left[\frac{1}{z - a_k}\right].$$

Nous aurons donc, avec cette notation,

$$\Lambda = \Sigma \mathrm{A}_k \Theta\left[\frac{1}{z - a_k}\right].$$

Mais ce n'est pas tout. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental; on aura [A, p. 259 [1] sqq.]

$$\varphi(z)\Lambda(z) = \Sigma \mathrm{A}_k \Theta\left[\frac{\varphi(a_k)}{z - a_k}\right].$$

On en déduit

(1) $$\Sigma \mathrm{A}_k \Theta\left[\frac{\varphi(z) - \varphi(a_k)}{z - a_k}\right] = 0.$$

Soit maintenant $\mathrm{H}(a_k)$ une fonction rationnelle quelconque de a_k ayant tous ses infinis à l'extérieur du cercle fondamental et s'annulant pour $a_k = \infty$, engendrant, par conséquent, une série thêtafuchsienne de seconde espèce; soit z_0 une valeur quelconque de z intérieure au cercle fondamental; soit

$$\varphi(a_k) = (a_k - z_0)\mathrm{H}(a_k);$$

$\varphi(a_k)$ sera une fonction rationnelle de a_k n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental et l'on aura

$$\varphi(z_0) = 0,$$

et par conséquent

$$\mathrm{H}(a_k) = \frac{\varphi(z_0) - \varphi(a_k)}{z_0 - a_k}$$

et

(2) $$\Sigma \mathrm{A}_k \Theta[\mathrm{H}(a_k)] = 0.$$

Soit maintenant $\mathrm{H}(\xi, \eta)$ une fonction rationnelle quelconque homogène de degré $-2m$ en ξ et η, ayant tous ses infinis extérieurs au cercle fondamental (ce qui veut dire, dans le cas qui nous occupe, que tous ses infinis ont leur partie imaginaire négative) de façon à engendrer une série de seconde espèce; on aura

$$\eta^{2m}\mathrm{H}(\xi, \eta) = \mathrm{H}\left(\frac{\xi}{\eta}, 1\right);$$

on voit que, quand η tendra vers zéro, $\frac{\xi}{\eta}$ deviendra infini, le facteur η^{2m} du

[1] Ce Tome page 210 sqq.

premier membre s'annulera, le second facteur H restera fini, puisque H ne doit pas avoir d'infini sur le cercle fondamental, qui se réduit dans le cas particulier à l'axe des quantités réelles, ni en particulier pour $\eta = 0$: donc le second membre s'annule. Donc

$$H(x, 1) = 0.$$

Toute fonction rationnelle $H(a_k)$ susceptible d'engendrer une série de seconde espèce satisfera donc bien à la condition de s'annuler pour $a_k = x$ et, par conséquent, à la condition (2) ; nous pouvons donc écrire

$$\Sigma A_k \theta(a_k) = 0, \tag{3}$$

θ étant le symbole d'une fonction thétafuchsienne *quelconque* de seconde espèce.

Reprenons maintenant la formule (4) du paragraphe précédent

$$DA = \Sigma A_k D\Phi(z, a_k)$$

et voyons ce que devient le second membre quand la partie imaginaire de z est négative. L'expression $D\Phi(z, a_k)$ est une série thétafuchsienne en a_k ; elle ne peut devenir infinie que pour $a_k = z$ et pour ses transformés, c'est-à-dire pour

$$a_k = \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha}.$$

Si donc la partie imaginaire de z est négative, tous ces infinis seront extérieurs au cercle fondamental et la série sera de seconde espèce ; on aura donc

$$\Sigma A_k D\Phi(z, a_k) = 0. \tag{4}$$

Mais $D\Phi(z, a_k)$ est une série thétafuchsienne non seulement par rapport à a_k, mais aussi par rapport à z. Nous pourrons lui appliquer les formules (11) et (11 *bis*) du paragraphe I et nous retrouverons la formule (5) du paragraphe précédent

$$D\Phi = \Sigma \lambda_p \mu_p e^{2ip\pi a_k} \psi(p). \tag{5}$$

L'analyse du paragraphe précédent nous donnait la formule suivante, équivalente à la formule (10) du paragraphe précédent.

$$\Sigma \Omega(n) [\Sigma B_k c_k^{-n}] = 0, \tag{6}$$

où $\Omega(n)$ est une combinaison linéaire à coefficients connus de

$$\psi(1), \quad \psi(2), \quad \ldots, \quad \psi(n + q - 1).$$

Dans la formule (6), n prend toutes les valeurs à partir de $2-q$, mais pour

$$n=0, \quad -1, \quad \ldots, \quad 2-q$$

le coefficient $\Sigma B_k c_k^{-n}$ s'annule; comme la relation (6) doit avoir lieu pour toutes les valeurs des c_k et des B_k qui satisfont aux conditions (1) du paragraphe précédent, on verrait, comme dans le paragraphe précédent, que l'on aura

$$\Omega(n)=0 \qquad (\text{pour } n \leqq 1). \tag{7}$$

Cela a lieu pour toutes les valeurs de z dont la partie imaginaire est négative. Or, si z et z_0 sont imaginaires conjuguées, $\psi(z, 1; p, m)$ et $\psi(z_0, 1; -p, m)$ seront imaginaires conjuguées.

Soit alors

$$\Omega(n)=\Sigma\, \varepsilon_{n,p}\, \psi(p),$$

les ε étant des coefficients numériques.

Soit, d'autre part,

$$\Omega'(n)=\Sigma\, \varepsilon'_{n,p}\, \psi(-p),$$

$\varepsilon'_{n,p}$ étant imaginaire conjugué de $\varepsilon_{n,p}$; alors $\Omega'(z_0, n)$ sera imaginaire conjugué de $\Omega(z, n)$. Si donc $\Omega(n)$ s'annule quand la partie imaginaire de z est négative, $\Omega'(n)$ s'annulera quand elle sera positive. On aura donc

$$\Omega'(n)=0, \tag{8}$$

cette fois pour toutes les valeurs de z intérieures au cercle fondamental. C'est une relation linéaire entre

$$\psi(-1), \quad \psi(-2), \quad \ldots, \quad \psi(1-n-q).$$

Nous avons vu au paragraphe I que toutes les $\psi(p)$ d'indice négatif sont des fonctions de seconde espèce; elles sont donc déterminées à un certain nombre de constantes transcendantes près; mais si ces constantes sont déterminées pour

$$\psi(-1), \quad \psi(-2), \quad \ldots, \quad \psi(1-q),$$

les relations (8) permettront de les déterminer pour toutes les autres fonctions ψ d'indice négatif. Donc la somme de *toutes* les séries ψ d'indice négatif, et par conséquent celle de *toutes* les séries thétafuchsiennes de seconde espèce (pour une valeur donnée de m, bien entendu), ne dépend que d'un nombre fini de constantes transcendantes jusqu'ici inconnues.

VI. — Développement suivant les puissances de q.

Pour aller plus loin, je vais chercher à développer les fonctions

$$\psi(z, 1; p, m)$$

suivant les puissances de $e^{2i\pi z}$, qui n'est autre chose que l'expression q de Jacobi. Soit donc

$$\psi = \sum \frac{1}{(\gamma z + \delta)^{2m}} e^{-2pi\pi \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}}.$$

A chaque terme correspond un couple de nombres premiers entre eux, γ et δ, et inversement. Nous allons grouper ensemble les termes qui correspondent à une même valeur de γ et à des valeurs de δ congrues entre elles suivant le module γ. J'appellerai

$$\omega(\gamma, \delta)$$

l'ensemble de ces termes, et comme

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma(\gamma z + \delta)},$$

il viendra

$$\omega(\gamma, \delta) = e^{-2i\pi p \frac{\alpha}{\gamma}} \sum \frac{1}{(\gamma z + \delta)^{2m}} e^{\frac{2pi\pi}{\gamma(\gamma z + \delta)}},$$

ou, en développant l'exponentielle,

$$\omega(\gamma, \delta) = e^{-2i\pi p \frac{\alpha}{\gamma}} \sum \sum \left(\frac{2pi\pi}{\gamma} \right)^h \frac{1}{(\gamma z + \delta)^{2m+h}} \frac{1}{h!}.$$

L'un des deux signes $\sum$ se rapporte à h, qui prend toutes les valeurs entières de 0 à ∞; l'autre à δ, qui prend toutes les valeurs congrues entre elles suivant le module γ. Si nous posons, pour abréger,

$$e^{-2i\pi p \frac{\alpha}{\gamma}} = A, \qquad \frac{2pi\pi}{\gamma^2} = B,$$

nous pourrons écrire

$$\omega(\gamma, \delta) = A \Sigma B^h \frac{\gamma^{-2m}}{\left(z + \frac{\delta}{\gamma} + n \right)^{2m+h}} \frac{1}{h!}.$$

Nous devrons faire varier sous le signe $\sum$ l'entier h de 0 à ∞ et l'entier n depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et attribuer à δ une valeur constante.

Rappelons que nous avons

$$\sum \frac{1}{z+n} = \pi \cot z\pi = \Sigma \lambda_j \, e^{2ij\pi z},$$

et par conséquent, en différentiant $2m+h-1$ fois par rapport à z,

$$\sum \frac{1}{(z+n)^{2m+h}} = \sum \frac{(-1)^{h-1}}{(2m+h-1)!} \lambda_j (2ij\pi)^{2m+h-1} \, e^{2ij\pi z}.$$

Nous n'avons qu'à substituer, en remplaçant z par $z+\frac{\delta}{\gamma}$, ce qui revient à remplacer $e^{2ij\pi z}$ par $(q\mathrm{C})^j$ en posant

$$\mathrm{C} = e^{2i\pi\frac{\delta}{\gamma}};$$

on trouve ainsi

$$\omega = -\mathrm{A}\,\Sigma\lambda_j(2ij\pi)^{2m-1}(-2ij\pi\mathrm{B})^h \frac{q^j\mathrm{C}^j\gamma^{-2m}}{h!(2m+h-1)!}.$$

Le coefficient de q^j dans $\omega(\gamma, \delta)$ s'écrira donc

$$-\mathrm{E}\,\gamma^{-2m}\lambda_j(2ij\pi)^{2m-1}\sum\frac{\mathrm{G}^h}{h!(2m+h-1)!},$$

où

$$\mathrm{E} = \mathrm{AC}^j = e^{\frac{2i\pi}{\gamma}(j\delta - p\alpha)}, \qquad \mathrm{G} = -2ij\pi\mathrm{B} = \frac{4pj\pi^2}{\gamma^2}.$$

Le coefficient $-\gamma^{-2m}\lambda_j(2ij\pi)^{2m-1}$ est une constante que je puis appeler μ_j; quant à l'expression

$$\sum\frac{\mathrm{G}^h}{h!(2m+h-1)!},$$

c'est une fonction qui se déduit immédiatement des fonctions de Bessel et que j'écrirai $\mathrm{J}(m, \mathrm{G})$; on aura donc

$$\omega(\gamma, \delta) = \Sigma\mu_j\mathrm{E}q^j\mathrm{J}(m, \mathrm{G}).$$

Nous allons maintenant grouper ensemble les termes qui correspondent aux diverses valeurs de δ non congrues entre elles suivant le module γ. Si nous appelons $\omega(\gamma)$ la somme de ces termes, le coefficient de q^j dans $\omega(\gamma)$ sera

$$\mu_j\,\mathrm{J}(m, \mathrm{G})\,\Sigma\mathrm{E}.$$

Il faut donc calculer $\Sigma\mathrm{E}$, c'est-à-dire

$$\Sigma\, e^{\frac{2i\pi}{\gamma}(j\delta - p\alpha)}.$$

Les entiers j, p et γ sont donnés; mais on donne à α toutes les valeurs entières premières avec γ et incongrues entre elles par rapport au module γ, et à δ les valeurs correspondantes, de telle façon que

$$\alpha\delta \equiv 1 \pmod{\gamma}.$$

Je me bornerai à constater que ΣE n'est pas nul en général. Il reste à sommer par rapport à γ et notre coefficient s'écrit

$$\Sigma_\gamma \mu_j [\Sigma E] J\left(m, \frac{4pj\pi^2}{\gamma^2}\right).$$

Il n'y a aucune raison pour qu'il y ait des relations linéaires entre les valeurs des fonctions de Bessel $J\left(m, \frac{4pj\pi^2}{\gamma^2}\right)$ correspondantes aux différentes valeurs de γ. Il n'y a donc aucune raison pour que ce coefficient s'annule.

Il en va tout différemment dans le cas de $p = 0$; nos fonctions J se réduisent à une constante simple que je puis faire sortir du signe Σ, de sorte que notre coefficient s'écrit

$$\mu_j J(m, 0) \Sigma_\gamma [\Sigma E].$$

Ici

$$\Sigma E = \Sigma e^{\frac{2i\pi j}{\gamma}\delta},$$

δ prenant toutes les valeurs entières premières à γ. Soit γ' un diviseur quelconque de γ, de telle sorte que $\gamma = \gamma'\varepsilon$; la valeur correspondante de ΣE sera

$$\Sigma E = \Sigma e^{\frac{2i\pi j\delta'}{\gamma'}} = \Sigma e^{\frac{2i\pi j\delta'}{\gamma}\varepsilon},$$

où δ' est premier à γ' et où, par conséquent, $\delta'\varepsilon$ et γ ont pour plus grand commun diviseur ε. Si nous prenons en particulier $\gamma' = 1$, nous aurons $\delta' = 0$ et

$$\Sigma E = 1.$$

Si donc nous réunissons tous les ΣE relatifs au nombre γ et à *tous* ses diviseurs, *un* compris, il viendra

$$\Sigma\Sigma E = \Sigma e^{\frac{2i\pi j}{\gamma}\delta},$$

δ prenant cette fois toutes les valeurs entières incongrues par rapport au module γ, qu'elles soient ou non premières avec γ.

Cette expression est nulle, à moins que j ne soit divisible par γ. Donc, dans le calcul du coefficient

$$\mu_j J(m, 0) \Sigma_\gamma [\Sigma E].$$

il suffira de donner à γ les valeurs qui divisent j et *qui sont en nombre fini*. Ce coefficient sera donc une constante *qui ne sera pas transcendante*.

Ainsi s'explique la différence qu'il y a entre $\psi(0)$ et les autres $\psi(p)$. Pour la première, les constantes non encore déterminées dont il a été question dans les paragraphes précédents ne sont pas transcendantes et l'on peut en achever la détermination, comme on le fait facilement par la théorie des fonctions elliptiques. Pour les autres $\psi(p)$, ces constantes sont effectivement transcendantes et l'on ne peut pas aller plus loin.

Voilà ce que l'on peut dire au sujet de la sommation des séries

$$\psi(p) = \sum \frac{1}{(\gamma z + \delta)^{2m}} e^{-2p\pi \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}}$$

et sur leurs relations avec les séries thétafuchsiennes des diverses espèces. Je me suis borné aux fonctions modulaires, mais on verra sans peine à quelles catégories de fonctions fuchsiennes chacun des résultats peut être étendu.

NOTES [1],

PAR M. N. E. NÖRLUND.

1. Page 6, ligne 10. Nous avons remplacé septembre par novembre, car il s'agit ici de la Note *Sur les formes quadratiques* [*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 89, p. 897-899 (24 novembre 1879)]. *Voir* aussi *Sur les invariants arithmétiques* [*Association française pour l'avancement des Sciences*, 10e session, Alger (séance du 15 avril 1881), et *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 129, p. 89-150 (1905)].

2. Page 13, lignes 20-29. Poincaré a donné plus loin une méthode plus simple pour déterminer le genre de la relation (3). *Voir* pages 146 et suivantes.

3. Page 17, lignes 1-11. La condition à laquelle les α_i et les β_i devront satisfaire peut s'énoncer comme il suit : Il faut et il suffit qu'il y ait entre eux la relation

$$(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\ldots(\beta_n-\alpha_n)+(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_3-\beta_2)\ldots(\alpha_n-\beta_{n-1})(\alpha_1-\beta_n)=0.$$

4. Page 20, lignes 3-4. Dans les Mémoires ultérieurs, Poincaré appelle *sommets de la troisième catégorie* un sommet situé sur X et séparant un côté de la première sorte et un côté de la deuxième sorte.

5. Page 20, ligne 19. On peut supprimer la condition 1°. En effet, de la condition 3° résulte que, si l'un des sommets d'un cycle est de la première catégorie, il en est de même de tous les autres sommets du même cycle. Et, d'autre part, un cycle peut contenir des sommets de la deuxième catégorie et des sommets de la troisième catégorie.

6. Page 21, lignes 6-8. Dans le paragraphe V de la Note suivante (p. 25).

---

(1) Dans plusieurs Mémoires de Poincaré, des fautes d'impression et des fautes de calcul s'étaient glissées. Nous les avons corrigées dans la plupart des cas sans en faire mention. Dans les Notes suivantes on a indiqué les changements dans le texte original dont la nécessité n'est pas tout à fait évidente. Dans le numérotage des lignes on a compté les formules pour des lignes, mais on n'a pas compté les titres des Mémoires.

Poincaré a donné la condition nécessaire et suffisante pour que le polygone donne naissance à un groupe discontinu.

7. Page 23, lignes 18-19. Par rapport anharmonique de a et b par rapport à c et d, il faut ici entendre le rapport anharmonique des projections de a et b sur le plan des xy par rapport à c et d.

8. Page 27, ligne 14. Dans l'équation (2) il faut changer le signe du second membre.

9. Page 27, lignes 15-18. *Voir* la note 62.

10. Page 32, dernière ligne. Il faudrait multiplier le second membre par γ.

11. Page 33, lignes 3-9. Poincaré a repris cette question dans un Mémoire ultérieur et donné à ce théorème une forme plus précise. *Voir* pages 209-256.

12. Page 33, ligne 15. On trouve la définition de la notion de famille d'un groupe fuchsien à la page 128.

13. Page 33, lignes 18-23. Poincaré a retiré plus tard ce qui est dit dans le paragraphe III; *voir* page 404. C'était la considération des cycles de la quatrième sous-catégorie dans le polygone générateur qui conduisait Poincaré à envisager ces domaines limités par une infinité de cercles orthogonaux au cercle fondamental. *Cf.* les notes 25 et 30.

14. Page 43, ligne 14. *Voir* les notes 25, 30 et la note de la page 98.

15. Page 54, ligne 24. *Au lieu de* $\log\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)$, *lisez* $\log\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)$.

16. Page 75, lignes 18-34. Un extrait de ce Mémoire de Poincaré sera publié dans le Tome 39 des *Acta mathematica*.

17. Page 77, lignes 21-22. Il arrive qu'il y a dans un même cycle des sommets de la deuxième et de la troisième catégorie. Il convient d'ailleurs de remarquer que la définition d'un sommet de la troisième catégorie, donnée dans ce Mémoire, diffère légèrement de la définition que Poincaré a adoptée plus tard (*voir* p. 119).

18. Page 78, ligne 4 en remontant. *Voir* la note 25.

19. Page 79, lignes 11-13. Pour que le polygone donne naissance à un groupe fuchsien, il faut en outre que les sommets satisfassent à la relation suivante :

$$(A_1 - A_2)(A_3 - A_4)\ldots(B_3 - B_2) = (A_2 - A_3)(A_4 - A_5)\ldots(A_1 - B_2).$$

20. Page 94, lignes 28-33. *Voir* la note 25.

21. Page 98, lignes 4-6. *Voir* les notes 25 et 30.

22. Page 109, ligne 21. Dans la formule (4) on a remplacé c par $\pm c$, qu'il faut lire $+c$, si $a+d=2$, et $-c$, si $a+d=-2$.

23. Page 110, ligne 6 en remontant. On a remplacé *imaginaire* par *imaginaire ou négative*.

24. Page 122, lignes 12-14. Si la somme des angles de R_0 qui correspondent aux sommets d'un certain cycle est égale à 2π, on trouve, en décrivant un contour fermé infinitésimal autour d'un des sommets de ce cycle, une relation de la forme

$$z = f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}(f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}(\ldots(f_{\alpha_\nu}^{\varepsilon_\nu}(z)\ldots)),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ sont des indices qui peuvent être $1, 2, \ldots, n-1$ ou n et où chaque indice ne figure que deux fois au plus. Les ε sont des nombres qui sont égaux à $+1$ ou à -1. Si tous les sommets du polygone R_0 n'appartiennent pas à un même cycle, il y a un indice i au moins qui ne figure qu'une seule fois dans la relation susdite. Dans ce cas les substitutions (7) ne forment donc pas un système fondamental, car la substitution

$$(z, f_i(z))$$

n'est qu'une combinaison des autres.

25. Page 135, lignes 4-5. Les régions R_i (polygones générateurs) sont d'abord définies par la condition que chacune d'elles ne contient qu'un seul point correspondant à un point donné. Mais cette condition ne suffit pas pour les définir. Poincaré a ensuite imposé à ces régions cette condition nouvelle que de l'une d'elles on pourra déduire toutes les autres par le procédé indiqué dans le paragraphe IV. Dans ces conditions le polygone générateur n'admet pas des cycles de la quatrième sous-catégorie. En effet, on peut, d'une part, toujours choisir le polygone générateur tel qu'il n'y ait pas de cycle de la quatrième sous-catégorie et, d'autre part, de ce qui est dit dans la note 30 on voit sans peine que si, par le procédé indiqué dans le paragraphe IV, on cherche à rapprocher le polygone générateur indéfiniment d'un point double d'une des substitutions hyperboliques du groupe, ce point ne sera jamais un sommet proprement dit. Car, même si l'on réussit à faire passer le polygone par un tel point double, il se prolongera toujours au delà de ce point. On ne saurait donc admettre l'existence d'un cycle hyperbolique dans le sens indiqué dans le texte.

Mais, dans ces conditions, pour qu'un polygone donné puisse être le polygone générateur d'un groupe fuchsien, il faut ajouter une condition nouvelle, à savoir que les cycles de la deuxième catégorie soient de la troisième sous-catégorie. On peut énoncer cette condition sous une forme plus simple en la considérant comme un cas limite de la condition que les côtés conjugués doivent être congruents.

Soient $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ deux arcs de cercles orthogonaux à l'axe des nombres réels. Poincaré dit que $\alpha\beta$ est congruent à $\alpha\gamma$ s'ils ont même L, et en appliquant le langage de la géométrie non euclidienne, Poincaré dit encore que la droite $\alpha\beta$ est congruente à la droite $\alpha\gamma$ si elles sont des rayons d'un même cercle ayant α pour centre. Supposons maintenant que α est situé sur l'axe des nombres réels, pendant que β et γ restent au-dessus de cet axe. Les L des deux arcs $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ sont infinies. Convenons de dire qu'elles sont congruentes si le cercle passant par α, β et γ est tangent à l'axe des nombres réels. Dans le langage de la géométrie non euclidienne, cela veut dire que les droites $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ sont des rayons d'un même cercle (horicycle) ayant α pour centre.

Considérons un polygone normal R_0 et supposons que chaque cycle de la deuxième catégorie, s'il y en a, est formé d'un seul sommet. Cette hypothèse ne restreint pas la généralité. En précisant, comme on vient de le faire, le sens du mot *congruent*, les conditions 1° et 2° de la page 135 sont nécessaires et suffisantes pour que R_0 puisse engendrer un groupe fuchsien.

Mais il arrive que le polygone R_0 engendre une infinité de groupes fuchsiens. En effet, s'il y a deux côtés conjugués AB et A′B′ dont les extrémités sont sur l'axe des nombres réels, il y a une infinité de substitutions hyperboliques S qui transforment le cercle AB en le cercle A′B′. Si l'on veut que le groupe soit entièrement déterminé par le polygone générateur, il faut imposer une condition nouvelle à la substitution S. Construisons un cercle qui coupe orthogonalement l'axe des nombres réels et les cercles AB et A′B′. Soient p et q les points d'intersection de ce cercle avec l'axe des nombres réels. Il y a une substitution hyperbolique S, ayant p et q pour points doubles, qui transforme AB en A′B′ et cette substitution est uniquement déterminée.

26. Page 141, ligne 1. *Au lieu de* ABP, *lisez* APB.

27. Page 151, ligne 3 en remontant. On trouve l'exception dont il s'agit ici à la page 158; mais, en se reportant à ce qui est dit dans la note 30, on voit sans peine que ce cas d'exception n'a pas lieu.

D'autre part, pour que le théorème où il est dit que la famille ne change pas soit vrai, il convient de changer légèrement la définition de la notion de famille. Il faut admettre la présence des cycles de la première sous-catégorie dans toutes les familles. En effet, on peut dans toutes les familles augmenter à volonté jusqu'à un certain maximum le nombre des cycles de cette catégorie. On peut également diminuer ce nombre jusqu'à un certain minimum qui peut être zéro.

28. Page 155. Il arrive que les quatre déterminants s'annulent en même temps. En ce cas, il faut mettre

$$A = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 & \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \\ \beta_1 & \delta_1 & \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 \\ \beta_2 & \delta_2 & \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1 \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \alpha_2 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1 \end{vmatrix}.$$

Si encore ces quatre déterminants sont nuls, il suffit d'intervertir les lettres α et β et les lettres γ et δ.

29. Page 155, ligne 23. Dans le déterminant D, il faudrait remplacer α_2 par γ_2.

30. Page 158, ligne 20. Il y a ici une lacune dans la discussion et le résultat n'est pas exact. Les principes du paragraphe IX permettent de remplacer l'octogone $R_0 = ABCDEFGH$ par un domaine R_0'' formé par l'hexagone $ANDEN_1H$ et les deux triangles BCN et FGN_1 ayant pour côtés les segments BC et FG de l'axe X et les demi-cercles décrits respectivement sur BN, CN, FN_1 et GN_1 comme diamètres. Il faut y ajouter encore deux arcs de cercle isolés qu'on peut choisir de la manière suivante :

Décrivons des cercles sur MN et sur M_1N_1 comme diamètres. La partie de l'arc MN qui est située entre les cercles AB et CD appartiendra encore à R_0''. Il en est de même de la partie de l'arc M_1N_1 qui est située entre les cercles EF et GH. Le domaine R_0'' ainsi formé est bien moins simple que l'octogone R_0 dont on partait. En mettant de côté les deux arcs isolés, on peut considérer R_0'' comme un octogone ayant pour côtés ANB, BC, CND, DE, EN_1F, FG, GN_1H et HA. En effet, il faut considérer les deux arcs AN et NB comme formant un seul côté. Cet octogone est comme R_0 de la troisième famille.

En appliquant le procédé indiqué dans le texte, on peut encore remplacer l'hexagone $ANDEN_1H$ par un domaine formé par le quadrilatère $N_2NN_3N_1$ et les deux triangles DEN_3 et HAN_2 ayant pour côtés les segments DE et HA de l'axe X et les demi-cercles décrits respectivement sur DN_3, EN_3, AN_2 et N_2H comme diamètres. Il faut y ajouter encore deux arcs de cercles isolés qu'on peut choisir de la manière suivante :

Soit $S_3 = S_1^{-1}S$ et soient M_3 et N_3 les points doubles de la substitution S_3. Le point M_3 est situé sur le segment ND. Décrivons des cercles sur M_2N_2 et sur M_3N_3 comme diamètres. La partie de l'arc N_2M_2 qui est située entre les cercles AN et N_1H appartiendra encore à notre domaine. Il en est de même de la partie de l'arc M_3N_3 qui est située entre les cercles ND et EN.

On a donc remplacé R_0 par un domaine R_0 formé par le quadrilatère $N_2NN_3N_1$, quatre triangles et quatre arcs de cercle isolés. En mettant de côté ces arcs isolés on peut considérer R_0'' comme un octogone limité par les segments BC, DE, FG et HA de l'axe X et par douze arcs de cercle. Cet octogone est de la troisième famille. Le cas d'exception dont il est question dans le texte n'a donc pas lieu.

Il est essentiel de remarquer qu'en choisissant R_0'' comme il est indiqué dans le texte, l'ensemble des polygones R_i, transformés de R_0 par les substitutions du groupe, ne recouvriront qu'une partie du plan qui est limitée par l'axe X et par une infinité de cercles. En choisissant au contraire R_0 comme on vient de l'indiquer, l'ensemble des domaines R_i recouvrira toute la partie du plan située au-dessus de l'axe X. [*Cf.* l'Ouvrage de MM. Fricke et F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, p. 443 et suiv. (1897).]

31. Page 164, ligne 6 en remontant. Par le symbole [illegible], il faut ici

entendre la substitution qui transforme z en z' où

$$\varphi(z') = f(z).$$

32. Page 168, lignes 15-17. *Voir* page 73 et la note 16.

33. Pages 171-173. La démonstration de la convergence de la série (2) est en défaut si l'un ou plusieurs des coefficients γ_i sont nuls. Mais on voit sans peine que les substitutions correspondantes sont elliptiques et admettent o et ∞ pour points doubles. Les termes de la série (2) dans lesquelles $\gamma_i = 0$ sont par conséquent en nombre fini et ils se réduisent à 1.

34. Page 175, lignes 13-14. Pour ce qui concerne ces exceptions, *voir* les notes 27 et 30.

35. Page 177, lignes 14-18. Il convient de multiplier les invariants L et S respectivement par 2 et par 4 si l'on veut que cette nouvelle définition de la L s'accorde entièrement avec celle qui précède.

36. Page 178, ligne 2. La première démonstration de la convergence de la série (2) est valable pour $m = 2$. La deuxième démonstration est valable si $m > 1$, mais elle ne s'applique pas si z est situé sur un côté de la deuxième sorte.

37. Page 184, lignes 15-23. *Voir* les notes 25 et 30.

38. Page 190, ligne 6 en remontant. *Au lieu de* $R_0 + R''_0$, *lisez* $R_0 + R'_0$.

39. Page 195, ligne 3 en remontant. *Au lieu de* C_i, *lisez* C'_i.

40. Page 199, lignes 6-12. Dans la définition d'une fonction fuchsienne, il convient d'ajouter la condition que la fonction est méromorphe dans le polygone générateur. En particulier, si la variable tend vers un sommet de la deuxième catégorie, en restant à l'intérieur du polygone générateur, il faut que la fonction tende vers une limite finie ou vers l'infini.

41. Page 204, ligne 15. *Au lieu de* $\beta_{n-1} + 1$, *lisez* $\beta_{n+1} - 1$.

42. Page 204, ligne 5 en remontant. Il faudrait mettre le signe — devant le second membre.

43. Page 207, ligne 2 en remontant. Dans les équations (4), il faut changer le signe du premier membre de la dernière équation, car autrement la fonction X_{i-1} admettrait le point $z = \alpha_{n+1}$ pour pôle.

44. Page 207, ligne 13. *Au lieu de* q fonctions, *lisez* $q + 1$ fonctions.

45. Page 208, ligne 10. Le Mémoire de G.-H. Halphen dont il s'agit ici est intitulé : *Sur les fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss* et se trouve dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 92, p. 856-859 (4 avril 1881).

46. Page 217, ligne 5 en remontant. *Au lieu de* $h - 1$, *lisez* $h = 1$.

47. Page 237, ligne 10. Dans le second membre de l'équation (1), nous avons changé le signe.

48. Page 238, ligne 3. *Au lieu de* $Q'^2(x_i)$, *lisez* $Q'^2(\alpha_i)$.

49. Page 246, ligne 8 en remontant. *Au lieu de* séries de, *lisez* séries.

50. Page 255, ligne 11. *Au lieu de* $az + \beta$, *lisez* $\alpha z + \beta$.

51. Page 255, ligne 13. Dans le second membre de cette formule il faut supprimer le facteur $(\gamma z + \delta)^{2m}$.

52. Page 260, ligne 18. *Au lieu de* inversion, *lisez* inversion.

53. Page 271, lignes 31-32. *Au lieu de* P_0 la portion du plan comprise entre K′ et C′, *lisez* P_0 la portion du plan comprise entre K et C.

54. Page 273, lignes 20-21. Il faut excepter les cycles qui sont tels que la somme des angles du cycle est égale à 2π.

55. Page 279, ligne 15. *Au lieu de* à F_1, *lisez* F_1.

56. Page 280, lignes 1-8. Relativement au théorème d'existence des groupes kleinéens, on peut faire une remarque qui ne diffère guère de ce qui a été dit dans la note 25 au sujet des groupes fuchsiens.

57. Page 284, ligne 10. *Au lieu de* C_1, *lisez* C_i.

58. Page 284, ligne 2 en remontant. *Au lieu de* C_1, *lisez* C_i.

59. Page 288, ligne 5. *Au lieu de* C_1, *lisez* C_i.

60. Page 295, lignes 9-12. La première démonstration de Poincaré (p. 170-173) de la convergence de la série (1) subsiste dans le cas actuel si l'on ajoute la condition nouvelle que le point à l'infini n'est pas un point singulier essentiel du groupe, m désignant un entier plus grand que 1.

Le cas $m = 1$ a été étudié par M. Schottky [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. **101**, p. 227 (1887)] et par M. Burnside [*Proceedings of the London mathematical Society*, t. **23**, p. 55-58 (1891)]. Comme l'a fait remarquer M. Fricke, la convergence subsiste dans certains cas, même si $m = \frac{1}{2}$ (*Festschrift für R. Dedekind*, Braunschweig, 1901).

Si le point à l'infini est un point singulier essentiel du groupe, la série

$$\sum \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2m}}$$

peut être convergente ou divergente. Elle converge si $\mathrm{H}(z)$ admet le point $z = \infty$ pour zéro d'ordre p, p étant $\geqq 2m$. Dans certains cas particuliers la série converge si $p \geqq 2$.

61. Page 312, ligne 11. *Au lieu de* $\frac{d^k v_{imn}}{dx^p}$, *lisez* $\frac{d^p v_{imn}}{dx^p}$. *Au lieu de* $\frac{d^p v_{i\,m-1\,n}}{dx^k}$, *lisez* $\frac{d^k v_{i\,m-1\,n}}{dx^k}$.

62. Page 318, lignes 14-16. Cette affirmation ne paraît pas exacte (*voir* HILB, *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften*, II, 2, p. 518).

63. Page 347, ligne 3. *Au lieu de* $p - 1$, *lisez* $p + 1$.

64. Page 349, lignes 15 et 17. *Au lieu de* $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1}$, *lisez* $\lim \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1}$.

65. Page 350, lignes 17-29. *Voir* les notes 25 et 30.

66. Page 397, lignes 25-28. Cette affirmation n'est pas exacte. Si le groupe est de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille, la série

$$\sum \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

est absolument convergente pourvu que le point à l'infini ne soit pas un point singulier essentiel du groupe. Cette dernière condition est d'ailleurs toujours satisfaite dans le cas dont il s'agit ici. Poincaré a donné deux démonstrations de la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{|\gamma_i z - \delta_i|^{2m}}, \qquad m \geqq 2.$$

La première démonstration subsiste entièrement dans le cas $m = 1$, si l'on remplace les surfaces limitées par les contours C_i par des arcs de cercle convenablement choisis.

67. Page 465, lignes 6-14. Dans les coefficients de la substitution S, il faut remplacer $-\delta\gamma$ par $-2\delta\gamma$ et $-\alpha\beta$ par $-2\alpha\beta$. A la rigueur, il ne suffit pas que α, β, γ et δ soient des quantités quelconques telles que

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^6 = 1.$$

Car le déterminant de la substitution est égal à $(\alpha\delta - \beta\gamma)^3 = 1$ et, d'autre part, pour que la substitution S n'altère pas Φ, il faut que

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1.$$

On a donc

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

même si l'on ne suppose pas que α, β, γ, δ soient réels.

68. Page 474, ligne 5. Dans l'edition originale, la substitution SS^{-1} s'écrit

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varphi & \frac{1}{2}\sin^2\varphi & \sin^2\varphi \\ -\sin^2\varphi & \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ \sin^2\varphi & -\frac{1}{2}\sin^2\varphi & \cos^2\varphi \end{vmatrix},$$

mais cette substitution altère H. Dans le texte il faut, dans la deuxième ligne, deuxième colonne, remplacer $\cos^2\varphi$ par $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$.

69. Page 482, lignes 10-12. Nous avons remplacé φ par $\frac{1}{2}\varphi$, car le multiplicateur $e^{i\varphi}$ de la substitution elliptique est égal à

$$e^{i\varphi} = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^2.$$

70. Page 595, lignes 1-13. M. H. von Mangoldt a démontré que la série converge même si H admet des infinis d'ordre $2m - 2$ au plus dans un ou plusieurs des sommets de la deuxième catégorie, c'est-à-dire dans le point à l'infini ou dans les points $\xi = p$, $\eta = q$, p et q étant des entiers. Poincaré a donné dans le paragraphe III un théorème plus général.

71. Page 596, ligne 1. Poincaré a ici permuté le rôle des entiers γ et δ avec celui des entiers α et β; il faut donc lire

$$\beta\gamma - \alpha\delta = 1,$$

parce que le déterminant de la substitution doit être égal à $+1$.

72. Page 597, ligne 11. Cette série est semi-convergente. Avant de décomposer H en éléments simples, il faut donc avoir soin de grouper les termes de manière que la série soit absolument convergente.

73. Page 597, ligne 18. Nous avons changé le signe de λ_p.

74. Page 606, lignes 21-22. Ce résultat n'est pas exact. De la démonstration que Poincaré a donnée à la page 604, il résulte que la série thétafuchsienne

$$\Theta(z) = \sum H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}$$

converge absolument si la fonction $H(z)$ admet le point a pour pôle d'ordre $2m-2$ au plus, a étant un sommet du polygone fuchsien fondamental situé sur le cercle fondamental. Mais cette série représente une fonction de la deuxième espèce si $H(z)$ n'admet pas d'autres pôles à l'intérieur du cercle fondamental ou sur ce cercle. Pour le voir il suffit de grouper les termes de la même manière qu'à la page 187 et de remarquer que les fonctions rationnelles $H'_k(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ admettent le point $t=\infty$ pour zéro d'ordre 2 au moins. On en conclut que $\Theta(z)$ admet un développement de la forme

$$\Theta(z)=\frac{1}{(z-a)^{2m}}\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n e^{\frac{2\pi in}{\beta}\frac{1}{z-a}}.$$

On suppose que la substitution parabolique qui appartient au sommet a est de la forme

$$\left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a}+\beta\right).$$

Les séries que Poincaré appelle de troisième et de quatrième espèces représentent donc des fonctions thétafuchsiennes de deuxième et de première espèces.

Pour arriver à une fonction de troisième espèce on peut procéder comme il suit :

Soit τ la substitution parabolique susdite. On peut choisir parmi les substitutions du groupe une infinité $S_1, S_2, \ldots, S_\nu, \ldots$ telles que toute substitution du groupe puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$S_\nu\tau^n, \quad \nu=1, 2, 3, \ldots, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Posons $S_\nu(z)=z_\nu$. La série

$$\Theta(z)=\sum\frac{1}{(z_\nu-a)^{2m}}\left(\frac{dz_\nu}{dt}\right)^m,$$

où la sommation est étendue sur les substitutions S_ν, est absolument convergente pourvu que $m\geq 2$, et elle représente une fonction thétafuchsienne de troisième espèce.

75. Page 607, lignes 5-7. La démonstration que Poincaré a donnée de la convergence de la série (2) ne s'applique pas dans le cas actuel, parce que le cercle fondamental se réduit à l'axe des nombre réels. S'il s'agit d'un groupe fuchsien quelconque admettant le point à l'infini pour point singulier essentiel, la série

$$X=\sum\frac{A_k}{z-a_k}$$

est en général divergente. Dans le cas particulier du groupe modulaire, cette série est semi-convergente et l'on peut la rendre absolument convergente en groupant les termes d'une manière convenable.

Heureusement les considérations qui suivent reposent sur la serie

$$\sum \frac{1}{[z(\gamma a_k + \delta) - (\alpha a_k + \beta)]^{2m}},$$

et cette série est absolument convergente.

76. Page 609, lignes 15 et 17. Nous avons changé les signes de λ_1 et de λ_2.

77. Page 615, ligne 3 en remontant. Nous avons multiplié le second membre de cette formule par γ^{-2m}, ce qui entraine quelques corrections dans les formules suivantes.

FIN DU TOME II.

ERRATA.

Page 217, ligne 10 en remontant. *Au lieu de* $\Lambda_0(x)$, *lisez* $\Lambda_0(z)$.

Page 259, ligne 3 de la note. *Au lieu de* B_6, *lisez* B_0.

Page 440, note (1). *Au lieu de* 238, *lisez* 233.

Page 476, ligne 20. *Au lieu de* $T g T^{-1}$, *lisez* $\tau g \tau^{-1}$.

Page 515, note (1). *Au lieu de* 117, *lisez* 177.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

50908 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.